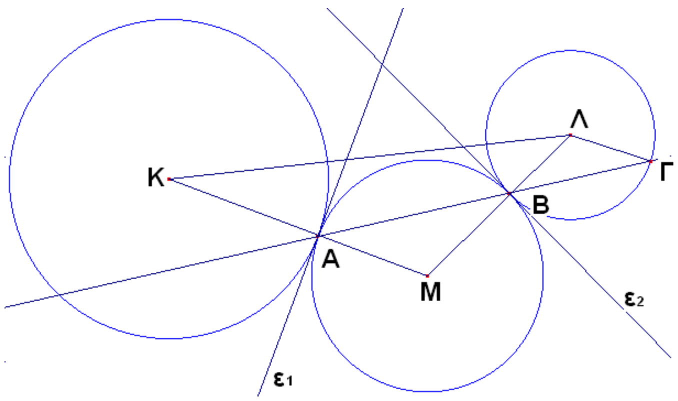
**Τομέας Παιδαγωγικής
Ιστορίας, και Φιλοσοφίας
των Μαθηματικών**

«Η Ευκλείδεια γεωμετρία και η διδασκαλία της»
Εξέταση 10-09-2015

ΘΕΜΑ 1 [2]

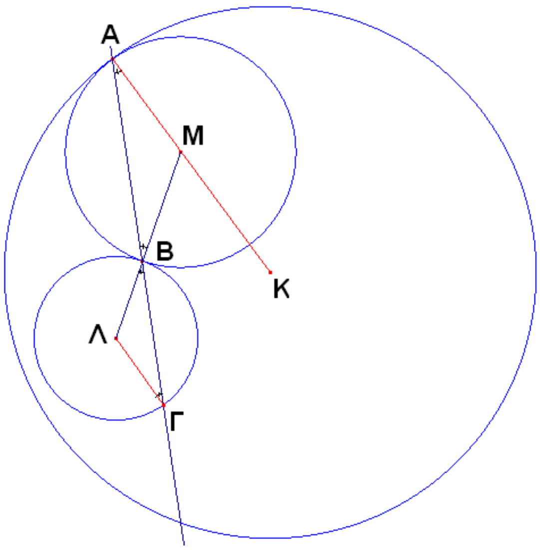
Δίδονται δύο τυχαίοι, μη τεμνόμενοι μεταξύ τους, κύκλοι οι Κ, Λ και ένας τρίτος ο Μ που εφάπτεται στους άλλους δύο στα Α και Β αντίστοιχα. Εάν η ΑΒ τέμνει τον Λ στο Γ, δείξτε ότι ΚΑ//ΛΓ.

Υπάρχουν δύο δυνατότητες. Οι κύκλοι να είναι ο ένας εκτός του άλλου (i), ή να είναι εντός (ii).



i) Έστω Κ και Λ οι δύο δοσμένοι κύκλοι, με τον Λ εκτός του Κ, και ο Μ που εφάπτεται μαζί τους στα Α και Β, με τη ΑΒ να τέμνει το Λ στο Γ. Πρέπει να δείξουμε ότι ΚΑ//ΛΓ.

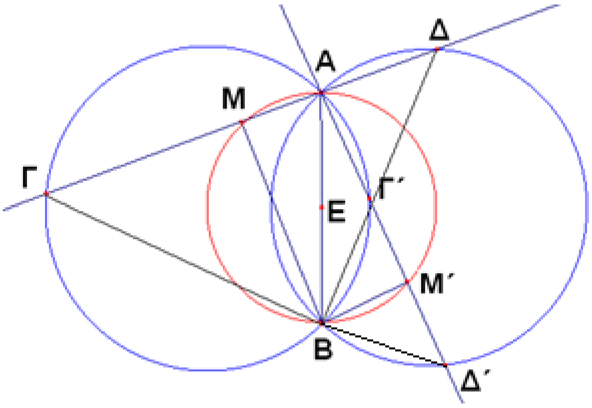
Ξέρουμε ότι η διάκεντρος σε δύο τεμνόμενους κύκλους διέρχεται από το σημείο επαφής. (αν δεν το θυμόμαστε φαίνεται εύκολα αν φέρουμε τις κοινές εφαπτόμενες) Άρα η ΚΑΜ και η ΜΒΛ είναι ευθείες(*). Επειδή ΜΑ=ΜΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές. Για τον ίδιο λόγο και το ΒΛΜ είναι ισοσκελές. Και αφού οι παρά την βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, έχουμε: ∠ΜΑΒ=∠ΜΒΑ και ∠ΛΓΒ=∠ΛΒΓ. Αλλά ∠ΜΒΑ=∠ΓΒΛ ως κατακορυφήν από (*). Οπότε ∠ΜΑΒ=∠ΒΓΛ. Όμως αυτέ είναι εντός εναλλάξ των ΛΓ και ΚΑ που τέμνονται από την ΑΓ. Το οποίο ήταν το προς απόδειξη ζητούμενο.



