

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (2^ο φυλλάδιο ασκήσεων)

(Παρακαλώ, όποιοι/ες επιθυμεί μπορεί να παραδώσει τις ασκήσεις λυμένες στους διδάσκοντες έως **3/12/2015**)

(I) Να βρεθεί η λύση των ΣΔΕ, αν $p = y'$:

1) $y = px + p^2$, **2)** $2x^2 p^2 + 5xyp + 2y^2 = 0$, **3)** $y = 2px + p^2$.

(II) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των κάτωθι οικογενειών καμπυλών (c είναι αυθαίρετη σταθερά):

4) $y^2 = ce^x + x + 1$, **5)** $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c^2$, **6)** $y = ce^x$

Επίσης, να γίνει η γραφική παράσταση των ορθογωνίων τροχιών, για μία συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς.

(III) Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα:

7) Ο πληθυσμός μιας κοινότητας διπλασιάζεται σε 50 χρόνια. Σε πόσα χρόνια θα τριπλασιαστεί, δεδομένου ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος του υπάρχοντος πληθυσμού κάθε χρονική στιγμή.

8) Να βρεθεί καμπύλη στο 1^ο τεταρτημόριο του επιπέδου Oxy , η οποία περνά από τα σημεία $(3, 2)$ και $(2, \sqrt{6})$ και έχει την εξής ιδιότητα: η εφαπτομένη της καμπύλης στο τυχαίο σημείο $M(x, y)$ αυτής τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία

A και B αντίστοιχα και ο λόγος των μηκών $\frac{MA}{MB}$ να είναι σταθερός.

(IV) Για κάθε ένα από τα κάτωθι Π.Α.Τ. **(α)** να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης (θεώρημα του Picard) και **(β)** εάν ισχύει, να υπολογίσετε την τρίτη προσέγγιση $y_2(x)$ της λύσης:

9) $y' = 2 + 3x + y$, $y(1) = 3$,

10) $y' = y^{1/2}$, $y(1) = 1$,

11) $y' = 3x + y^2$, $y(0) = 2$.