Πραγματική Ανάλυση 1, Σάμαρης Ν.

Ιούνιος 2014

1. (2.8) (α) Διατυπώστε το θεώρημα μεγίστης -ελαχίστης τιμής και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα.

(β) Αν $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ (Δ διαστημα) και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ αποδείξτε ότι $f(s)f(t) > 0$ για κάθε $s, t \in \Delta$.

(γ) Αν μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι μη σταθερή και συνεχής σε αυτό αποδείξτε ότι το σύνολο των τιμών της είναι κλειστό διάστημα.

(δ) Εξηγείστε γιατί υπάρχει άπειρο πλήθος συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) = x^2 e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια βρείτε όλες τις συνεχείς και να τις μελετήσετε ως προς την παράγωγο στο μηδέν.

2. (2.7) (α) Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα μέσης τιμής. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα έχει παράγωγο μηδέν σε όλα τα σημεία του διαστήματος είναι σταθερή.

(β) Αν $f : [0, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = f(8) = 0$ να αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ διάφορα ανά δύο μεταξύ τους ώστε $f'(x_1) + 3f'(x_2) + 4f'(x_3) = 0$.

3. (3.5) (α) Αν $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}$, ορίζουμε την συνάρτηση $d_{(a,b)}$ με $d_{(a,b)}(x) = a$ όταν x ρητός $d_{(a,b)}(x) = b$ όταν x άρρητος. Αποδείξτε ότι η παραπάνω συνάρτηση δεν έχει πουθενά όριο.

(β) Αν $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, g φραγμένη και $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

(γ) Αν $f(x) = x^2$ όταν x ρητός και $f(x) = -x^2$ όταν x άρρητος μελετείστε ως προς την συνέχεια και την παράγωγο στο $\mathbb{R}$ την συνάρτηση f.

Προαιρετική υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι $f(x) = x^2 d_{(1,-1)}(x)$.

4. (3.5) (α) Για μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που έχει όριο τον αριθμό τρία θεωρούμε τα σύνολα

$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 4\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : 1 < a_n < 5\}$ και για μια ακολουθια $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δεν έχει όριο τον αριθμό τρία θεωρούμε το σύνολο $B_1 = \{n \in \mathbb{N} : |b_n - 3| > 0\}$. Απαντείστε αιτιολογημένα για κάθε σύνολο ξεχωριστά αν έχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος στοιχείων.

(β) Μελετείστε ως προς το όριο την αναδρομική ακολουθία $a_0 = 1$, $a_n = \sqrt{7a_{n-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$

(γ) Μελετείστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(Διατυπώστε λεπτομερώς τα κριτήρια που θα χρησιμοποιήσετε).

Προάγεστε με τουλάχιστον πέντε μονάδες -Καλή Επιτυχία .