

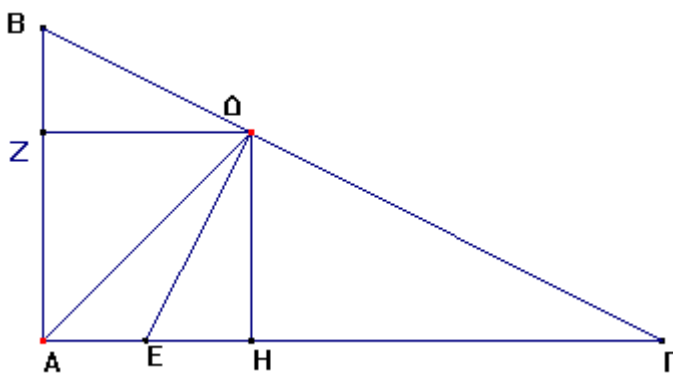
«Η Ευκλείδεια γεωμετρία και η διδασκαλία της»

Λύσεις Θεμάτων Εξέτασης 01-02-2016

ΘΕΜΑ 1α [2]

Σε τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A=90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας A , τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ .
Αν η κάθετος επί την $B\Gamma$ στο Δ τέμνει την $A\Gamma$ στο E , τότε $DB=DE$.

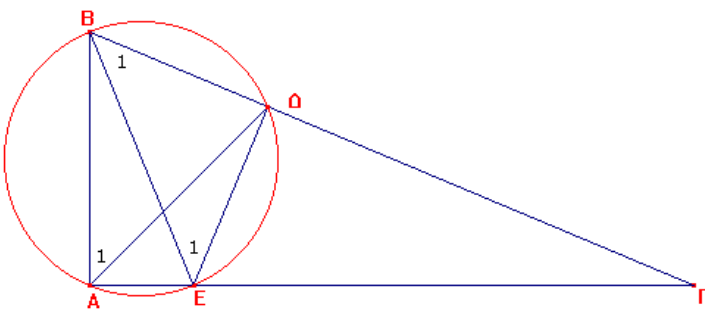
Απόδειξη:



Από το Δ φέρνω τις κάθετες ΔH και ΔZ πάνω στις πλευρές του τριγώνου, και συγκρίνω τα τρίγωνα ΔEH και ΔZB : Αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος, $\Delta H=\Delta Z$. Επίσης $\angle \Delta EH=\angle \Delta BZ$, ως συμπληρώματα της γωνία Γ , από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και

$\Delta E\Gamma$. Άρα τα τρίγωνα ΔEH και ΔZB είναι ίσα ως ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες. Άρα $DB=DE$.

Άλλη απόδειξη:



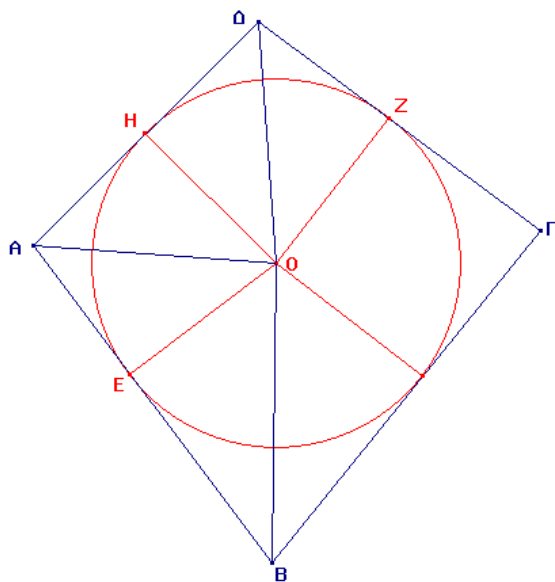
Φέρνουμε την BE και βλέπουμε ότι φαίνεται από το A και από το Δ υπό ορθή γωνία, άρα το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Οπότε $\angle A_1=E_1=45^\circ$, καθότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της ορθής, από τα

δεδομένα. Επομένως στο τρίγωνο $BE\Delta$, που είναι ορθογώνιο από την κατασκευή θα είναι και $B_1=45^\circ$, δηλαδή το $AE\Delta$ είναι ισοσκελές. Άρα $DB=DE$.

ΘΕΜΑ 1β [2]

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο είναι οι διχοτόμοι τριών γωνιών του να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το ευθύ (ικανή): Αν ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο, τότε οι διχοτόμοι τριών γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.



