ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 27-1-16

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. **(α)** Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Ορίστε το τρίεδρο Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$, την καμπυλότητα $\kappa(s)$ και τη στρέψη $\tau(s)$ της γ. Στη συνέχεια, δείξτε ότι $\dot{B}(s) = -\tau(s)N(s)$. **[10]**

(β) Δίνεται η καμπύλη $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in (-1, 1)$. Αφού κάνετε αναπαραμέτρηση της γ κατά μήκος τόξου, βρείτε το τρίεδρο Frenet αυτής, την καμπυλότητα και τη στρέψη της. **[10]**

2. **(α)** Δώστε τον ορισμό της λείας απεικόνισης $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to M$ από ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^3$ σε μια κανονική επιφάνεια M και τον ορισμό της λείας απεικόνισης $f : M \to \mathbb{R}^m$, από μια κανονική επιφάνεια M σε έναν Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^m$. **[10]**

(β) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = -(x, y, z)$ είναι λεία. **[10]**

3. Δίνεται η ελικοειδής επιφάνεια M με παραμέτρηση

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(α) Αποδείξτε ότι η X είναι μια κανονική παραμέτρηση της M. **[5]**

(β) Αποδείξτε ότι η M είναι μια ευθειογενής επιφάνεια , δηλαδή επιδέχεται μια παραμέτρηση της μορφής $X(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$, όπου $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη και $\delta(u)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. **[5]**

(γ) Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα της M σε ένα τυχαίο σημείο αυτής. **[20]**

4. **(α)** Έστω M μια κανονική επιφάνεια και έστω $S_p : T_pM \to T_pM$ ο τελεστής σχήματος σε ένα σημείο $p \in M$. Αν W_1, W_2 είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε ότι

$$S_p(W_1) \times S_p(W_2) = K(p)(W_1 \times W_2),$$

όπου $K(p)$ η καμπυλότητα Gauss στο σημείο p. **[15]**

(β) Έστω M μια κανονική επιφάνεια και έστω $W_1, W_2 \in T_pM$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε $S_p(W_1) = 4W_1 - W_2, S_p(W_2) = 3W_1$. Βρείτε τις κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο p. **[15]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!