Εξέταση στη Μαθηματική Λογική

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Φεβρουαρίου 2016

Θέμα 1: α) Βρείτε μια απονομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές που να καθιστά ταυτόχρονα αληθείς τις προτάσεις

$$(A_1 \to (A_1 \wedge A_2)) \ \wedge \ \neg((A_1 \vee A_2) \to A_1) \quad \text{και}$$
$$(A_2 \to (A_3 \wedge A_4)) \ \wedge \ \neg A_1$$

β) Εξετάστε αν υπάρχει απονομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές που να καθιστά αληθή την πρόταση

$$(A_1 \to \neg A_2) \ \wedge \ (A_2 \to \neg A_3) \ \wedge \ \dots \ \wedge \ (A_{n-1} \to \neg A_n)$$

Λύση: α) Μια αποτίμηση v που επαληθεύει τη δεύτερη πρόταση πρέπει να δίνει $v(\neg A_1) = 1$, δηλαδή $v(A_1) = 0$. Ομως για να επαληθεύει την πρώτη πρέπει να δίνει $v(\neg((A_1 \vee A_2) \to A_1)) = 1$, δηλαδή $v((A_1 \vee A_2) \to A_1)) = 0$, επομένως $v(A_1 \vee A_2) = 1$ και τελικά $v(A_2) = 1$. Δεδομένου τώρα ότι πρέπει να είναι $v(A_2 \to (A_3 \wedge A_4)) = 1$, πρέπει $v(A_3 \wedge A_4) = 1$, που σημαίνει ότι $v(A_3) = 1$, $v(A_4) = 1$.

β) Προφανώς η απονομή $v(A_1) = v(A_2) = \ldots = v(A_n) = 0$ δίνει, για κάθε i με $1 \leq i \leq n-1$, $v(A_i \to \neg A_{i+1}) = 1$, άρα καθιστά αληθή τη δοθείσα πρόταση.

Θέμα 2: Θεωρούμε ένα σύνολο προτάσεων Γ και τις προτάσεις α, β, γ. Αποδείξτε ότι

α) Αν $\Gamma \models \alpha \to \beta$, τότε $\Gamma \models (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$

β) Αν $\Gamma \models \alpha$ και $\Gamma \models \neg\alpha$, τότε $\Gamma \models \beta$.

Λύση: α) Από δύο διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος του Χρύσιππου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Gamma \cup \{\gamma \to \alpha, \gamma\} \models \beta$$

Εστω λοιπόν ότι μία απονομή v επαληθεύει τις προτάσεις του συνόλου $\Gamma \cup \{\gamma \to \alpha, \gamma\}$. Τότε, αφού κάνει αληθείς τις προτάσεις του Γ, από την υπόθεση επαληθεύει την πρόταση $\alpha \to \beta$. Αφού επαληθεύει τις $\gamma \to \alpha$ και γ θα επαληθεύει και την α. Επομένως δίνει $v(\beta) = 1$.

β) Για να συμβαίνουν ταυτόχρονα $\Gamma \models \alpha$ και $\Gamma \models \neg\alpha$, πρέπει καμμία απονομή να μην επαληθεύει το σύνολο Γ (διαφορετικά θα είχαμε πως η ίδια απονομή αληθοτιμών επαληθεύει ταυτόχρονα μία πρόταση και την άρνησή της). Με άλλα λόγια το σύνολο Γ είναι αντιφατικό κι επομένως οποιαδήποτε πρόταση είναι συνέπειά του.

Θέμα 3: Θυμίζουμε ότι ένα σύνολο προτάσεων λέγεται ανεξάρτητο όταν καμμία πρόταση του συνόλου δεν είναι συνέπεια των υπολοίπων. Διατυπώστε αναλυτικά τι σημαίνει ότι ένα σύνολο προτάσεων Σ δεν είναι ανεξάρτητο. Πείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα προτάσεων είναι ανεξάρτητα:

$$\{A \to B, B \to C, C \to A\}, \;\; \{A \to B, B \to C, A \to C\}, \;\; \{A, B, A \to C, C \to B\}$$

Λύση: Εξαρτημένο είναι ένα σύνολο προτάσεων όταν **υπάρχει κάποια** πρόταση στο σύνολο που να είναι συνέπεια των υπολοίπων.

