Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικής Λογικής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

19 Ιουνίου 2015

Οι φοιτητές που έχουν δηλώσει το μάθημα ως υποχρεωτικό του πρώτου έτους να απαντήσουν τα επόμενα τέσσερα θέματα.

Θέμα 1: α) Εξετάστε αν είναι ταυτολογίες οι παρακάτω προτάσεις:

$$(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5) \ \rightarrow \ (\ (A_1 \rightarrow A_2) \vee (A_1 \rightarrow A_3) \vee (A_1 \rightarrow A_4) \vee (A_1 \rightarrow A_5)\ )$$

$$(\ ((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_1) \rightarrow A_1\ ) \ \rightarrow \ (\ (A_3 \rightarrow A_4) \vee (A_3 \wedge \neg A_4)\ )$$

β) Βρείτε μια απονομή αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές που να καθιστά ταυτόχρονα αληθείς τις προτάσεις

$$\neg(\ ((A_1 \vee A_2) \rightarrow A_1) \ \vee \ ((A_3 \rightarrow A_2) \rightarrow A_4)\ ) \quad \text{και}$$

$$A_1 \vee A_2 \vee (A_3 \rightarrow A_4) \vee (A_3 \wedge \neg A_4)\ )$$

(3 μονάδες)

Λύση: α) Για την πρώτη παρατηρούμε ότι αν η A_1 πάρει αληθοτιμή 1 και οι υπόλοιπες μεταβλητές πάρουν τιμή 0, τότε η υπόθεση της συνεπαγωγής γίνεται αληθής ενώ το συμπέρασμα ψευδές, ως σύζευξη ψευδών προτάσεων.

Για τη δεύτερη, παρατηρούμε ότι η πρόταση $A_3 \wedge \neg A_4$ είναι ισοδύναμη με την άρνηση της $A_3 \rightarrow A_4$, επομένως το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι πάντα αληθές και άρα η δοθείσα πρόταση είναι ταυτολογία.

β) Για το λόγο που αναφέραμε αμέσως παραπάνω, η δεύτερη από τις δύο προτάσεις είναι ταυτολογία και δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε περισσότερο μ' αυτήν. Ψάχνουμε επομένως μια απονομή αληθοτιμών που να επαληθεύει την πρώτη. Θέλουμε λοιπόν μια απονομή που να κάνει ψευδείς τόσο την $(A_1 \vee A_2) \rightarrow A_1$, όσο και την $(A_3 \rightarrow A_2) \rightarrow A_4$. Πρέπει λοιπόν να είναι $v(A_1) = 0$, $v(A_4) = 0$. Αν τώρα είναι $v(A_2) = 1$, οι δύο τελευταίες προτάσεις γίνονται ψευδείς (άρα και η δοθείσα αληθής), ασχέτως του τι τιμή θα πάρει η A_3.

Θέμα 2: Θεωρούμε ένα σύνολο προτάσεων Σ για το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι επαληθεύσιμο. Αν $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι κάποια στοιχεία του συνόλου αυτού και σ είναι οποιαδήποτε πρόταση, εξετάστε αν το σύνολο

$$\Sigma \cup \{\sigma \to (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)\}$$

είναι επαληθεύσιμο. (2 μονάδες)

Λύση: Αφού το Σ είναι επαληθεύσιμο, υπάρχει μια απονομή αληθοτιμών που επαληθεύει όλες τις προτάσεις του. Ειδικότερα επαληθεύει τις $\varphi_1, ..., \varphi_n$, άρα και τη σύζευξή τους. Επομένως η συγκεκριμένη απονομή θα κάνει αληθή την πρόταση $\sigma \to (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)$, καθώς και όλες τος προτάσεις του Σ. Αρα το $\Sigma \cup \{\sigma \to (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)\}$ είναι επαληθεύσιμο.

