Λύσεις Θεμάτων Αλγεβρας

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

3 Ιουλίου 2015

Θέμα 1: α) Δώστε παράδειγμα ακέραιας περιοχής, η οποία να είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών και να περιέχει ως υποδακτύλιο ένα σώμα. (0,5 μονάδες)

β) Θεωρούμε μια ακέραια περιοχή, η οποία είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών. Αποδείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες της είναι μεγιστικό. (1,5 μονάδες)

γ) Αν A είναι ακέραια περιοχή που είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, B είναι ακέραια περιοχή, $f\colon A \to B$ είναι ένας ομομορφισμός που είναι επί και δεν είναι ένα - προς - ένα, αποδείξτε ότι ο B είναι σώμα. (1 μονάδα)

Λύση: α) Κάθε πολυωνυμικός δακτύλιος με συντελεστές σε ένα σώμα είναι παράδειγμα ακέραιας περιοχής, είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών και περιέχει το σώμα των συντελεστών ως υποδακτύλιο.

β) Θεωρούμε μια τέτοια ακέραια περιοχή A κι ένα πρώτο ιδεώδες της P. Ας είναι I είναι ένα ιδεώδες στο οποίο περιέχεται γνησίως το P. Αφού βρισκόμαστε σε μία περιοχή κυρίων ιδεωδών, ας θεωρήσουμε τα στοιχεία $p \in P$, $a \in I$, τα οποία παράγουν, αντιστοίχως, τα ιδεώδη αυτά. Τότε το a δε μπορεί να ανήκει στο P. Από την άλλη πλευρά, επειδή το p ανήκει στο I, θα υπάρχει ένα στοιχείο $b \in A$, ώστε $p = ab$. Επομένως, αφού $p = ab \in P$, το P είναι πρώτο ιδεώδες και το a δεν ανήκει στο P, θα πρέπει το b να ανήκει στο P. Υπάρχει λοιπόν ένα $c \in A$ ώστε $b = pc$. Εχουμε λοιπόν ότι $p = ab = acp$ ή $(1 - ac)p = 0$. Επειδή είμαστε σε μια ακέραια περιοχή και το $p \neq 0$ (αλλιώς το ιδεώδες P θα ήταν τετριμμένο), παίρνουμε ότι $ac - 1 = 0$, δηλαδή $ac = 1$, που σημαίνει ότι το $1 \in I$. Με άλλα λόγια $I = A$. Δείξαμε λοιπόν ότι, αν ένα ιδεώδες περιέχει γνησίως το πρώτο ιδεώδες P, τότε το ιδεώδες αυτό ισούται με ολόκληρο το δακτύλιο. Με άλλα λόγια, το P είναι μεγιστικό.

γ) Θεωρούμε τον πυρήνα $\mathrm{Ker}f$ του ομομορφισμού f. Αφού δεν είναι ένα - προς - ένα ο f, ο πυρήνας του είναι ένα ιδεώδες που δεν είναι ίσο με το τετριμμένο ιδεώδες $\{0\}$ και το οποίο, από την υπόθεσή μας για το δακτύλιο A, θα είναι κύριο. Την ίδια στιγμή η εικόνα του f θα ισούται με το δακτύλιο B (αφού ο ομομορφισμός είναι επί). Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού λοιπόν θα έχουμε ότι

$$A/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f = B$$

Αυτό σημαίνει ότι $A/\mathrm{Ker}f$ είναι μια ακέραια περιοχή. Αρα το ιδεώδες $\mathrm{Ker}f$ είναι πρώτο. Τώρα λοιπόν γνωρίζουμε από το β), παραπάνω, ότι το ιδεώδες $\mathrm{Ker}f$ (που είναι πρώτο ιδεώδες σε μία ακέραια περιοχή που είναι και περιοχή κυρίων ιδεωδών), θα είναι μεγιστικό. Αρα ο δακτύλιος - πηλίκο $A/\mathrm{Ker}f$, ισοδύναμα, και ο ισόμορφός του B θα είναι σώμα.

