

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Λύσεις των ασκήσεων της Εργασίας VI

#1, Φυλλάδιο Ασκήσεις V

α. Τυποποιώντας κάθε μία από τις X_1, X_2, X_3 έχουμε $X_1 - \mu \sim N(0,1)$, $X_2 - \mu - 1 \sim N(0,1)$ και $X_3 - \mu - 2 \sim N(0,1)$. Επομένως $(X_1 - \mu)^2 \sim \chi_1^2$, $(X_2 - \mu - 1)^2 \sim \chi_1^2$, $(X_3 - \mu - 2)^2 \sim \chi_1^2$, οπότε λόγω ανεξαρτησίας των X_1, X_2, X_3 έχουμε $(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu - 1)^2 + (X_3 - \mu - 2)^2 \sim \chi_3^2$.

β. $\sqrt{2} (X_1 - \mu) / \sqrt{(X_2 - \mu - 1)^2 + (X_3 - \mu - 2)^2} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_2^2/2}} \sim t_2$, λόγω ανεξαρτησίας του αριθμητή με τον παρονομαστή.

γ. $2(X_1 - \mu)^2 / [(X_2 - \mu - 1)^2 + (X_3 - \mu - 2)^2] = \frac{\chi_1^2/1}{\chi_2^2/2} \sim F_{1,2}$, λόγω ανεξαρτησίας του αριθμητή με τον παρονομαστή.

#2, Φυλλάδιο Ασκήσεις V

α. Τυποποιώντας την X_i έχουμε $\frac{X_i - 0}{\sigma/\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{i} X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$, $i=1,2,\dots,n$ και επομένως $\frac{i X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$, $i=1,\dots,n$, οπότε λόγω ανεξαρτησίας των $X_1, \dots, X_n$, $Y = \sum_{i=1}^n \frac{i X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$. Η χ_n^2 συμπίπτει με την $G(\frac{n}{2}, 2)$, άρα από γνωστή ιδιότητα της κατανομής Γάμμα, $U = \sigma^2 Y \sim G(\frac{n}{2}, 2\sigma^2)$ με πυκνότητα $f(u) = \frac{1}{\Gamma(n/2)(2\sigma^2)^{n/2}} u^{n/2-1} e^{-u/(2\sigma^2)}$, $u > 0$.

β. $\sqrt{2} X_1 / \sqrt{2X_2^2 + 3X_3^2} = \frac{X_1/\sigma}{\sqrt{(2X_2^2/\sigma^2 + 3X_3^2/\sigma^2)/2}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_2^2/2}} \sim t_2$, λόγω ανεξαρτησίας του αριθμητή με τον παρονομαστή.

γ. $\frac{(n-2)(X_1^2 + 2X_2^2)}{2(3X_3^2 + \dots + nX_n^2)} = \frac{(\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{2X_2^2}{\sigma^2})/2}{(\frac{3X_3^2}{\sigma^2} + \dots + \frac{nX_n^2}{\sigma^2})/(n-2)} \sim \frac{\chi_2^2/2}{\chi_{n-2}^2/n-2} \sim F_{2,n-2}$

#3, Φυλλάδιο Ασκήσεις V

Η εκθετική κατανομή $E(\lambda)$ συμπίπτει με την Γάμμα $G(1, 1/\lambda)$.

$$X_1 \sim E(\lambda_1) \Rightarrow X_1 \sim G(1, 1/\lambda_1) \Rightarrow 2\lambda_1 X_1 \sim G(1, 2) \sim \chi_2^2$$

$$X_2 \sim E(\lambda_2) \Rightarrow \dots \Rightarrow 2\lambda_2 X_2 \sim \chi_2^2$$

$$X_3 \sim E(\lambda_3) \Rightarrow \dots \Rightarrow 2\lambda_3 X_3 \sim \chi_2^2$$

Λόγω ανεξαρτησίας των $X_1, X_2, X_3 \Rightarrow 2\lambda_1 X_1 + 2\lambda_2 X_2 + 2\lambda_3 X_3 \sim \chi_6^2$

#4β, Φυλλάδιο Ασκήσεις V

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{2\lambda X_1}{2\lambda X_2} \sim \frac{\chi_2^2}{\chi_2^2} \sim \frac{\chi_2^2/2}{\chi_2^2/2} \sim F_{2,2}, \text{ λόγω ανεξαρτησίας του αριθμητή με τον παρονομαστή}$$

#7, Φυλλάδιο Ασκήσεις V

Βρίσκουμε πρώτα την πυκνότητα της $X = X_{(1)}$ από το γενικό τύπο

$f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$, όπου $f(x)$ είναι η κοινή πυκνότητα των $X_1, \dots, X_n$ και $F(x)$ η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής.

$$F(x) = \int_0^x (3\theta^3/t^4) dt = 1 - (\theta/x)^3, \quad \theta < x.$$

$$\text{Επομένως, } f_{X_{(1)}}(x) = n \left(\frac{\theta^3}{x^3} \right)^{n-1} \frac{3\theta^3}{x^4} = 3n\theta^{3n} / x^{3n+1}, \quad x > \theta.$$

Η $Y = \theta/X_{(1)} = \theta/X$ είναι 1-1 μετασχηματισμός της X με σύνολο τιμών το $(0,1)$, επειδή η X έχει σύνολο τιμών (θ, ∞) και $\theta > 0$.

$$\text{Άρα } f_Y(y) = f_{X_{(1)}}(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, \quad y \in (0,1).$$

Στην προκειμένη περίπτωση, $y = \theta/x \Rightarrow x = \theta/y = g^{-1}(y)$, οπότε

$$f_Y(y) = 3n\theta^{3n} / (\theta/y)^{3n+1} \cdot \left| -\frac{\theta}{y^2} \right| = 3ny^{3n-1}, \quad 0 < y < 1, \text{ αλλιώς } 0.$$