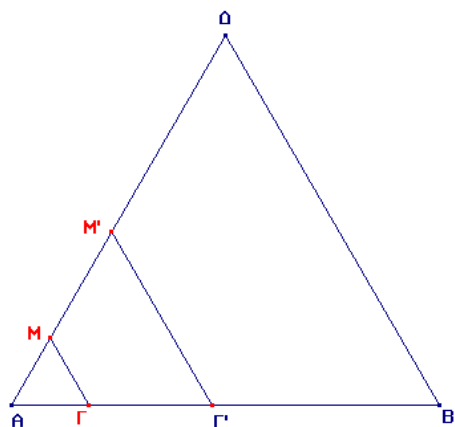
Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο τετράπλευρο το $AB\Gamma\Delta$, περιγεγραμμένο στον κύκλο O . Οι πλευρές του είναι από τον ορισμό εφαπτόμενες στον κύκλο. Όμως από ένα σημείο εκτός του κύκλου άγονται ίσες εφαπτόμενες και η διχοτόμος των γωνιών τους διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, δηλαδή από το ίδιο σημείο.

Το αντίστροφο (αναγκαία): Αν οι διχοτόμοι τριών γωνιών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο τετράπλευρο το $AB\Gamma\Delta$ στο οποίο οι διχοτόμοι τριών γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, έστω το O . Αν φέρουμε τις κάθετες από το O προς τις πλευρές, τις OE , OH , OZ ,... τότε αυτές θα είναι ίσες μεταξύ τους αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας απέχει εξίσου από τις πλευρές. Άρα τα E, H, Z ,... βρίσκονται πάνω στην ίδια περιφέρεια η οποία εφάπτεται στις πλευρές, αφού $OE \perp AB$, κλπ..

ΘΕΜΑ 2α [2]

Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα τυχαίο σημείο πάνω σ' αυτό το Γ . Με πλευρά την $A\Gamma$ κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, με κορυφή έστω M . Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος του M καθώς το Γ διατρέχει την AB .



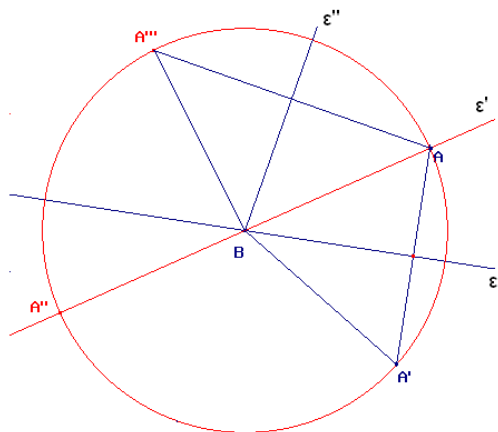
τμήσει την AB , δηλαδή το Γ' .

Εύρεση: Δύο ακραία σημεία του τόπου είναι το A και το Δ , καθότι όταν το Γ συμπίπτει με το A θα συμπίπτει και το M , ενώ όταν το Γ συμπίπτει με το B θα έχουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Delta B$. Το M λοιπόν θα διατρέχει την $A\Delta$ που είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Αντίστροφα, ένα τυχόν σημείο, το M' , του $A\Delta$ αποτελεί κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου όταν το Γ συμπίπτει με το σημείο που η παράλληλος από το M' προς την BD , θα

ΘΕΜΑ 2β [2]

Δίδονται δύο σημεία τα Α και Β. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός τόπος των συμμετρικών του Α ως προς τις ευθείες που διέρχονται από το Β.

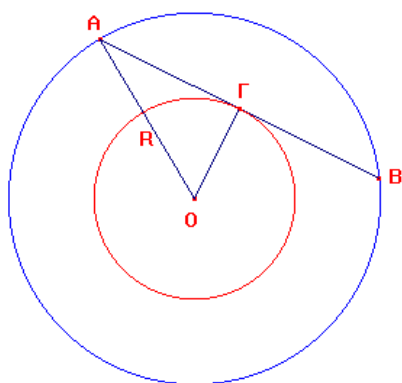


Εύρεση: Έστω μια τέτοια ευθεία η Βε, και Α' το συμμετρικό του Α. Διαπιστώνουμε ότι Α'Β=ΒΑ, από το ισόπλευρο ΑΒΑ'. Άρα το Α' επέχει σταθερή απόσταση ΑΒ, από το σταθερό σημείο Β. Οπότε ο ζητούμενος Γεωμετρικός Τόπος είναι η περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το Β και ακτίνα ΑΒ.

Αντίστροφα, το τυχαίο σημείο του τόπου το, Α'', αποτελεί συμμετρικό του Α, όπως φαίνεται από το ισόπλευρο ΒΑΑ''.

ΘΕΜΑ 3α [2]

Σε ένα τυχαίο κύκλο ακτίνας R , να κατασκευαστεί μια χορδή μήκους $R\sqrt{3}$.



Ανάλυση: Έστω κύκλος Ο με ακτίνα R , και έστω μία χορδή του η ΑΒ, $AB = R\sqrt{3}$. Φέρνουμε το απόστημα ΟΓ και την ακτίνα ΟΑ. Στο τρίγωνο ΑΟΓ, άρα, $AG = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, οπότε $OG = \frac{R}{2}$ (από το πυθαγόρειο θεώρημα)

Σύνθεση: Στον κύκλο (Ο, R) γράφουμε ένα εσωτερικό κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα $\frac{R}{2}$.