Θέμα 2: α) Κάνοντας κατάλληλο μετασχηματισμό αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $x^3 - 4$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$. (1 μονάδα)

β)Αν K είναι ένα σώμα, $K[x]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος με συντελεστές σε αυτό, r είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) \in K[x]$ και $\epsilon_r\colon K[x] \to K$ ο ομομορφισμός εκτίμησης ($\epsilon_r(f) = f(r)$), πείτε αιτιολογημένα τι από τα παρακάτω ισχύει

(i) $\ker(\epsilon_r) \subseteq < x - r >$ ή (ii) $< x - r > \subseteq \ker(\epsilon_r)$ ή (iii) τίποτε από τα δύο. (1 μονάδα)

Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 4$ θα είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$ αν το $f(x+1) = (x+1)^3 - 4 = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$. Ομως στο τελευταίο μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Eisenstein, αφού ο πρώτος αριθμός 3 διαιρεί τους συντελεστές πλην εκείνου του μεγιστοβάθμιου όρου, ενώ το $9 = 3^2$ δε διαιρεί το σταθερό όρο. Αρα το $f(x) = x^3 - 4$ είναι ανάγωγο.

β) Αφού το r είναι ρίζα του $x - r$ θα είναι και ρίζα σε κάθε πολλαπλάσιό του, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο του $< x - r >$. Από την άλλη πλευρά ο πυρήνας του ϵ_r είναι

$$\mathrm{Ker}\epsilon_r = \{f \in K[x] \mid \epsilon_r(f) = f(r) = 0\}$$

δηλαδή απαρτίζεται από εκείνα ακριβώς τα πολυώνυμα τα οποία έχουν ρίζα το r. Επομένως κάθε πολυώνυμο του $< x-r >$ βρίσκεται στον πυρήνα του ϵ_r. Το σωστό λοιπόν είναι ότι $< x-r > \subseteq \ker(\epsilon_r)$

Θέμα 3: Δίνεται A αντιμεταθετικός δακτύλιος και το ιδεώδες του

$$N(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a^n = 0\ \}$$

α)Εξηγείστε γιατί ο δακτύλιος - πηλίκο $\frac{A}{N(A)}$ έχει την ιδιότητα $\forall x(x^2 = 0 \Rightarrow x = 0)$. (1 μονάδα).

β) Είναι κάθε δακτύλιος με την τελευταία ιδιότητα του α) ακέραια περιοχή; (0,5 μονάδες)

Λύση: α) Αν ένα στοιχείο $[a]_{N(A)}$ του δακτυλίου - πηλίκο $A/N(A)$ έχει την ιδιότητα $[a]^2_{N(A)} = [a^2]_{N(A)} = 0_{N(A)}$, τότε έχουμε ότι $a^2 \in N(A)$. Επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(a^2)^n = 0$, δηλαδή $a^{2n} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $a \in N(A)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $[a]_{N(A)} = [0]_{N(A)}$.

β) Δε μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι τέτοιο. Ενώ κάθε ακέραια περιοχή προφανώς έχει την υπό συζήτηση ιδιότητα, το αντίστροφο δεν ισχύει. Για διαφορετικά μεταξύ τους x, y με γινόμενο 0 δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα από τα δύο θα είναι ίσο με 0. Ενα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα δίνεται από το δυναμοσύνολο ενός οποιουδήποτε συνόλου που, ως γνωστόν, αποκτά δομή αντιμεταθετικού δακτυλίου με διμελείς πράξεις τη συμμετρική διαφορά (ως πρόσθεση, με ουδέτερο στοιχείο το κενό σύνολο) και την τομή (ως πολλαπλασιασμό). Ένας τέτοιος δακτύλιος επαληθεύει την υπό συζήτηση ιδιότητα, αφού $A \cap A = \emptyset$ σημαίνει $A = \emptyset$, ενώ δεν είναι ακέραια περιοχή. Μπορεί να έχει ως στοιχεία ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A, B, διαφορετικά από το κενό σύνολο που έχουν τομή $A \cap B = \emptyset$.

