# Ασκήσεις Θεωρίας Δακτυλίων

Τμήμα Π. Καραζέρη

10 Ιουνίου 2015

Στο παρόν παρουσιάζουμε σύντομα τις λύσεις των πιο απαιτητικών μεταξύ των ασκήσεων Θεωρίας Δακτυλίων του φυλλαδίου που αναρτήθηκε κατά τις διακοπές του Πάσχα.

***Ασκηση 2:*** Θεωρούμε έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο $A$, και δύο ιδεώδη $I$, $J$ επ' αυτού. Σχηματίζουμε τους δακτυλίους - πηλίκα $A/I$, $A/J$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f\colon A \to A/I \times A/J$$

με $f(a) = ([a]_I, [a]_J)$ (όπου $[a]_I$, $[a]_J$ συμβολίζουν τις κλάσεις ισοδυναμίας του στοιχείου $a \in A$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που προσδιορίζουν τα ιδεώδη $I$, $J$, αντίστοιχα). Αποδείξτε ότι η $f$ είναι ομομορφισμός και ότι $\ker(f) = I \cap J$.

Στην περίπτωση που $A = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$, θυμηθείτε τι είναι η τομή $I \cap J$ κι εξετάστε πότε η παραπάνω συνάρτηση είναι επί.

***Λύση:*** Ασχολούμαστε με το ότι $\ker(f) = I \cap J$:

$$\begin{aligned} a \in \ker(f) &\Leftrightarrow ([a]_I, [a]_J) = ([0]_I, [0]_J) \\ &\Leftrightarrow [a]_I = [0]_I \quad \& \quad [a]_J = [0]_J \\ &\Leftrightarrow a \in I \quad \& \quad a \in J \\ &\Leftrightarrow a \in I \cap J \end{aligned}$$

Το να είναι επί ο παραπάνω ομομορφισμός σημαίνει ότι κάθε $([a]_I, [b]_J)$ στο σύνολο $A/I \times A/J$ είναι ίσο με ένα $([x]_I, [x]_J)$, για κάποιο $x \in A$.

Στην περίπτωση λοιπόν που $A = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$, ψάχνουμε ένα $x \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε να είναι ταυτόχρονα

$$x \equiv a(mod\, m) \qquad \text{και} \qquad x \equiv b(mod\, n)$$

Γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν $\mu\kappa\delta(m,n) = 1$ (αυτό είναι το περιεχόμενο του λεγόμενου Κινέζικου Θεωρήματος). Γιατί, δεδομένου ότι υπάρχουν ακέραιοι $k$, $l$ ώστε $mk+nl = 1$, αν θέσουμε $x = bmk+anl$, είναι $x-a = bmk+anl-a = bmk+a(nl-1) = bmk-amk = mk(b-a)$ και ομοίως $x-b = nl(a-b)$. Οπως έχουμε δει στην περίπτωση που $\mu\kappa\delta(m,n) = 1$ είναι $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$, οπότε από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού προκύπτει ότι

$$\mathbb{Z}_{mn} \cong \frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

Επειδή $\mu\kappa\delta(m,n)=1$ ακριβώς όταν $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$, το παραπάνω επιχείρημα για το ότι η συνάρτηση είναι επί γενικεύεται στην περίπτωση που $I+J=A$, οπότε έχουμε έναν ισομορφισμό

$$\frac{A}{I\cap J}\cong\frac{A}{I}\times\frac{A}{J}$$

**Ασκηση 8:** Εστω $A$ αντιμεταθετικός δακτύλιος και

$$N(A)=\{a\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}\ a^n=0\ \}$$

Αποδείξτε ότι το $N(A)$ είναι ιδεώδες επί του $A$.

Αν $a\in N(A)$, αποδείξτε ότι το $1-a$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $A$.

**Λύση:** Το κρίσιμο ζήτημα εδώ είναι να δείξουμε ότι, αν $a,\ b\in N(A)$, τότε $a+b\in N(A)$. Αν λοπόν υπάρχει $m\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $a^m=0$ και $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $b^n=0$, τότε έχουμε (εξ αιτίας του ότι ο τύπος για το διωνυμικό ανάπτυγμα ισχύει σε οποιονδήποτε αντιμεταθετικό δακτύλιο)

$$(a+b)^{m+n}=\sum_{i=0}^{m+n}\binom{m+n}{i}a^ib^{m+n-i}$$

Ομως για $i<m$ είναι $m+n-i>n$, οπότε $b^{m+n-i}=0$, ενώ για $i\geq m$ είναι $a^i=0$. Επομένως όλοι οι όροι αυτού του αναπτύγματος είναι ίσοι με 0, δηλαδή $(a+b)^{m+n}=0$.

Αν υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $a^n=0$, τότε επειδή σε οποιονδήποτε αντιμεταθετικό δακτύλιο ισχύει

$$1-a^n=(1-a)(1+a+...+a^{n-1})$$

και $1-a^n=1$, προκύπτει ότι το $1-a$ είναι αντιστρέψιμο.

**Ασκηση 9:** Αν $\mathbb{R}$ είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}[x]$ είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και $I$ είναι το ιδεώδες του που απαρτίζεται από όλα τα πολυώνυμα τα οποία είναι πολλαπλάσια του $x^2+1$, αποδείξτε ότι ο δακτύλιος - πηλίκο $\mathbb{R}[x]/I$ είναι ισόμορφος με το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

**Λύση:** Θυμίζουμε ότι, δεδομένου του κανονικού ομομορφισμού $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, ένας ομομορφισμός $\mathbb{R}[x]\to\mathbb{C}$ καθορίζεται από το πού στέλνουμε το πολυώνυμο $x$. Με βάση αυτό θεωρούμε τον ομομορφισμό $\varphi\colon\mathbb{R}[x]\to\mathbb{C}$ που στέλνει το $x$ στο $i$.

Ο ομομορφισμός αυτός είναι επί: Κάθε μιγαδικός αριθμός $a+bi$ είναι εικόνα του πολυωνύμου $a+bx$. Ο πυρήνας του ομομορφισμού περιέχει το πολυώνυμο $x^2+1$, γιατί $\varphi(x^2+1)=i^2+1=0$. Επομένως και κάθε πολλαπλάσιο του $x^2+1$ θα περιέχεται στον πυρήνα, δηλαδή $I\subseteq ker\varphi$. Ομως τώρα γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι, επειδή το $x^2+1$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{R}$, το $I=<x^2+1>$ είναι μεγιστικό ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$. Επομένως, αφού το ιδεώδες $ker\varphi$ δεν είναι ολόκληρος ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$, θα είναι $I=ker\varphi$. Το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού δίνει

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{I}\ =\ \frac{\mathbb{R}[x]}{ker\varphi}\cong\ Im\varphi\ =\mathbb{C}$$