

1, 2, 3, 6. Έχουν λυθεί στην τάξη.

$$5. P(X > c) = 2P(X \leq c) \Leftrightarrow 1 - P(X \leq c) = 2P(X \leq c) \Leftrightarrow 3P(X \leq c) = 1 \Leftrightarrow P(X \leq c) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{c - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{c - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{3},$$

όπου $Z \sim N(0, 1) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{c - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow c = \mu + \sigma \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Φ αντιστρέψιμη, ως γνησίως αύξουσα (και βωεχνής)

7. $X =$ διάρκεια ζωής, $X \sim E(\lambda)$ και $E(X) = \mu$. Άρα $\frac{1}{\lambda} = \mu$, δηλαδή $\lambda = \frac{1}{\mu}$, οπότε η πυκνότητα της X είναι $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$, $x \geq 0$.
 Ορίζουμε $Y =$ ο αριθμός των μονάδων (μεταξύ των n) που έχουν πάει βλάβη.
 Τότε $Y \sim B(n, p)$ (διωνομική) με $p = P(\text{"Επιτυχία"}) = P(\text{βλάβη}) = P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-t/\mu}$. Η αμοιβή του τεχνικού είναι (σε έναν τυχαίο έλεγχο) $W = \begin{cases} \beta, & \text{αν } Y = 0 \\ \alpha Y, & \text{αν } Y = 1, 2, \dots, n \end{cases}$

και ζητάμε $E(W) = \sum_w w P(W=w) = \beta \cdot P(W=\beta) + \alpha \cdot P(W=\alpha) + 2\alpha P(W=2\alpha) + \dots + n\alpha P(W=n\alpha) = \beta \cdot P(Y=0) + \alpha P(Y=1) + 2\alpha P(Y=2) + \dots + n\alpha P(Y=n) = \beta \cdot P(Y=0) + \alpha \sum_{y=1}^n y P(Y=y) = \beta \cdot P(Y=0) + \alpha \cdot E(Y) = \beta \cdot P(Y=0) + \alpha(np) = \beta \cdot (1-p)^n + n\alpha p$ (όπου $p = 1 - e^{-t/\mu}$).

8. (Δεν υπάρχει στο φυλλάδιο Ασκήσεις 3333) Η τ.μ. έχει πυκνότητα $f(x) = \alpha x + \beta$, $0 \leq x \leq 1$ και $f(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Δίνεται ακόμη ότι $P(X > 1/2) = 1/3$. (α) Να δείχθει ότι $\alpha = -4/3$ και $\beta = 5/3$. (β) Να υπολογιστεί $P(X > 3/4 | X > 1/4)$.

Λύση. (α) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ και $\int_{1/2}^{\infty} f(x) dx = 1/3$ (Η τ.μ. είναι βωεχνής).
 Επομένως, $\int_0^1 (\alpha x + \beta) dx = 1$, $\int_{1/2}^1 (\alpha x + \beta) dx = 1/3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \beta = 1$, $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{4}{3}$, $\beta = \frac{5}{3}$. (Επί πλέον, με αυτήν την επιλογή των α, β ικανοποιείται και η βωδίκη $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.)

(β) $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $0 \leq x \leq 1$. $P(X > 3/4 | X > 1/4) = \frac{P(X > 3/4, X > 1/4)}{P(X > 1/4)} = \frac{P(X > 3/4)}{P(X > 1/4)} = \frac{\int_{3/4}^1 (-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}) dx}{\int_{1/4}^1 (-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}) dx} = \dots$