Λύσεις Θεμάτων στη Μαθηματική Λογική

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1: α) Εξετάστε αν είναι ισοδύναμα τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων: $(A \lor B) \land (\neg A \to \neg B)$ και B, καθώς και $((A \to B) \to B) \to B$ και $A \to B$.

β) Βρείτε μια απονομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές A, B, C που να καθιστά ταυτόχρονα αληθείς τις προτάσεις

$$(A \to \neg B) \lor \neg(C \land B) \qquad \text{και} \qquad (\neg A \lor \neg B) \to (A \lor \neg C)$$

Λύση: α) Η πρώτη πρόταση γίνεται διαδοχικά ισοδύναμη με

$$(A \lor B) \land (\neg A \to \neg B) \equiv (A \lor B) \land (\neg\neg A \lor \neg B) \equiv (A \lor B) \land (A \lor \neg B) \equiv A \land (B \lor \neg B) \equiv A,$$

δηλαδή είναι ισοδύναμη με την A που φυσικά δε μπορεί να είναι ισοδύναμη με τη B.

Για το άλλο ζευγάρι, η $((A \to B) \to B) \to B$ γίνεται ψευδής ακριβώς όταν η $(A \to B) \to B$ γίνεται αληθής και η B ψευδής. Αλλά η $(A \to B) \to B$ γίνεται αληθής, με δεδομένο ότι η B είναι ψευδής, ακριβώς όταν η $A \to B$ είναι ψευδής. Δηλαδή οι δύο προτάσεις γίνονται ψευδείς ακριβώς στις ίδιες περιπτώσεις, άρα είναι ισοδύναμες.

β) Η $(\neg A \lor \neg B) \to (A \lor \neg C)$ μπορεί να γίνει αληθής όταν η $A \lor \neg C$ γίνεται αληθής κι αυτή με τη σειρά της όταν η C γίνεται ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση η $\neg(C \land B)$ γίνεται αληθής, οπότε και η $(A \to \neg B) \lor \neg(C \land B)$ γίνεται αληθής. Άρα οποιαδήποτε απονομή αληθοτιμών κάνει ψευδή τη C επαληθεύει και τις δύο δοθείσες προτάσεις.

Θέμα 2: α) Αποδείξτε ότι

$$\{\ A \lor B, B \to (C \land D), (A \lor C) \to E\ \} \models E$$

β) Γράψτε μία πρόταση σε τρεις προτασιακές μεταβλητές που να μην αληθεύει όταν περισσότερες από μία μεταβλητές αληθεύουν. Εξηγείστε γιατί η πρόταση που γράψατε πληροί την απαίτηση που θέτουμε.

Λύση: α) Θεωρούμε μία απονομή αληθοτιμών v η οποία κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις του συνόλου $\{\ A \lor B, B \to (C \land D), (A \lor C) \to E\ \}$. Ειδικώτερα έχουμε $v(A \lor B) = 1$, οπότε μπορεί ναι είναι $v(A) = 1$ ή $v(B) = 1$. Στην πρώτη περίπτωση θα είναι και $v(A \lor C) = 1$, οπότε αφού έχουμε υποθέσει ότι $v((A \lor C) \to E) = 1$, συμπεραίνουμε ότι $v(E) = 1$. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι, αφού έχουμε δεχτεί ότι $v(B \to (C \land D)) = 1$, θα πρέπει να είναι και $v(C \land D)) = 1$, που σημαίνει ότι και $v(C) = 1$. Από αυτό όμως έπεται πάλι ότι $v(A \lor C) = 1$ οπότε, όπως και παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι $v(E) = 1$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν μία απονομή αληθοτιμών v η οποία κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις του δοσμένου συνόλου υποθέσεων κάνει αληθή και την E, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

β) Αν θεωρήσουμε τρεις προτασιακές μεταβλητές A, B, C, μία πρόταση που τις περιέχει, για να μην αληθεύει όταν περισσότερες από μια μεταβλητές αληθεύουν, σημαίνει ότι αληθεύει όταν μία από αυτές ή καμμία από αυτές αληθεύουν. Επομένως οδηγούμαστε σ' ένα ερώτημα εύρεσης διαζευκτικής κανονικής μορφής. Οι πρόταση $\neg A \land \neg B \land \neg C$ αληθεύει όταν καμμία από τις προτασιακές μεταβλητές δεν αληθεύει, η $A \land \neg B \land \neg C$ αληθεύει όταν αληθεύει μόνο η A κλπ. Άρα η ζητούμενη πρόταση είναι η

$$(\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C)$$

Θέμα 3: Θεωρούμε το σύνολο των προτάσεων που περιέχουν στη γραφή τους μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$. Ορίζουμε μια συνάρτηση g από το σύνολο αυτό στον εαυτό του ως εξής: $g(A) = A$, για προτασιακές μεταβλητές A, $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$, $g(\varphi \to \psi) = \neg(g(\varphi) \to g(\psi))$. Αποδείξτε (επαγωγικά) ότι, για κάθε πρόταση φ, ισχύει $g(\varphi) \equiv \varphi$.

