ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πρόσθετη Εξέταση 2013-2014

Θέμα 1. Έστω p, q, r προτάσεις του προτασιακού λογισμού.
(α) Δείξτε ότι οι προτάσεις $(p \vee q) \to r$ και $(q \to r) \wedge ((\neg p) \vee r)$ είναι λογικά ισοδύναμες.
(β) Δώστε τυπική απόδειξη της q από τις υποθέσεις

$$\neg(r \wedge p), \qquad q \vee p, \qquad (\neg r) \to r.$$

Λύση.
(α) Αυτό προκύπτει από τους αληθοπίνακες των δύο προτάσεων που δίνονται παρακάτω:

p	q	r	$\neg p$	$p \vee q$	$q \to r$	$(\neg p) \vee r$	$(p \vee q) \to r$	$(q \to r) \wedge ((\neg p) \vee r)$
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1

(β) Μία τέτοια απόδειξη είναι η παρακάτω:

1.	$((\neg A) \to B) \to (A \vee B)$	(ταυτολογία)
2.	$((\neg r) \to r) \to (r \vee r)$	(αντικατάσταση $A = r$ και $B = r$ στο 1)
3.	$(\neg r) \to r$	(υπόθεση)
4.	$r \vee r$	(modus ponens χρησιμοποιώντας τα 2 και 3)
5.	$(r \vee r) \to r$	(ταυτολογία)
6.	r	(modus ponens χρησιμοποιώντας τα 4 και 5)
7.	$(\neg(r \wedge p)) \to ((\neg r) \vee (\neg p))$	(ταυτολογία)
8.	$\neg(r \wedge p)$	(υπόθεση)
9.	$(\neg r) \vee (\neg p)$	(modus ponens χρησιμοποιώντας τα 7 και 8)
10.	$((\neg r) \vee (\neg p)) \to (r \to (\neg p))$	(ταυτολογία)
11.	$r \to (\neg p)$	(modus ponens χρησιμοποιώντας τα 10 και 9)
12.	$\neg p$	(modus ponens χρησιμοποιώντας τα 11 και 6)
13.	$q \vee p$	(υπόθεση)
14.	$(q \vee p) \wedge (\neg p)$	(σύζευξη των 13 και 12)
15.	$((q \vee p) \wedge (\neg p)) \to q$	(ταυτολογία)
16.	q	(modus ponens χρησιμοποιώντας τα 14 και 15).

Θέμα 2. Έστω U σύνολο και $p(x)$, $q(x)$ κατηγορήματα που αναφέρονται στα στοιχεία του U. Δείξτε ότι οι προτάσεις $\exists x\ (p(x) \to q(x))$ και $(\forall x\ p(x)) \to (\exists x\ q(x))$ είναι λογικά ισοδύναμες.

Λύση. Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\Longleftrightarrow$ για να υποδηλώσουμε λογική ισοδυναμία, ισχύουν τα εξής:

$$(\forall x\ p(x)) \to (\exists x\ q(x)) \iff (\neg(\forall x\ p(x))) \vee (\exists x\ q(x)) \iff (\exists x\ \neg(p(x)) \vee (\exists x\ q(x))$$

$$\iff \exists x\ ((\neg p(x)) \vee q(x)) \iff \exists x\ (p(x) \to q(x)).$$

Θέμα 3.
(α) Ένα σουβλατζίδικο φτιάχνει σουβλάκια 4 διαφορετικών ειδών. Πόσες διαφορετικές παραγγελίες μπορούν να γίνουν για πακέτο με 12 σουβλάκια;
(β) Πόσοι διαφορετικοί αναγραμματισμοί της λέξης ΑΝΑΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ υπάρχουν;

Λύση.
(α) Το ζητούμενο είναι το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη 12 αντικειμένων ανάμεσα σε 4 αντικείμενα, το οποίο ισούται με

$$\binom{12+4-1}{12} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = 455.$$

(β) Η λέξη ΑΝΑΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ έχει 15 γράμματα και πιο συγκεκριμένα 4 Α, 1 Ν, 1 Γ, 1 Ρ, 3 Μ, 1 Τ, 1 Ι, 2 Σ και 1 Ο. Επομένως υπάρχουν συνολικά

$$\frac{15!}{4!\ 1!\ 1!\ 1!\ 3!\ 1!\ 1!\ 2!\ 1!} = 4540536000$$

αναγραμματισμοί αυτής της λέξης.