Το πρώτο σύνολο είναι ανεξάρτητο γιατί η $C \to A$ δεν είναι συνέπεια των άλλων δύο, αφού όταν $v(A) = 0$, $v(B) = 1$, $v(C) = 1$, οι $A \to B$, $B \to C$ γίνονται αληθείς ενώ η $C \to A$ όχι, και κυκλικά καμμία από τις άλλες δύο δεν είναι συνέπεια των υπολοίπων.

Το δεύτερο σύνολο δεν είναι ανεξάρτητο, αφού η $A \to C$ είναι προφανώς συνέπεια των άλλων δύο.

Τέλος, ούτε το τρίτο σύνολο είναι ανεξάρτητο, αφού όταν αληθεύουν οι A και $A \to C$, τότε αληθεύει και η C και επομένως, όταν αληθεύει η $C \to B$, θα αληθεύει και η B. Με άλλα λόγια η B είναι συνέπεια των υπολοίπων.

Θέμα 4: α) Σε μια γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει ένα σχεσιακό σύμβολο δυο θέσεων $\in$ (το οποίο διαβάζουμε 'ανήκει', ενώ τα στοιχεία που ονομάζουν οι μεταβλητές τα λέμε 'σύνολα') γράψτε προτάσεις που να εκφράζουν τα πααρακάτω:

(i) Υπάρχει σύνολο, το οποίο δεν περιέχει κανένα άλλο σύνολο

(ii) Για κάθε δύο σύνολα υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν ακριβώς αυτά τα δύο σύνολα

β) Γράψτε προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των παραπάνω, με τρόπο ώστε ο σύνδεσμος της άρνησης να εφαρμόζεται μόνο σε *ατομικούς τύπους*.

Λύση: α) (i) Υπάρχει σύνολο, το οποίο δεν περιέχει κανένα άλλο σύνολο:

$$\exists x \forall y \neg(y \in x)$$

(ii) Για κάθε δύο σύνολα υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν ακριβώς αυτά τα δύο σύνολα:

$$\forall x \forall y \exists z \; (x \in z \land y \in z \land \; \forall w(\; (\neg(w = x) \land (\neg(w = y))) \to \neg(w \in z) \;) \;)$$

β) Προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των παραπάνω είναι οι

(i)

$$\forall x \exists y (y \in x)$$

και

(ii)

$$\exists x \exists y \forall z \; (\neg(x \in z) \lor \neg(y \in z) \lor \; \exists w((\neg(w = x) \land (\neg(w = y))) \land (w \in z) \;) \;)$$

Θέμα 5: Θεωρούμε ένα σύνολο προτάσεων Σ και ένα σύνολο τύπων με μία ελεύθερη μεταβλητή $\{\varphi_i(x) \mid i \in I\}$, που είναι τέτοια ώστε το σύνολο

$$\Sigma \cup \{\forall x \neg \varphi_i(x) \mid i \in I\}$$

να είναι αντιφατικό. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n$ έτσι ώστε $\Sigma \models \; \exists x \varphi_1(x) \lor ... \lor \exists x \varphi_n(x)$

Λύση: Αφού το σύνολο

$$\Sigma \cup \{\forall x \neg \varphi_i(x) \mid i \in I\}$$

είναι αντιφατικό, το Θεώρημα του Συμπαγούς μας εξασφαλίζει ότι ένα πεπερασμένο υποσύνολό του θα είναι αντιφατικό. Αυτό το πεπερασμένο υποσύνολο θα περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $\sigma_1, \dots \sigma_m$ του Σ και πεπερασμένο πλήθος προτάσεων $\forall x \neg \varphi_1(x), \dots \forall x \neg \varphi_n(x)$. Μια δομή που επαληθεύει τις προτάσεις του συνόλου Σ θα επαληθεύει, ειδικότερα, τις προτάσεις $\sigma_1, \dots \sigma_m$. Τότε όμως δε μπορεί να επαληθεύει όλες τις προτάσεις $\forall x \neg \varphi_1(x), \dots \forall x \neg \varphi_n(x)$ (αλλιώς το πεπερασμένο υποσύνολο δε θα ήταν αντιφατικό). Αρα επαληθεύει μία από τις αρνήσεις τους, που είναι ισοδύναμες με τις $\exists x \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots n$, κι επομένως επαληθεύει τη διάζευξη

$$\exists x \varphi_1(x) \vee ... \vee \exists x \varphi_n(x).$$