Μια εφαπτομένη στον κύκλο αυτό ορίζει χορδή του (Ο, R) με $R\sqrt{3}$.

Απόδειξη: Φέρνουμε το απόστημα και υπολογίζουμε με το πυθαγόρειο το μισό της χορδής

$$\frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ κλπ.}$$

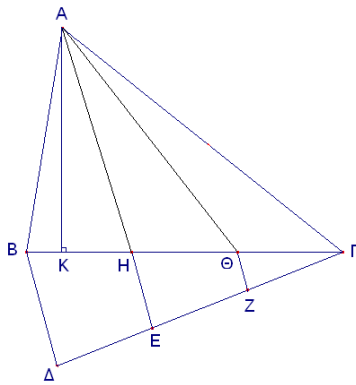
Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντα λύση γιατί η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου, το $\frac{R}{2}$

Είναι πάντα κατασκευάσιμο.

$$(2R)^2 = (R\sqrt{3})^2 + y^2$$

Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντα λύση, καθότι πάντα κατασκευάζεται στο άκρο μιας διαμέτρου μια χορδή ίση με την ακτίνα.

4



Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$, χωρισμένο από τις AH , και $H\Theta$ σε τρία ισεμβαδικά τρίγωνα τα ABH , $AH\Theta$ και $A\Theta\Gamma$, τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, το AK , οπότε πρέπει να έχουν και ίσες βάσεις, δηλαδή πρέπει $BH=H\Theta=\Theta\Gamma$.

Κατασκευή: Χωρίζουμε τη βάση του δοσμένου τριγώνου σε τρία ίσα μέρη, με τη βοήθεια της τυχούσας $\Gamma\Delta$ πάνω στην οποία παίρνουμε τυχαία $\Gamma Z=ZE=Z\Delta$ και φέρνουμε τις παράλληλες από τα E και Z προς την ΔB

ΘΕΜΑ 4β [2]

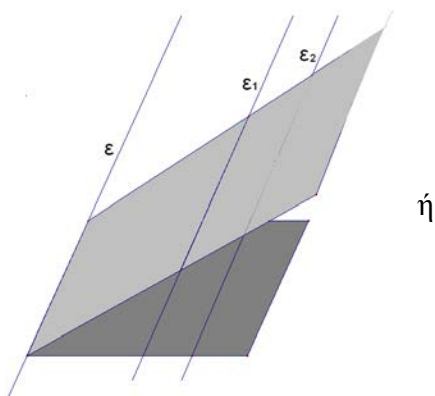
Δίδεται ορθός κύλινδρος με ακτίνα βάσης R μέσα στον οποίο είναι εγγεγραμμένη μια σφαίρα.

- Συγκρίνετε την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου με την επιφάνεια της σφαίρας.
- Ποιος είναι ο όγκος του στερεού τον οποίο υπολείπεται η σφαίρα του κυλίνδρου.

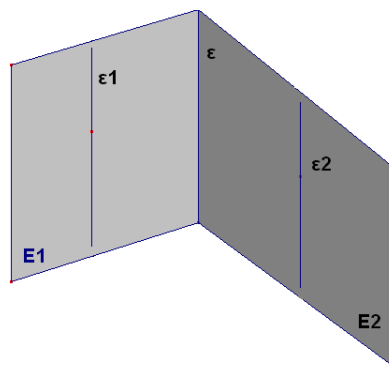
Λύση: (απλές εφαρμογές των σχετικών τύπων)

ΘΕΜΑ 5 [2]

Έστω δύο παράλληλες ευθείες στο χώρο οι ϵ_1 και ϵ_2 , από τις οποίες διέρχονται τα επίπεδα E_1 και E_2 αντίστοιχα. Αν τα δύο αυτά επίπεδα τέμνονται κατά την ευθεία ϵ , δείξτε ότι η ϵ είναι παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 .



ή



Απόδειξη: Ξέρουμε πως αν μια ευθεία είναι παράλληλη σε μια ευθεία κάποιου επιπέδου τότε είναι παράλληλη στο επίπεδο. Οπότε, αφού $\epsilon_1 \in E_1$ και $\epsilon_2 // \epsilon_1$, άρα $\epsilon_2 // E_1$. Αν λοιπόν η ϵ_2 δεν ήταν παράλληλη στην ϵ , θα είχε κοινό σημείο με αυτήν άρα και με το επίπεδο E_1 , που είναι άτοπο γιατί $\epsilon_2 // E_1$. Άρα $\epsilon_2 // \epsilon$. Με όμοιο συλλογισμό $\epsilon_1 // \epsilon$.