

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Πρώτη ομάδα ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω d ο μέγιστος κοινός διαρέτης των ακεραίων 272 και 119.

(α) Βρείτε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) για τα οποία ισχύει ότι $d = 272x + 119y$.

(β) Υπολογίστε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 272 και 119.

Άσκηση 2. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $12x = 16$ στο $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

Άσκηση 3. Έστω n φυσικός.

(α) Δείξτε ότι $17 \mid 2^{8n+4} + 1$.

(β) Βρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες ο $2^{8n+4} + 1$ είναι πρώτος.

Άσκηση 4. Έστω n περιττός ακεραίος ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Ναδειχθεί ότι $n^2 \equiv -2447 \pmod{24}$.

Άσκηση 5. Έστω m και n σχετικά πρώτοι ακεραίοι. Δείξτε ότι οι $2m + n$ και $7m + 3n$ είναι επίσης σχετικά πρώτοι.

Άσκηση 6. Έστω ότι οι p και $p + 2$ είναι πρώτοι αριθμοί με $p \geq 5$. Δείξτε ότι $6 \mid p + 1$.

Άσκηση 7. Έστω n σύνθετος ακεραίος με $n \geq 6$. Δείξτε ότι ο $(n - 1)!$ είναι ακεραίο πολλαπλάσιο του n .