Ασκήσεις Ι

1. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Για το πρόβλημα ελέγχου της υπόθεσης $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ κατά της $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$, $(\theta_1 > \theta_0)$, έστω ο έλεγχος

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > \dfrac{\theta_0 + \theta_1}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

α) Δείξτε ότι $\alpha = \beta$ ($\alpha = \mathsf{P}$(σφάλμα τύπου Ι), $\beta = \mathsf{P}$(σφάλμα τύπου ΙΙ)).

β) Να δειχτεί ότι $\alpha \longrightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

2. Ας θεωρήσουμε ότι ο χρόνος ζωής ηλεκτρικού λαμπτήρα εταιρείας Α ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\theta)$. Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι ο μέσος χρόνος ζωής των λαμπτήρων είναι πάνω από $6650h$. Μία αντίπαλη εταιρεία Β ισχυρίζεται ότι ο μέσος χρόνος ζωής των λαμπτήρων της Α δεν ξεπερνά τις $6650h$. Τυχαίο δείγμα 10 λαμπτήρων έδωσε τους εξής χρόνους (στρογγυλοποιημένους σε ώρες).

6252	6750	6803	6379	6774
6962	6632	6714	6599	6852

α) Να ελεγχθεί ο ισχυρισμός της εταιρείας Β σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%.

β) Χρησιμοποιώντας τον έλεγχο του ερωτήματος (α), ποια είναι η πιθανότητα εσφαλμένης απόφασης αν ο μέσος χρόνος ζωής είναι $6650h$;

3. Βιομηχανία δημητριακών διαθέτει στο εμπόριο κουτιά δημητριακών σε συσκευασίες των $500gr$ (καθαρό βάρος). Η εταιρεία προστασίας καταναλωτών, για να διαπιστώσει μήπως η βιομηχανία εξαπατά το κοινό (δηλαδή τα κουτιά έχουν κατά μέσο όρο καθαρό βάρος μικρότερο των $500gr$) έλαβε τυχαίο δείγμα 10 κουτιών, από το οποίο προέκυψαν τα εξής καθαρά βάρη: 503, 497, 498, 502, 495, 495, 502, 505, 490, 504. Ας υποθέσουμε ότι το καθαρό βάρος κουτιού ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\theta, 25)$.

α) Σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 10%, να ελεγχθεί εάν η βιομηχανία εξαπατά ή όχι το κοινό.

β) Ας υποθέσουμε ότι $\theta = 490$ (δηλαδή η βιομηχανία εξαπατά το κοινό). Χρησιμοποιώντας έλεγχο της μορφής του ερωτήματος (α), ποια είναι η πιθανότητα να μην αποκαλυφθεί η απάτη;

γ) Χρησιμοποιώντας τον ίδιο έλεγχο, ποια είναι η πιθανότητα να κατηγορηθεί άδικα η βιομηχανία;

4. Καθηγητής Ψυχολογίας ισχυρίζεται ότι η τυπική απόκλιση των βαθμών σε ένα τεστ νοημοσύνης μαθητών (IQ test) είναι 10. Σε τυχαίο δείγμα 23 μαθητών προέκυψε τυπική απόκλιση 12.16. Εάν οι βαθμοί ακολουθούν κανονική κατανομή, να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του Καθηγητού σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%.

5. Ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος μετάβασης μαθητού από το σπίτι στο σχολείο ακολουθεί κανονική κατανομή. Από προηγούμενη έρευνα έχει διαπιστωθεί ότι ο μέσος χρόνος μετάβασης είναι $12'$. Όμως, μετά την κατασκευή μιας νέας κεντρικής οδού, σε τυχαίο δείγμα 25 μεταβάσεων ακολουθώντας τη νέα διαδρομή, παρατηρήθηκε μέσος χρόνος μετάβασης $11'$ και τυπική απόκλιση $1'$. Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, παρέχουν τα δεδομένα αυτά ένδειξη ότι ο μέσος χρόνος μετάβασης στο σχολείο έχει όντως μειωθεί;

6. Δίνεται το τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $3\theta^3/x^4$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$. Για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ θεωρούμε τον έλεγχο

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{(1)} > c \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

όπου $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c, έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει ισχύ δ.

β) Για αυτή την τιμή του c, να υπολογιστεί το μέγεθος του ελέγχου και η πιθανότητα σφάλματος τύπου II.

7. Δίνεται το τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από την κατανομή με πυκνότητα $x^2/(9\theta^3)$, $0 < x < 3\theta$, $\theta > 0$. Για το πρόβλημα $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ κατά $\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ θεωρούμε τον έλεγχο

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{(n)} > c \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

όπου $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c, έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει πιθανότητα σφάλματος τύπου II, έστω δ, $0 < \delta < 1$.

β) Για αυτή την τιμή του c, υπολογίστε την ισχύ και το μέγεθος του παραπάνω ελέγχου.

8. Καπνοβιομηχανία ισχυρίζεται ότι τα τσιγάρα της περιέχουν κατά μέσον όρο το πολύ 25 *mgr* νικοτίνης. Σε τυχαίο δείγμα 16 τσιγάρων η μέση τιμή της νικοτίνης ήταν 26.4 *mgr* με τυπική απόκλιση 2 *mgr*. Εάν η ποσότητα νικοτίνης ακολουθεί κανονική κατανομή, σε επίπεδο σημαντικότητας (μέγεθος) 5%, παρέχουν τα δεδομένα του δείγματος επαρκή ένδειξη κατά του ισχυρισμού της βιομηχανίας;
($z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.960$, $t_{15,0.05} = 1.753$, $t_{15,0.025} = 2.131$)

9. Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ τ.δ. από την κατανομή $f_1(x;\theta) = \dfrac{2(1-x)}{(1-\theta)^2}$, $\theta \leq x \leq 1$, $\theta < 1$. Για το πρόβλημα $H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 < \theta_0)$ θεωρούμε τον έλεγχο $\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_{(1)} < c \\ 0, & \geq c \end{cases}$. Να υπολογιστεί η σταθερά c έτσι ώστε ο έλεγχος να έχει ισχύ δ, $0 < \delta < 1$. Για αυτή την τιμή του c να υπολογιστεί το μέγεθος του ελέγχου.