Θέμα 4. Σε μια παρέα 30 τουριστών ισχύουν τα εξής: 14 τουρίστες μιλάνε Αγγλικά, 12 τουρίστες μιλάνε Γαλλικά, 8 τουρίστες μιλάνε Ισπανικά, 6 τουρίστες μιλάνε και Αγγλικά και Γαλλικά, 5 τουρίστες μιλάνε και Αγγλικά και Ισπανικά, 2 τουρίστες μιλάνε και Αγγλικά και Γαλλικά και Ισπανικά. Κάθε τουρίστας που μιλάει Ισπανικά μιλάει επίσης είτε Αγγλικά είτε Γαλλικά (είτε και τα δύο). Πόσοι από τους τουρίστες δεν μιλάνε ούτε Αγγλικά ούτε Γαλλικά ούτε Ισπανικά;

Λύση. Έστω T το σύνολο των τουριστών και E, F, S τα υποσύνολα του T που αποτελούνται από εκείνους τους τουρίστες στο T οι οποίοι μιλάνε Αγγλικά, Γαλλικά, Ισπανικά, αντίστοιχα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $|T \setminus (E \cup F \cup S)|$. Από τις υποθέσεις έχουμε ότι:

$$|T| = 30, \quad |E| = 14, \quad |F| = 12, \quad |S| = 8, \quad |E \cap F| = 6, \quad |E \cap S| = 5, \quad |E \cap F \cap S| = 2.$$

Επίσης από τις υποθέσεις, έχουμε ότι $S \subseteq E \cup F$. Άρα $S = (E \cup F) \cap S = (E \cap S) \cup (F \cap S)$. Αφού

$$(E \cap S) \cap (F \cap S) = E \cap F \cap S,$$

έπεται, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ότι

$$|S| = |(E \cap S) \cup (F \cap S)| = |E \cap S| + |F \cap S| - |E \cap F \cap S|,$$

δηλαδή $|F \cap S| = 8 - 5 + 2 = 5$. Επομένως, ξανά από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού,

$$|E \cup F \cup S| = |E| + |F| + |S| - |E \cap F| - |E \cap S| - |F \cap S| + |E \cap F \cap S| = 14 + 12 + 8 - 6 - 5 - 5 + 2 = 20,$$

άρα $|T \setminus (E \cup F \cup S)| = 30 - 20 = 10$.

Θέμα 5. Για κάθε φυσικό αριθμό n, έστω a_n το πλήθος των λέξεων μήκους n που μπορούμε να σχηματίσουμε από τα γράμματα ρ, σ, τ και για τις οποίες δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές εμφανίσεις του γράμματος ρ. Βρείτε κλειστό τύπο για το a_n.

Λύση. Προφανώς, $a_0 = 1$ (η κενή λέξη είναι η μόνη τέτοια λέξη μήκους 0) και $a_1 = 3$ (οι λέξεις ρ, σ, τ είναι οι μόνες τέτοιες λέξεις μήκους 1). Έστω τώρα $n \geq 2$. Αν το πρώτο γράμμα μίας τέτοιας λέξης είναι σ, τότε το υπόλοιπο της λέξης μπορεί να σχηματιστεί με a_{n-1} τρόπους. Όμοια, αν το πρώτο γράμμα μίας τέτοιας λέξης είναι τ, τότε το υπόλοιπο της λέξης μπορεί να σχηματιστεί με a_{n-1} τρόπους. Τέλος, αν το πρώτο γράμμα μίας τέτοιας λέξης είναι ρ, τότε το δεύτερο γράμμα είναι σ ή τ και, σε κάθε περίπτωση, το υπόλοιπο της λέξης μπορεί να σχηματιστεί με a_{n-2} τρόπους. Επομένως, ισχύει ότι

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

για κάθε $n \geq 2$. Έστω τώρα

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε

$$G(x) = 1 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + 3x + 2x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

$$= 1 + 3x + 2x(G(x) - 1) + 2x^2 G(x),$$

άρα

$$G(x) = \frac{1+x}{1-2x-2x^2} = \frac{1+x}{(1-ax)(1-bx)},$$

όπου $a = 1 + \sqrt{3}$ και $b = 1 - \sqrt{3}$. Η μέθοδος μερικών κλασμάτων δίνει

$$G(x) = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\ \frac{1}{1-ax} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\ \frac{1}{1-bx} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+2\sqrt{3})\ a^n + (3-2\sqrt{3})\ b^n}{6} x^n,$$

άρα

$$a_n = \frac{(3+2\sqrt{3})\ (1+\sqrt{3})^n + (3-2\sqrt{3})\ (1-\sqrt{3})^n}{6},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 6. Για κάθε θετικό ακέραιο n, έστω b_n το πλήθος των n-ψήφιων φυσικών αριθμών (σε δεκαδική μορφή) στους οποίους το ψηφίο 6 έχει άρτιο αριθμό εμφανίσεων, το ψηφίο 7 έχει άρτιο αριθμό εμφανίσεων και τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 έχουν μηδενικό αριθμό εμφανίσεων. Θέτουμε επίσης $b_0 = 1$. Βρείτε κλειστό τύπο για το b_n.

