Λύσεις Θεμάτων στην Πραγματική Ανάλυση ΙΙΙ

Τμήμα Μαθηματικών

3 Φεβρουαρίου 2016

Θέμα 1: α) Δίνεται η διαφορίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι, για κάθε $t,\ x,\ y \in \mathbb{R}$, $f(tx, ty) = tf(x, y)$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, είναι

$$f(v_1, v_2) = \overrightarrow{\nabla f}(0,0) \cdot \vec{v}$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) + y^2, & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ y^2, & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$ και εξετάστε αν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

Λύση: α) Παρατηρούμε πρώτα ότι $f(0, 0) = f(t0, t0) = tf(0, 0)$, για κάθε πραγματικό αριθμό t, άρα $f(0, 0) = 0$. Η συνθήκη της διαφορισιμότητας της f στη θέση $(0, 0)$ δίνει ότι, για οποιοδήποτε ζευγάρι πραγματικών αριθμών $(v_1, v_2)(= \vec{v})$ είναι

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0) - f_x(0,0)tv_1 - f_y(0,0)tv_2}{\sqrt{t^2v_1^2 + t^2v_2^2}} = 0$$

Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το όριο, του t τείνοντος στο 0 από θετικές τιμές, είναι ίσο με μηδέν, που σημαίνει ότι (λαμβάνοντας υπ' όψη και την υπόθεσή μας)

$$\lim_{t\to 0} \frac{tf(v_1, v_2) - f_x(0,0)tv_1 - f_y(0,0)tv_2}{t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{f(v_1, v_2) - f_x(0,0)v_1 - f_y(0,0)v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0$$

και αυτό φυσικά μπορεί να συμβεί μόνο αν

$$f(v_1, v_2) = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2 = \overrightarrow{\nabla f}(0,0) \cdot \vec{v}$$

(Αρκετοί απαντούν αυτό το ερώτημα κάνοντας την παρατήρηση ότι, υπό τη συνθήκη της διαφορισιμότητας, το δεξιό μέλος της προς απόδειξη ισότητας είναι η παράγωγος της f στο $(0, 0)$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{v}$ και συγκρίνουν το δεξιό μέλος με τον ορισμό της κατά κατεύθυνση παραγώγου

$$D_{\vec{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tf(v_1, v_2)}{t} = f(v_1, v_2)$$

Αυστηρά μιλώντας κάτι τέτοιο θα είχε νόημα μόνο αν το διάνυσμα $\vec{v}$ ήταν μοναδιαίο. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε αντί αυτού το μοναδιαίο $\vec{u} = (u_1, u_2) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, οπότε θα είχαμε

$$\overrightarrow{\nabla f}(0,0) \cdot \vec{u} = D_{\vec{u}}f(0,0) = f(u_1, u_2) = f(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}) = \frac{1}{|\vec{v}|} f(v_1, v_2),$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. Παραταύτα, βαθμολογικά δε στάθηκα σε αυτήν τη λεπτομέρεια.)

β) Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους της f στη θέση $(0,0)$. Είναι

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$$

(ως όριο γινομένου μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένης)

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{k} = 0$$

Ελέγχουμε, με βάση τον ορισμό της διαφορισιμότητας, το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \sin(\frac{1}{x}) + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Επειδή $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ βλέπουμε ότι η ποσότητα της οποίας το όριο αναζητούμε γίνεται

$$0 \leq |\frac{x^3 \sin(\frac{1}{x}) + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq |\frac{x^3 \sin(\frac{1}{x}|)}{\sqrt{x^2+y^2}}| + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Το ζητούμενο όριο είναι λοιπόν μηδέν, άρα η δοθείσα συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Θέμα 2: Εστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Θεωρούμε την $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(u,v) = f(au+bv, cu+dv)$ όπου a, b, c, d είναι πραγματικές σταθερές. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (ad+bc)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + cd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Λύση: Εχουμε να παραγωγίσουμε τη σύνθετη συνάρτηση $g = f \circ (x,y)$, όπου $x = au+bv$, $y = cu+dv$, πρώτα ως προς u. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = a\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y}$$

Παραγωγίζουμε το αποτέλεσμα ως προς v, εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα της αλυσίδας, επί της συνάρτησης που βρήκαμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial g}{\partial u}) \\
&= \frac{\partial}{\partial v}(a\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y}) \\
&= a\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial x}) + c\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial y}) \\
&= a(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial v}) + c(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\frac{\partial y}{\partial v}) \\
&= ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + ad\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + bc\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + cd\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \\
&= ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (ad+bc)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + cd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την εναλλαγή των μικτών δεύτερων παραγώγων που προκύπτει από την υπόθεση περί συνεχών μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης.