Θέμα 4: α) Γράψτε το στοιχείο (2 4)(3 6)(1 3)(1 5) του S_7 ως γινόμενο ξένων κύκλων. (1 μονάδα)

β) Αν τ είναι ένας κύκλος μήκους 5 τι τάξη έχει αυτός ο κύκλος ως στοιχείο της S_n; Αν μια μετάθεση αναλύεται σε γινόμενο τριών ξένων κύκλων μήκους 5, τι τάξη έχει αυτή η μετάθεση; (1 μονάδα)

Λύση: α) Κάνοντας τις συνθέσεις βλέπουμε ότι η δοθείσα μετάθεση είναι η

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος για την ανάλυση μεταθέσεων σε γινόμενο ξένων κύκλων, εντοπίζουμε έναν οποιοδήποτε κύκλο μέσα στη μετάθεση. Ξεκινώντας από το 1 διαπιστώνουμε ότι ένας τέτοιος είναι ο (1 5 6 3). Πολλαπλασιάζουμε τη δοθείσα μετάθεση με τον αντίστροφο αυτού του κύκλου και το αποτέλεσμα βλέπουμε ότι είναι ο κύκλος (2 4). Αρα η δοθείσα μετάθεση γράφεται ως (1 5 6 3)(2 4).

β) Είναι προφανές ότι σε έναν κύκλο $\tau = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ έχουμε για οποιοδήποτε στοιχείο του x_i ότι

$$\tau^5(x_i) = \tau^4(x_{i+1}) = ... = \tau(x_{i+4}) = x_{i+5},$$

όπου οι δείκτες μετριώνται modulo n. Αρα η τάξη του κύκλου είναι 5.

Αν μια μετάθεση γράφεται ως γινόμενο τριών ξένων κύκλων $\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3$, τότε

$$\sigma^5 = (\tau_1\tau_2\tau_3)^5 = \tau_1^5\tau_2^5\tau_3^5 = id$$

Η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι κύκλοι είναι ξένοι, επομένως αντιμετατίθενται, δηλαδή μπορούμε να μαζέψουμε όλους τους παράγοντες με τον ίδιο δείκτη μαζί. Επίσης δε μπορούμε να έχουμε τάξη μικρότερη από 5 για τη σ, αφού η τάξη της πρέπει να διαιρεί το 5

Θέμα 5: Εστω ότι G είναι μία ομάδα, $G \times G$ είναι η ομάδα - γινόμενο, με τις πράξεις να ορίζονται κατά συντεταγμένη, και θεωρούμε τον ομομορφισμό $\delta\colon G \to G \times G$ που ορίζεται ως $\delta(g) = (g, g)$ (θεωρείται γνωστό ότι αυτός είναι ομομορφισμός ομάδων)

Αποδείξτε ότι η υποομάδα $\mathrm{Im}(\delta)$ είναι κανονική υποομάδα της $G \times G$ αν και μόνο αν η G είναι αντιμεταθετική. (2 μονάδες)

Λύση: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η υποομάδα $\mathrm{Im}(\delta)$ της $G \times G$ είναι κανονική. Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε στοιχεία g_1, g_2 της G. Τότε για το στοιχείο $(g_1, g_1) \in \mathrm{Im}(\delta)$ έχουμε ότι $(g_1, g_1)(g_1, g_2) = (g_1^2, g_1g_2)$. Λόγω της κανονικότητας της $\mathrm{Im}(\delta)$ πρέπει να υπάρχει στοιχείο $(g, g) \in \mathrm{Im}(\delta)$ ώστε

$$(g_1, g_1)(g_1, g_2) = (g_1^2, g_1g_2) = (g_1, g_2)(g, g) = (g_1g, g_2g)$$

Από την ισότητα των ζευγών παίρνουμε $g_1^2 = g_1g$ και $g_1g_2 = g_2g$. Η πρώτη από αυτές τις ισότητες δίνει (διαγράφοντας το g_1) ότι $g = g_1$. Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται $g_1g_2 = g_2g_1$, επομένως (αφού τα g_1, g_2 είναι οπιαδήποτε) η G είναι αντιμεταθετική.

Αντίστροφα, αν η G είναι αντιμεταθετική, για το οποιοδήποτε στοιχείο $(g_1, g_2) \in G \times G$ και $(g, g) \in \mathrm{Im}(\delta)$ παίρνουμε ότι $(g, g)(g_1, g_2) = (gg_1, gg_2) = (g_1g, g_2g) = (g_1, g_2)(g, g)$. Βρήκαμε λοιπόν το απαραίτητο στοιχείο που απαιτεί η συνθήκη της κανονικότητας (είναι το ίδιο το (g, g)).