ii) Η δεύτερη περίπτωση έχει την ίδια απόδειξη.

ΘΕΜΑ 2 [2]

Δίδονται δύο ίσοι κύκλοι οι οποίοι τέμνονται στα Α και Β. Φέρνουμε από το Α μια μεταβλητή τέμνουσα τους δύο κύκλους στα Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της ΓΔ όταν η μεταβλητή τέμνουσα περιστρέφεται γύρω από το Α.

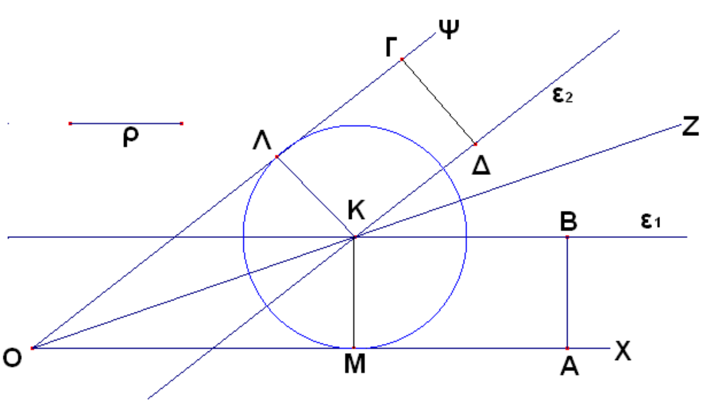


Έστω οι δοσμένοι ίσοι μεταξύ τους κύκλοι τεμνόμενοι στα Α και Β, και η διερχόμενη από το Α ευθεία του τέμνει στα Γ και Δ. Έστω Μ το μέσον της ΓΔ. Φέρνουμε τις ΒΔ και ΒΓ και βλέπουμε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές διότι ∠ΒΓΔ=∠ΒΔΓ καθότι είναι εγγεγραμμένες σε ίσους κύκλους και βαίνουν σε ίσα τόξα, με χορδή την ΑΒ. Άρα η ΒΜ, που είναι διάμεσος είναι και ύψος. Δηλαδή η γωνία ΒΜΑ είναι ορθή, που σημαίνει ότι το σημείο Μ βλέπει την ΑΒ υπό ορθή γωνία. Άρα βρίσκεται πάνω σε κύκλο με κέντρο το μέσον Ε της ΑΒ και ακτίνα ΑΒ/2. Ο κύκλος αυτός είναι ο ζητούμενος Γεωμετρικός Τόπος.

Πράγματι, (αντίστροφο) έστω Μ΄ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου αυτού. Πρέπει να δείξουμε ότι το Μ΄ είναι μέσον ενός ευθυγράμμου τμήματος, που είναι τμήμα μιας ευθείας που διέρχεται από το Α και το οποίο αποκόπτεται από τους δύο δοθέντες κύκλους. Φέρνουμε την Μ΄Ά και έστω Γ΄ και Δ΄ τα σημεία στα οποία τέμνει αντίστοιχα του δύο κύκλους. Πρέπει να αποδείξουμε ότι Μ΄Γ΄=Μ΄Δ΄, Ενώνουμε τα Γ΄και Δ΄ με το Β. Αφού το Μ΄ είναι σημείο του τόπου άρα η ΒΜ΄Γ΄ είναι ορθή, δηλαδή ΒΜ΄ είναι ύψος στο ΒΔ'Γ'. Επίσης το ΒΔ΄Γ΄ είναι ισοσκελές διότι ∠ΒΔ΄Γ΄=∠ΒΓ΄Δ΄, καθότι η ∠ΒΔ΄Γ΄και η ∠ΒΓΆ είναι παραπληρωματικές ως εγγεγραμμένες σε ίσους κύκλους και βαίνουν σε παραπληρωματικά τόξα. Αφού λοιπόν η ΒΜ΄ είναι ύψος σε ισοσκελές τρίγωνο άρα είναι και διάμεσος και το Μ΄ είναι μέσον του Γ΄Δ΄.

