Λύσεις Θεμάτων στην Πραγματική Ανάλυση ΙΙΙ

Τμήμα Μαθηματικών

9 Ιουλίου 2015

Θέμα 1: Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y-y^3}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-x^2)sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^5}$$

Λύση:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y-y^3} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{y(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{y(x+y)} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2-xy+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-x^2)sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1-x^2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1-x^2) \lim_{u\to 0} \frac{sin(u)}{u} = 1.1 = 1,$$

όπου $u = x^2+y^2 \to 0$ όταν $(x,y)\to(0,0)$

Για το τελευταίο, παίρνοντας μια προσέγγιση κατά μήκος της παραβολής $x = ky^2$ βλέπουμε ότι το κλάσμα γίνεται

$$\frac{k^2y^4-y^4}{(k^2y^4+y^4)^5} = \frac{k^2-1}{(k^2+1)^5y^{16}},$$

επομένως το όριό του όταν $y\to 0$ δεν υπάρχει.

Θέμα 2: Εστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης και ότι $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι η σύνθεση $g = f\circ(u,v,w)$, όπου $u(x,y,z) = x-y$, $v(x,y,z) = y-z$, $w(x,y,z) = z-x$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

και βρείτε την $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ συναρτήσει των διαδοχικών μερικών παραγώγων της f ως προς u, v, w.

Λύση: Είναι

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot(-1)=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial w}$$

και ομοίως

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-1)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot 0=-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-1)+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot 1=-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

Η δεύτερη μερική παράγωγος της g ως προς x είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial w})\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}-(\ \frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x}\ )\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}-\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}
\end{aligned}$$

(η τελευταία ισότητα προκύπτει λαμβάνοντας υπ΄ όψη την υπόθεση της συνέχειας των μεικτών μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης)

Θέμα 3: Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x},$$

όπου $x>-1$, $y>-1$

Λύση: Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι

$$f_x=\sqrt{1+y}+\frac{y}{2\sqrt{1+x}},\quad f_y=\frac{x}{2\sqrt{1+y}}+\sqrt{1+x}$$

Λύνοντας το σύστημα $f_x=f_y=0$ παίρνουμε

$$2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}+y=2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}+x=0,$$

από το οποίο προκύπτει $x=y$. Αντικαθιστώντας στις προηγούμενες ισότητες παίρνουμε $-x=2(\sqrt{1+x})^2=2(1+x)$, άρα $x=-2/3=y$. Μοναδικό κρίσιμο σημείο λοιπόν είναι το $(-2/3,-2/3)$.

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της f είναι

$$f_{xx}=-\frac{y}{4(1+x)^{3/2}}\qquad f_{xy}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+y}}\qquad f_{yy}=-\frac{x}{4(1+y)^{3/2}},$$

οι οποίες δίνουν στο κρίσιμο σημείο $f_{xx}(-2/3,-2/3)=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, $f_{xy}(-2/3,-2/3)=\sqrt{3}$, $f_{yy}(-2/3,-2/3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως η Εσσιανή είναι $H=3/4-3<0$, που σημαίνει ότι το κρίσιμο σημείο είναι σαγματικό.

Θέμα 4: α) Εξετάστε αν είναι συναρτησιακά εξαρτημένες οι συναρτήσεις $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ και $h(x,y,z) = x + y + z$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = xe^y$. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της f στο σημείο $(2,0)$ κατά την κατεύθυνση από αυτό προς το σημείο $(5,4)$. Να δικαιολογήσετε τον τρόπο υπολογισμού σας.

Λύση: α) Εξετάζουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+z & x+z & y+x \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

οπότε οι τρεις συναρτήσεις είναι εξαρτημένες.

β) Υπολογίζουμε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση $\vec{v} = (5,4) - (2,0) = (3,4)$, στο σημείο $(2,0)$. Η συνάρτηση f είναι προφανώς διαφορίσιμη, οπότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο του $\nabla f(2,0)$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$:

$$D_{\vec{v}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (e^0, 2e^0) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{11}{5}$$

Θέμα 5: Αποδείξτε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο αστρόβιλων διανυσματικών πεδίων $\vec{F}$, $\vec{G}$ έχει απόκλιση $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = 0$.

Λύση: Το ότι τα διανυσματικά πεδία $\vec{F}$, $\vec{G}$ είναι αστρόβιλα σημαίνει, αντιστοίχως, ότι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = (\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y})\vec{k} = \vec{0}$$

Εχουμε επομένως

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{\nabla} \cdot \{(F_2G_3 - F_3G_2)\vec{i} - (F_1G_3 - F_3G_1)\vec{j} + (F_1G_2 - F_2G_1)\vec{k}\} \\
&= (\frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 + F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2 - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x}) \\
&- (\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3 + F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 - F_3\frac{\partial G_1}{\partial y}) \\
&+ (\frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}) \\
&= (\frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1) - (-\frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2) + (\frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 - \frac{\partial F_1}{\partial y}G_3) \\
&- (\ (F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} - F_1\frac{\partial G_2}{\partial z}) - (F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}) + (F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x})\ ) \\
&= (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \\
&= 0
\end{aligned}$$