

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ-ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Στοχαστικές Διαδικασίες

Ημερομηνία: 12-02-2016

Ώρα: 12:00-15:00

Εξεταστής: Λέκτορας Ι. Δημητρίου

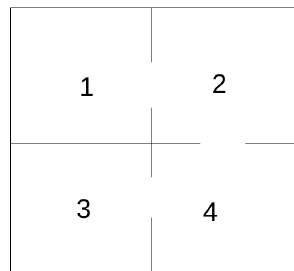
1. [Μονάδες: 2.5] Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος τον παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (α') Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.
(β') Να βρεθούν οι οριακές πιθανότητες $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$, $i, j \in E$.
2. [Μονάδες: 2] Μια συσκευή εισόδου-εξόδου (I/O, Input/Output queue) έχει πεπερασμένο χώρο αναμονής M στον οποίο τοποθετούνται αρχεία δεδομένων από άλλες περιφερειακές μονάδες (π.χ. φαξ, εκτυπωτές). Υποθέτουμε ότι ο χρόνος παρατήρησης του συστήματος έχει διακριτοποιηθεί και σε κάθε χρονική μονάδα (slot) ένα νέο αρχείο τοποθετείται στο buffer της συσκευής με πιθανότητα p (δεδομένου ότι δεν είναι γεμάτο). Επιπλέον σε κάθε τέτοια χρονική μονάδα ένα αρχείο αφαιρείται από το buffer με πιθανότητα q . Στην περίπτωση που μια άφιξη και μια εξυπηρέτηση συμβούν στην ίδια χρονική μονάδα, τότε η άφιξη προηγείται της εξυπηρέτησης. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες των αναχωρήσεων και ανεξάρτητες από τις παρελθοντικές εμφανίσεις τους. Αν X_n ο αριθμός των αρχείων στη συσκευή την χρονική στιγμή n ,

- (α') Δικαιολογήστε γιατί η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα και κατασκευάστε το διάγραμμα μεταβάσεων αυτής.
(β') Δικαιολογήστε γιατί η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι μη-διαχωρίσιμη και απεριοδική.
(γ') Βρείτε την οριακή κατανομή της $\{X_n, n \geq 0\}$.
3. [Μονάδες: 3] Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με αρχικό μέγεθος N , που αναπτύσσεται σε ένα εχθρικό περιβάλλον. Υποθέτουμε ότι **κάθε** ζωντανό μέλος του πληθυσμού την χρονική στιγμή t έχει πιθανότητα $\lambda dt + o(dt)$ να γεννήσει ένα νέο μέλος στο διάστημα $(t, t + dt)$ και πιθανότητα $\mu dt + o(dt)$ να πεθάνει στο ίδιο διάστημα. Αν $\{X(t); t \geq 0\}$ στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τον αριθμό των μελών του πληθυσμού την χρονική στιγμή t και $p_n(t) = P(X(t) = n | X(0) = N)$,

- (α') Να γραφεί η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $P(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$, $|z| < 1$, και να λυθεί.
(β') Να βρεθεί το αναμενόμενο μέγεθος του πληθυσμού την χρονική στιγμή t .
(γ') Ποια η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού την χρονική στιγμή t ; Ποια η αντίστοιχη πιθανότητα μετά από πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα (δηλ. σε στατιστική ισορροπία);.
4. [Μονάδες: 2.5] Ένα όχημα κινείται μέσα στο χώρο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε κάθε βήμα το όχημα διασχίζει ένα από τα περάσματα στο δωμάτιο που βρίσκεται με ίσες πιθανότητες το καθένα. Αν το όχημα διασχίσει ένα από τα περάσματα που οδηγούν έξω από το χώρο παραμένει έξω για πάντα.



- (α') Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι το όχημα να βρεθεί έξω από το χώρο.
(β') Να υπολογιστεί η πιθανότητα όταν το όχημα βγει από το χώρο αυτό να συμβεί απο την έξοδο του δωματίου 2.