Θέμα 3: Θεωρούμε τον τύπο $\varphi: \; R(x,y) \wedge \neg\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))$

α) Εξετάστε αν αληθεύει η πρόταση $\forall x \exists y \varphi$ στη δομή των φυσικών αριθμών και στη δομή των πραγματικών αριθμών, αν και στις δύο περιπτώσεις ερμηνεύσουμε το σχεσιακό σύμβολο R ως την αυστηρή διάταξη, δηλαδή $R(x,y)$ να λέει ότι ο x είναι αυστηρά μικρότερος του y.

β) Γράψτε πρόταση λογικά ισοδύναμη με την παραπάνω που να είναι κανονική ποσοδεικτική μορφή, δηλαδή να προηγείται μια ακολουθία ποσοδεικτών και να ακολουθεί ένα μέρος που δεν έχει καθόλου πσοδείκτες.

(2,5 μονάδες)

Λύση: α) Η πρόταση ερμηνευμένη στη δομή των φυσικών αριθμών με την αυστηρή τους διάταξη λέει ότι για κάθε φυσικό αριθμό μπορούμε να βρούμε έναν άλλο φυσικό αριθμό ώστε ο πρώτος να είναι μικρότερος του δεύτερου και ανάμεσά τους να μην υπάρχει κανένας άλλος φυσικός αριθμός. Αυτό αληθεύει, προκειμένου για τους φυσικούς αριθμούς, αφού ότι τιμή κι αν δώσει μια αποτίμηση μεταβλητών v στο x, εκείνη που αποτιμά το y ως $v'(y) = v(x) + 1$ είναι τέτοια που

$$(\mathbb{N}, <) \models R(x,y) \wedge \neg\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))[x/v(x), y/v'(y)]$$

Από την άλλη πλευρά η πρόταση δεν αληθεύει, προκειμένου για τους πραγματικούς αριθμούς, αφού ότι τιμή κι αν δώσει μια αποτίμηση μεταβλητών v στις μεταβλητές x, y, έχουμε ότι υπάρχουν πάντοτε πραγματικοί αριθμοί μεταξύ των $v(x)$, $v(y)$.

β) Εχουμε

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \; (R(x,y) \wedge \neg\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) &\equiv \forall x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(\neg R(x,z) \vee \neg R(z,y)) \\ &\equiv \forall x \exists y \forall z(R(x,y) \wedge (\neg R(x,z) \vee \neg R(z,y)) \end{aligned}$$

αφού ο καθολικός ποσοδείκτης επιμερίζει τη σύζευξη.

Θέμα 4: Εστω μια γλώσσα L της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει ένα σχεσιακό σύμβολο δυο θέσεων R.

α) Γράψτε προτάσεις της γλώσσας αυτής που να εκφράζουν ότι, η σχέση που ερμηνεύει το R, έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Η σχέση είναι μεταβατική.

(ii) Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία που δε σχετίζονται με κανένα άλλο.

β) Γράψτε προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των παραπάνω ιδιοτήτων, με τρόπο ώστε ο σύνδεσμος της άρνησης να εφαρμόζεται μόνο στο σχεσιακό σύμβολο R. Διατυπώστε σε φυσική γλώσσα αυτές τις αρνήσεις.

(2,5 μονάδες)

Λύση: α)

$$\varphi : \ \forall x \forall y \forall z \ (\ (R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z) \ )$$

$$\psi : \ \exists x \exists y \ (\neg(x=y) \wedge \forall z (\neg R(x,z) \wedge \neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z) \wedge \neg R(z,y) \ ) \ )$$

β)

$$\neg\varphi \ \equiv \ \exists x \exists y \exists z \ (\ (R(x,y) \wedge R(y,z)) \wedge \neg R(x,z) \ )$$

$$\neg\psi \ \equiv \ \forall x \forall y \ (x = y \vee \exists z (R(x,z) \vee R(z,x) \vee R(y,z) \vee R(z,y) \ ) \ )$$

Σε φυσική γλώσσα η άρνηση της πρώτης πρότασης λέει '' υπάρχουν τρία στοιχεία, που το πρώτο σχετίζεται με το δεύτερο, το δεύτερο με το τρίτο, αλλά το πρώτο δε σχετίζεται με το τρίτο''.