Λύση. Έστω

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τη θεωρία (και σύμφωνα με τις υποθέσεις) έπεται ότι

$$H(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} + 2e^{2x} + 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (4^{n-1} + 2^{n-1}) \frac{x^n}{n!}.$$

Επομένως,

$$b_n = 4^{n-1} + 2^{n-1},$$

για κάθε $n \geq 1$.

Θέμα 7. Δείξτε ότι υπάρχει όρος της ακολουθίας

$$97,\ 9797,\ 979797,\ 97979797,\ 9797979797,\ 979797979797,\ \ldots$$

που διαιρείται με το 123456789.

Λύση. Έστω $k = 123456789$ και έστω a_n ο n-οστός όρος της δοσμένης ακολουθίας, για $n = 1, 2, \ldots$ Η διαίρεση ενός ακεραίου με το k αφήνει υπόλοιπο που ανήκει στο $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Άρα, από την αρχή της περιστεροφωλιάς, έπεται ότι τουλάχιστον δύο από τα $a_1, \ldots, a_{k+1}$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με το k. Έστω, χωρίς βλάβη στη γενικότητα, ότι ο k διαιρεί το $a_n - a_m$, όπου $m < n$. Τότε ο k διαιρεί το $100^m\ a_{n-m}$. Αφού ο k είναι σχετικά πρώτος με το 100^m (διότι ο k δεν διαιρείται ούτε με το 2 ούτε με το 5), έπεται ότι ο k διαιρεί το a_{n-m}.

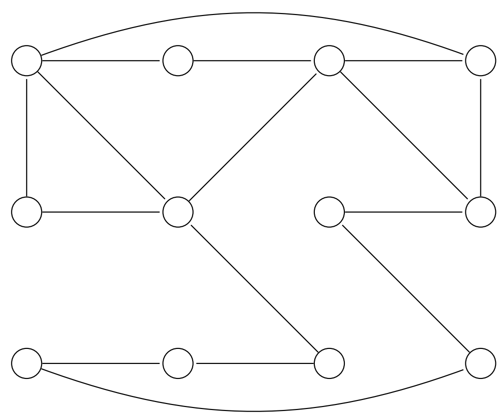
Θέμα 8. Έστω G απλός γράφος με 9 κορυφές και τουλάχιστον 14 ακμές. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή του G με βαθμό τουλάχιστον 4.

Λύση. Έστω d_1, $d_2, \ldots$, d_9 οι βαθμοί των κορυφών και e ο αριθμός των ακμών του G. Αφού

$$\sum_{i=1}^{9} d_i = 2e \geq 28,$$

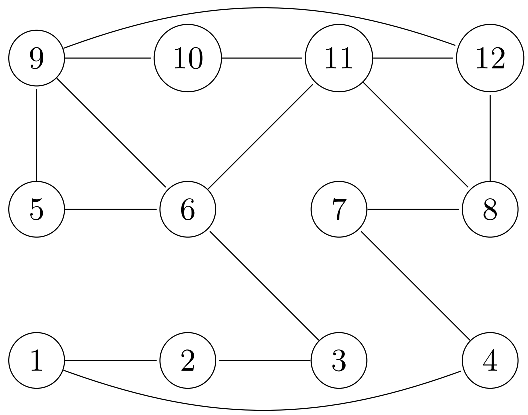
έπεται ότι κάποιο d_i θα πρέπει να είναι ≥ 4, διότι, αν όλα τα d_i ήταν το πολύ 3, τότε το άθροισμά τους θα ήταν το πολύ 27, άτοπο.

Θέμα 9. Δίνεται ο παρακάτω γράφος:



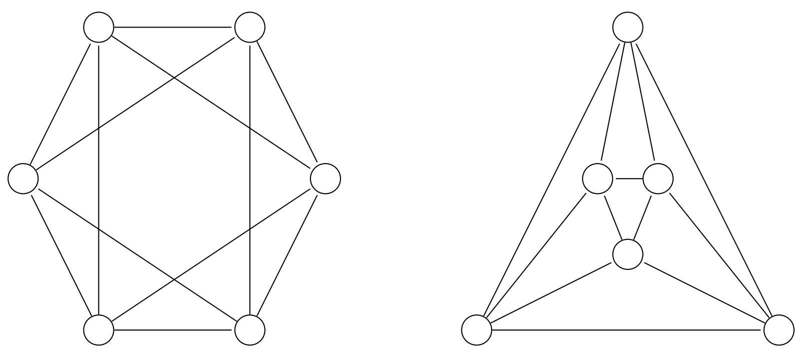
(α) Εξετάστε αν είναι γράφος Euler. Αν είναι, βρείτε κλειστό ίχνος Euler.
(β) Εξετάστε αν είναι γράφος Hamilton. Αν είναι, βρείτε κύκλο Hamilton.