Σχόλιο: Το Θέμα αυτό περιείχε σοβαρό τυπογραφικό λάθος στη διατύπωση, οπότε η αναδιατύπωσή του, που σας έδωσα κατά την εξέταση, το καθιστούσε σχεδόν τετριμμένο. Παρόλαυτα, αν είχατε στήσει σωστά την επαγωγική διαδικασία της απόδειξης, παίρνετε τις μονάδες που του αντιστοιχούν. Η σωστή διατύπωση είναι ως ακολούθως (και η λύση του έχει τα βήματα που ήταν απαραίτητα να κάνετε, σε κάθε περίπτωση):

Θεωρούμε το σύνολο των προτάσεων που περιέχουν στη γραφή τους μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$. Ορίζουμε μια συνάρτηση g από το σύνολο αυτό στον εαυτό του ως εξής: $g(A) = \neg A$, για προτασιακές μεταβλητές A, $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$, $g(\varphi \to \psi) = \neg(g(\psi) \to g(\varphi))$. Αποδείξτε (επαγωγικά) ότι, για κάθε πρόταση φ, ισχύει $g(\varphi) \equiv \neg\varphi$.

Λύση: Όταν η φ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε τετριμμένα $g(\varphi) = g(A) = \neg A = \neg\varphi$.

Όταν η φ είναι η $\neg\varphi_1$, τότε

$$g(\varphi) = g(\neg\varphi_1) = \neg g(\varphi_1) \equiv \neg\neg\varphi_1 = \neg\varphi,$$

όπου η ισοδυναμία στο προτελευταίο βήμα προκύπτει απο την επαγωγική υπόθεση.

Όταν η φ είναι η $\varphi_1 \to \varphi_2$, τότε

$$\begin{aligned}
g(\varphi) &= g(\varphi_1 \to \varphi_2)\\
\text{ορισμός} \quad &= \neg(g(\varphi_2) \to g(\varphi_1))\\
\text{άρνηση συνεπαγωγής} \quad &\equiv g(\varphi_2) \land \neg g(\varphi_1)\\
\text{επαγωγική υπόθεση} \quad &\equiv \neg\varphi_2 \land \neg\neg\varphi_1\\
&\equiv \varphi_1 \land \neg\varphi_2\\
\text{άρνηση συνεπαγωγής} \quad &\equiv \neg(\varphi_1 \to \varphi_2)\\
&= \neg\varphi
\end{aligned}$$

Θέμα 4: Εστω μια γλώσσα L της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει δύο σχεσιακά σύμβολα μίας θέσης (=κατηγορήματα) P, R. Τις ιδιότητες $P(x)$, $R(x)$ τις διαβάζουμε “ το x είναι ιπτάμενο” και “ το x είναι φτερωτό”, αντίστοιχα.

α) Γράψτε προτάσεις της γλώσσας αυτής που να εκφράζουν ότι:

(i) Καθετί ιπτάμενο είναι φτερωτό .

(ii) Για κάθε τρία διαφορετικά φτερωτά, δύο από αυτά είναι ιπτάμενα.

β) Αποδείξτε ότι οι προτάσεις $\forall x \forall y\ (\ (P(x) \land P(y)) \to x = y)$, $\exists x(P(x) \land \neg R(x))$ έχουν ως συνέπεια την πρόταση $\forall x(R(x) \to \neg P(x))$

Λύση: α) (i) “Καθετί ιπτάμενο είναι φτερωτό”: $\forall x(P(x) \to R(x))$

(ii) “Για κάθε τρία διαφορετικά φτερωτά, δύο από αυτά είναι ιπτάμενα”:

$$\forall x \forall y \forall z(\ (\neg(x = y) \land \neg(y = z) \land \neg(z = x) \land R(x) \land R(y) \land R(z)) \ \to\ ((P(x) \land P(y)) \lor (P(y) \land P(z)) \lor (P(z) \land P(x)))\ )$$

β) Σε μία δομή που αληθεύουν οι δύο υποθέσεις μας, η επαλήθευση της πρώτης πρότασης σημαίνει ότι δύο οποιαδήποτε στοιχεία έχουν την ιδιότητα P (για την ακρίβεια, στοιχεία που ανήκουν στο υποσύνολο της δομής που αποτελεί την ερμηνεία του σχεσιακού συμβόλου) συμπίπτουν, επομένως υπάρχει μόνο ένα τέτοιο στοιχείο. Η επαλήθευση της δεύτερης πρότασης σημαίνει ότι υπάρχει ένα στοιχείο το οποίο έχει την ιδιότητα P και δεν έχει την ιδιότητα R, ας το ονομάσουμε a. Θέλουμε να αληθεύει στη δομή και η πρόταση $\forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$. Αν αυτό δε συνέβαινε, θα υπήρχε ένα στοιχείο για το οποίο θα αλήθευε η ιδιότητα R και για το οποίο δε θα αλήθευε η $\neg P$, ισοδύναμα, για το οποίο θα αλήθευε η P. Ομως υπάρχει μόνο ένα στοιχείο για το οποίο αληθεύει η ιδιότητα P, το a. Αλλά γνωρίζουμε ότι για το a δεν αληθεύει η R - άτοπο.

Θέμα 5: Διατυπώστε το Θεώρημα του Συμπαγούς (είτε για την Προτασιακή είτε για την Κατηγορηματική Λογική) και περιγράψτε μια μαθηματική εφαρμογή του.

Λύση: Θυμίζουμε ότι το Θεώρημα του Συμπαγούς λέει ότι, δοθέντος ενός συνόλου προτάσεων Σ, αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι επαληθεύσιμο, τότε το Σ είναι επαληθεύσιμο.

Ως παραδείγματα μαθηματικών εφαρμογών που θα μπορούσατε να αναπτύξετε εννοούμε, πχ, την απόδειξη ότι κάθε μερική διάταξη επί ενός αριθμήσιμου συνόλου επεκτείνεται σε μία ολική (=γραμμική) διάταξη, ή την ύπαρξη διατεταγμένων σωμάτων που περιέχουν απειροστά κλπ. (Παραδείγματα που αναπτύχθηκαν στην τάξη ή υπάρχουν στις σχετικές σημειώσεις.)