Η άρνηση της πρώτης πρότασης λέει '' κάθε δύο στοιχεία, είτε είναι ίσα, είτε υπάρχει στοιχείο που να σχετίζεται με ένα από αυτά''.

Οι φοιτητές έχουν δηλώσει το μάθημα ως κατ΄ επιλογήν του τρίτου έτους να απαντήσουν τα Θέματα 1, 2 καθώς και σε **ένα εκ των 3, 4** και να συνεχίσουν με τα παρακάτω (προφανώς για εσάς υπάρχει μισή μονάδα bonus):

Θέμα 5: Για κάθε φυσικό αριθμό n θεωρούμε το σύνολο

$$T_n = \{\sigma_0, \ \sigma_0 \rightarrow \sigma_1, \ \sigma_1 \rightarrow \sigma_2, ..., \ \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n\}$$

Να αποδείξετε με επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει τυπική απόδειξη του σ_n με υποθέσεις στο T_n (1 μονάδα)

Λύση: Είναι $T_1 = \{\sigma_0,\ \sigma_0 \to \sigma_1\}$, οπότε για $n = 1$ το ζητούμενο προκύπτει με μια απλή εφαρμογή του κανόνα modus ponens.

Δεχόμενοι ότι υπάρχει τυπική απόδειξη του σ_n με υποθέσεις στο T_n, η παρακάτω τυπική αποδεικτική διαδικασία

	.
υποθέσεις στο T_n	.
	.
	σ_n
$\sigma_n \to \sigma_{n+1} \in T_{n+1}$	$\sigma_n \to \sigma_{n+1}$
MP στα δυο προηγούμενα	σ_{n+1}

δίνει το ζητούμενο.

Θέμα 6: Γράψτε μια πρόταση που να επαληθεύεται σε μια δομή ακριβώς όταν η δομή αυτή έχει ακριβώς m στοιχεία. Χρησιμοποιείστε τη δυνατότητα να γραφούν τέτοιες προτάσεις για να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει θεωρία γραμμένη σε γλώσσα της Κατηγορηματικής Λογικής, τα μοντέλα της οποίας να είναι ακριβώς οι πεπερασμένες ομάδες. (2 μονάδες)

Λύση: Η ζητούμενη πρόταση είναι

$$\exists x_1 ... \exists x_m\ (\ \neg(x_1 = x_2) \wedge ... \wedge \neg(x_1 = x_m) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge ... \wedge \neg(x_{m-1} = x_m)$$
$$\wedge \forall y\ (\ y = x_1 \vee ... \vee y = x_m\ )\ )$$

Αν υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει τέτοια θεωρία, τότε θεωρούμε το σύνολο προτάσεων που προκύπτει ως ένωση του συνόλου προτάσεων που απαρτίζουν τη θεωρία αυτή με το σύνολο των προτάσεων που επαληθεύονται σε μια δομή ακριβώς όταν η δομή έχει τουλάχιστον m στοιχεία, για όλα τα $m \geq 1$. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένα επαληθεύσιμο. Πράγματι, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολό του, θα εμπλέκει ένα πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών m κι αν m_0 είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς, τότε μια ομάδα με m_0 στοιχεία θα το επαληθεύει (αφού κάθε πεπερασμένη ομάδα θα επαληθεύει τις προτάσεις στο σύνολο που υποθέσαμε ότι υπάρχει). Από το Θεώρημα του Συμπαγούς προκύπτει ότι ολόκληρο το σύνολο προτάσεων είναι επαληθεύσιμο. Τότε όμως θα έχουμε ότι η δομή που μας παρέχει το Θεώρημα του Συμπαγούς, αφενός μεν θα είναι πεπερασμένη (ως μοντέλο της υποτεθείσας θεωρίας), αφεταίρου δε θα είναι άπειρη (αφού θα πρέπει να έχει τουλάχιστον m στοιχεία, για κάθε φυσικό $m \geq 1$). Φτάσαμε έτσι σε άτοπο.