Λύση. Ας αριθμήσουμε τις κορυφές του γράφου με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω:

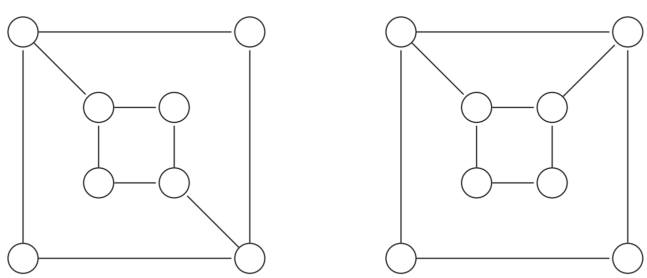


(α) Αφού η κορυφή 8 έχει βαθμό 3, ο γράφος δεν είναι γράφος Euler.
(β) Ο γράφος είναι γράφος Hamilton. Η διαδρομή 5-9-10-11-12-8-7-4-1-2-3-6-5 είναι κύκλος Hamilton.

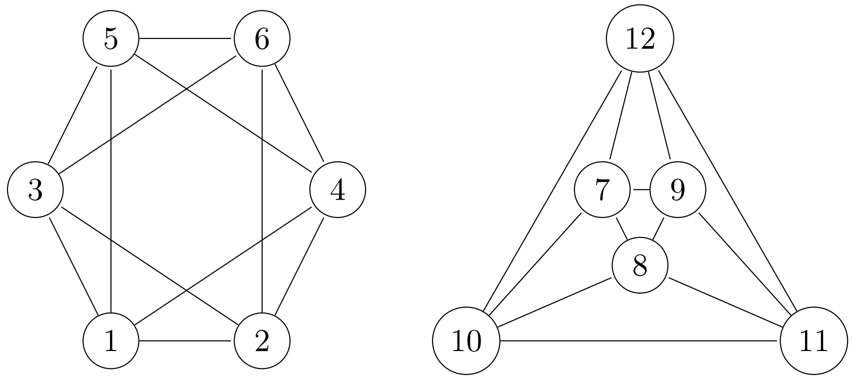
Θέμα 10.
(α) Εξετάστε αν οι παρακάτω γράφοι είναι ισόμορφοι:



(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω γράφοι είναι ισόμορφοι:



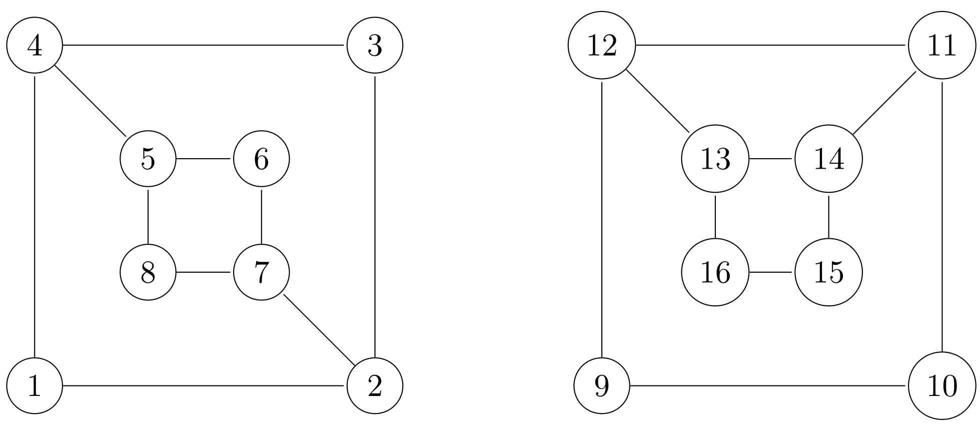
Λύση.
(α) Οι γράφοι αυτοί είναι ισόμορφοι. Αν αριθμήσουμε τις κορυφές τους όπως φαίνεται παρακάτω:



τότε η απεικόνιση $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ που δίνεται από τον τύπο

$$f(1) = 8, \quad f(2) = 10, \quad f(3) = 11, \quad f(4) = 7, \quad f(5) = 9, \quad f(6) = 12$$

είναι ισομορφισμός.
(β) Ας αριθμήσουμε τις κορυφές των γράφων όπως φαίνεται παρακάτω:



Οι μοναδικές κορυφές του γράφου στα αριστερά που έχουν βαθμό 3 είναι οι 2, 7, 4, 5, οι οποίες δεν σχηματίζουν κύκλο μήκους 4. Οι μοναδικές κορυφές του γράφου στα δεξιά που έχουν βαθμό 3 είναι οι 11, 12, 13, 14, οι οποίες σχηματίζουν κύκλο μήκους 4. Επομένως, οι δύο γράφοι δεν είναι ισόμορφοι.