Θεωρία Πιθανοτήτων Ι - Λύσεις Ασκήσεων 333

1. (i) $1-e^{-\lambda t}=0.25 \iff e^{-\lambda t}=0.75 \iff t=-\frac{1}{\lambda}\ln 0.75$. Όμοια οι (ii) και (iii).

2. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0,\ E(X)=\frac{1}{\lambda} \iff 2=\frac{1}{\lambda} \iff \lambda=\frac{1}{2}$ (λεπτά)

(α) $P(X>2)=\int_2^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-2\lambda}=e^{-2\cdot\frac{1}{2}}=e^{-1}$.

(β) $P(X>2|X\geq 1) \underset{\uparrow}{=} P(X>1)=\int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda\cdot 1}=e^{-\frac{1}{2}}$.
ιδιότητα έλλειψης μνήμης

(γ) Συνδυασμός συνεχούς κατανομής και διακριτής κατανομής. Ορίζουμε "Επιτυχία" (Ε) = διάρκεια μιας κλήσης περισσότερο από 2 λεπτά, και Y = ο αριθμός των κλήσεων (μεταξύ των 5) με διάρκεια > 2 λεπτών. Έχουμε $Y\sim B(n=5,p)$ (διωνυμική) με $p=P(\text{"Επιτυχία"})=P(X>2)=e^{-1}$ και ζητάμε $P(Y\leq 2)=\sum_{y=0}^{2}P(Y=y)=\sum_{y=0}^{2}\binom{5}{y}p^y(1-p)^{5-y}$.

3. $P(X\geq 0.01)=\frac{1}{2} \iff \int_{0.01}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2} \iff e^{-\lambda * 0.01}=\frac{1}{2} \iff \lambda=\frac{\ln 2}{0.01}\approx 69.31$

$P(X\geq t)=0.9 \iff \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=0.9 \iff e^{-\lambda t}=0.9 \iff t=-\frac{\ln 0.9}{\lambda}=-100\cdot\frac{\ln 0.9}{\ln 2}$

4. Η τ.μ. X έχει πυκνότητα $f_X(x)=1,\ 0<x<1$ και σύνολο τιμών το $(0,1)$. Άρα, η τ.μ. Y έχει σύνολο τιμών το $(0,\infty)$. Για $y\in(0,\infty)$ βρίσκουμε (πρώτα) την συνάρτηση κατανομής της Y. Έχουμε $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)\leq y)=P(X\leq 1-e^{-\lambda y})=\int_0^{1-e^{-\lambda y}}f_X(x)dx=\int_0^{1-e^{-\lambda y}}1\,dx=1-e^{-\lambda y}$. Συνεπώς $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leq 0\\ 1-e^{-\lambda y}, & y>0\end{cases}$ που είναι η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{E}(\lambda)$, δηλαδή $Y\sim\mathcal{E}(\lambda)$.

5. Έχει λυθεί στην τάξη. (συνδυασμός συνεχούς κατανομής με διακριτή κατανομή)

6. Ορίζουμε X = ο χρόνος επισκευής (σε λεπτά), άρα η πυκνότητα της X είναι $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0$ και $E(X)=\frac{1}{\lambda}$. Δίνεται ότι $\mu=E(X)=20 \iff \lambda=\frac{1}{20}$.

(α) $P(X<10)=\int_0^{10}f(x)dx=\int_0^{10}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda\cdot 10}=1-e^{-\frac{1}{2}}$.

(β) Η επισκευή θα στοιχίσει 60 Ε $\iff 30<X\leq 60$ (η πρώτη μισή ώρα στοιχίζει 30 Ε και ο υπολειπόμενος χρόνος θα χρεωθεί επίσης (άλλα) 30 Ε). Ζητάμε λοιπόν $P(30<X\leq 60)=\int_{30}^{60}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda\cdot 30}-e^{-\lambda\cdot 60}=e^{-3/2}-e^{-2}$.

(γ) $P(X>t)=0.01 \iff \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=0.01 \iff e^{-\lambda t}=0.01 \iff t=-\frac{1}{\lambda}\ln 0.01=$
$=-20\ln 0.01\simeq -20*(-4.6)\simeq 92$ (λεπτά).