Θέμα 3: Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει $x^2+y^2=1$, αποδείξτε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b είναι

$$|ax+by| \leq (a^2+b^2)^{1/2}$$

Λύση: Υπολογίζουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=ax+by$, υπό τη συνθήκη $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange αναζητούμε λ ώστε $\overrightarrow{\nabla f}=\lambda\overrightarrow{\nabla g}$, δηλαδή $(a,b)=\lambda(2x,2y)$. Τέτοια x, y πρέπει να επαληθεύουν την $x^2+y^2-1=0$, δηλαδή $(\frac{a}{2\lambda})^2+(\frac{b}{2\lambda})^2=1$, επομένως $\lambda=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Τα κρίσιμα σημεία είναι λοιπόν τα $(x,y)=(\frac{a}{2\lambda},\frac{b}{2\lambda})=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ και $(x,y)=(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$. Είναι προφανές ότι το πρώτο είναι σημείο μεγίστου και το δεύτερο ελαχίστου, απ΄ όπου παίρνουμε ότι

$$-a\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-b\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq ax+by \leq a\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+b\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Πολλοί από σας έδωσαν ορθές αποδείξεις με στοιχειώδη μέσα, οι οποίες φυσικά βαθμολογήθηκαν ως ορθές.

Θέμα 4: Δίνεται μια συνάρτηση $f=(f_1,f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Αν οι f_1, f_2 έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και στο σημείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ είναι

$$J(x_0,y_0)=(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x})(x_0,y_0)\neq 0,$$

να εξηγείστε γιατί ορίζονται σε κάποια γειτονιά V του $f(x_0,y_0)$ συναρτήσεις g_1, $g_2\colon V\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε, για κάθε $(u,v)\in V$, είναι

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Λύση: Μας δίνεται ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα στη θέση (x_0,y_0) είναι διάφορη του μηδενός, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι τοπικά αντιστρέψιμη (από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης). Δηλαδή σε κάποια περιοχή V του $f(x_0,y_0)$ ορίζεται μία συνάρτηση

$$g=(g_1,g_2)\colon V\to\mathbb{R}^2$$

τέτοια ώστε $g\circ f=id$. Το τελευταίο όμως σημαίνει ότι για κάθε (x,y) που είναι τέτοιο ώστε $f(x,y)\in V$, έχουμε

$$g_1(f_1(x,y),f_2(x,y))=x \qquad \text{και} \qquad g_2(f_1(x,y),f_2(x,y))=y$$

Παραγωγίζοντας αυτές τις σχέσεις (με χρήση του κανόνα αλυσίδας και γράφοντας τις μεταβλητές των g_1, g_2 ως u και v) ως προς x βρίσκουμε

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x}=1 \qquad\qquad \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x}=0$$

ενώ παραγωγίζοντας ως προς y βρίσκουμε

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y}=0 \qquad\qquad \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y}=1$$

Επιλύοντας το σύστημα της πρώτης και της τρίτης από τις παραπάνω εξισώσεις ως προς τον άγνωστο $\frac{\partial g_1}{\partial u}$ παίρνουμε (παρατηρούμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών αυτού του $2\times 2-$

συστήματος είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα της f στη θέση (x, y), η οποία παραμένει μη-μηδενική λόγω της συνέχειας των μερικών παραγώγων της f)

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

Επιλύοντας το σύστημα της δεύτερης και της τέταρτης από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την $\frac{\partial g_2}{\partial u}$.

Θέμα 5: α) Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 \arctan y + ye^{xy} + y^2)\vec{i} + (\frac{x^3}{1+y^2} + xe^{xy} + x^2 y)\vec{j} \quad (+0\vec{k})$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\vec{F} = \mathrm{grad} f$.

β) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι επιφάνειες (δηλαδή τα διανύσματα που είναι κάθετα σε αυτές) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ και $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 3 = 0$ στο σημείο $(2, -1, 2)$.

Λύση: α) Εφόσον ισχύει ότι $\mathrm{rotgrad} f = \vec{0}$, για να υπάρχει τέτοια συνάρτηση πρέπει $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$. Ομως ο στροβιλισμός της $\vec{F}$ είναι

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x^2 \arctan y + ye^{xy} + y^2 & \frac{x^3}{1+y^2} + xe^{xy} + x^2 y & 0 \end{vmatrix}$$

Είναι προφανές ότι οι δύο πρώτες συνιστώσες του είναι μηδέν, οπότε υπολογίζουμε την τρίτη:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 \arctan y + ye^{xy} + y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^3}{1+y^2} + xe^{xy} + x^2 y) &= \\ 3x^2 \frac{1}{1+y^2} + e^{xy} + yxe^{xy} + 2y - \frac{3x^2}{1+y^2} - e^{xy} - xye^{xy} - 2xy &= \\ 2y - 2xy & \end{aligned}$$

Αφού η ποσότητα αυτή δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

β) Τα κάθετα διανύσματα στις δοθείοες επιφάνειες είναι, αντίστοιχα, $\vec{u} = \overrightarrow{\nabla f}(2, -1, 2) = (2x, 2y, 2z)|_{(2,-1,2)} = (4, -2, 4)$ και $\vec{v} = \overrightarrow{\nabla g}_{(2,-1,2)} = (2x, 2y, -1)|(2, -1, 2) = (4, -2, -1)$. Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα δίνεται ως

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{16 + 4 - 4}{\sqrt{16 + 4 + 16}\sqrt{16 + 4 + 1}} = \frac{8}{3\sqrt{21}}$$