ΘΕΜΑ 3 [2]

Να κατασκευαστεί κύκλος **δεδομένης** ακτίνας, ο οποίος να εφάπτεται στις πλευρές **δεδομένης** γωνίας.



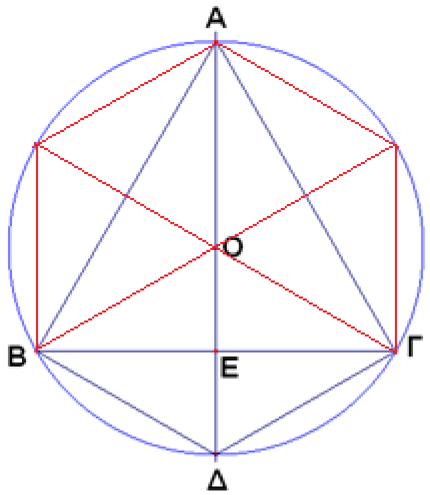
Ανάλυση**:** έστω ότι ο κύκλος έχει κατασκευαστεί. Αφού εφάπτεται στις πλευρές της γωνία το κέντρο του ισαπέχει από τις πλευρές της γωνία. Δηλαδή βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της γωνίας. Επίσης αφού απέχει σταθερή απόσταση ρ από τις πλευρές, άρα βρίσκεται πάνω σε μια παράλληλο προς την κάθε πλευρά που απέχει ρ από την πλευρά.

Σύνθεση: Έστω η γωνία ΧΟΨ και ένα ευθύγραμμο τμήμα ρ. Φέρνω την διχοτόμο της γωνίας και κατασκευάζω και μια παράλληλο, την ε_1 προς την πλευρά ΟΧ, που να απέχει ρ από αυτήν. Η τομή των δύο ευθειών είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

(ή: κατασκευάζω τις δύο παράλληλες προς τις πλευρές της γωνία ευθείες και σε απόσταση ρ από αυτές. Η τομή τους είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου)

ΘΕΜΑ 4 [2]

Σε δοθέντα κύκλο ακτίνας ρ να εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο και να υπολογιστεί η πλευρά του και το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου.



i) Έστω κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ, και έστω ότι έχει εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο το ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος ΑΕ, το οποία θα περάσει από το κέντρο Ο, ως κάθετο στη χορδή ΒΓ, και θα διχοτομήσει τη $\angle$ΒΑΓ. Άρα $\angle$ΔΑΓ=30^o οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, ΔΓ=ΟΔ/2=ρ. Φέρνοντας και τα άλλα δύο ύψη, βλέπουμε ότι ορίζονται οι κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου. Το ισόπλευρο τρίγωνο λοιπόν το εγγεγραμμένο σε δοσμένο κύκλο, κατασκευάζεται με τη βοήθεια του κανονικού εξαγώνου.

ii) Με εφαρμογή του Πυθ. Θεωρ. Στο τρίγωνο ΔΕΓ(ΔΕ=ρ/2) (ή στο ΑΕΓ) έχουμε την πλευρά είναι ρ$\sqrt{3}$, και το εμβαδόν $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ρ^2

ΘΕΜΑ 5 [2]

Δίδεται ένα επίπεδο, το π, και ένα σημείο πάνω σ' αυτό, το Α. Να κατασκευαστεί ευθεία διερχόμενη από το Α η οποία να είναι κάθετος στο π.

Βλέπε: *« Έλασσον γεωμετρικόν»* Κατασκευή 8.5.2, σελ 381

Οποιαδήποτε άλλη διαφορετική λύση, ή απόδειξη, θα αξιολογηθεί ως ορθή αν είναι τέτοια.