ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ

Πρόσθετη Εξέταση 2013-2014

Θέμα 1 (2 μονάδες). Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & , \text{ αν } x \neq y \\ x^2+y & , \text{ αν } x = y \end{cases}$$

(α) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.
(β) Να εξεταστεί αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

Λύση.
(α) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$: Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2}\}$. Έστω (x,y) σημείο του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $||(x,y)-(0,0)|| < \delta$, δηλαδή $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Τότε $|x| < \delta$ και $|y| < \delta$, άρα $|x+y| \leq |x|+|y| < 2\delta \leq \epsilon$ και $|x^2+y| \leq |x|^2+|y| \leq \delta|x|+|y| \leq |x|+|y| < 2\delta \leq \epsilon$. Άρα, ανεξάρτητα από το αν $x = y$ ή $x \neq y$, έχουμε $|f(x,y)-f(0,0)| = |f(x,y)| < \epsilon$.
(β) Η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+0)-(0^2+0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι, από τον ορισμό του ορίου, η μεταβλητή x στο συγκεκριμένο όριο δεν επιτρέπεται να ισούται με το 0. Όμοια, $f_y(0,0) = 1$. Επομένως,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Αν το σημείο (x,y) προσεγγίζει το σημείο $(0,0)$ κινούμενο πάνω στον άξονα των x, τότε το κλάσμα $\frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ισούται με 0 και επομένως συγκλίνει στο 0. Αν το σημείο (x,y) προσεγγίζει το σημείο $(0,0)$ κινούμενο πάνω στην ευθεία $x = y$, τότε το κλάσμα $\frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ισούται με $\frac{x^2-x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{x(x-1)}{|x|\sqrt{2}}$, το οποίο δεν συγκλίνει στο 0. Επομένως το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

δεν υπάρχει.

Θέμα 2 (2 μονάδες). Βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $f(x,y) = 8x+8y-x^4-y^4$ στην κλειστή περιοχή $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4 \leq 1\}$.

Λύση. Τα ολικά ακρότατα υπάρχουν αφού η f είναι συνεχής και η δοσμένη περιοχή είναι κλειστή (προφανώς) και φραγμένη (αν $(x,y) \in D$, τότε $x^4, y^4 \leq 1$, άρα $x^2+y^2 \leq 2$). Ακολουθούμε επομένως τη γνωστή μέθοδο για την εύρεση ολικών ακροτάτων:
Αν (a,b) είναι κρίσιμο σημείο της f στο εσωτερικό του D, τότε

$$0 = f_x(a,b) = 8-4a^3, \qquad 0 = f_y(a,b) = 8-4b^3,$$

δηλαδή $a = b = \sqrt[3]{2}$, άτοπο αφού $a^4+b^4 < 1$. Επομένως, δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του D.
Για να βρούμε τα ακρότατα της f στο σύνορο του D, χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστές Lagrange: Έστω $g(x,y) = x^4+y^4-1$. Παρατηρώντας ότι αν $a^4+b^4 = 1$, τότε $\nabla g(a,b) = (4a^3, 4b^3) \neq (0,0)$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$8-4a^3 = 4\lambda a^3, \qquad 8-4b^3 = 4\lambda b^3, \qquad a^4+b^4 = 1.$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος δίνουν $(\lambda+1)a^3 = (\lambda+1)b^3 = 2$. Προφανώς δεν μπορεί να ισχύει $\lambda + 1 = 0$, επομένως $a = b = \sqrt[3]{\frac{2}{\lambda+1}}$. Άρα, από την τρίτη εξίσωση του συστήματος, έπεται ότι $a = b = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Επειδή

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{16}{\sqrt[4]{2}} - 1, \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{16}{\sqrt[4]{2}} - 1,$$

συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ και ολικό ελάχιστο στο σημείο $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Θέμα 3 (2 μονάδες).
(α) Δείξτε ότι οι αντικαταστάσεις $t = 1 - \frac{y}{2}$ και $s = e^x$ στην εξίσωση Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 2s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + 2s\frac{\partial V}{\partial s} - 2V = 0$$

δίνουν την εξίσωση

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V.$$

(β) Δείξτε ότι η αντικατάσταση $V(x,y) = e^{-y}\,U(x,y)$ στην εξίσωση

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V$$

δίνει την εξίσωση θερμότητας

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Λύση.
(α) Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = s\frac{\partial V}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(s\frac{\partial V}{\partial s}\right) = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial s} + s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right) = s\frac{\partial V}{\partial s} + s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial t\partial s}\frac{\partial t}{\partial x}\right) = s\frac{\partial V}{\partial s} + s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}.$$

Άρα η εξίσωση Black-Scholes δίνει

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V.$$

(β) Από τον κανόνα του γινομένου, έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -e^{-y}U + e^{-y}\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = e^{-y}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = e^{-y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Άρα η εξίσωση

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V$$

ανάγεται στην εξίσωση

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Θέμα 4 (2 μονάδες). Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει σημείο στο οποίο $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$.
(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει κατάλληλο σημείο του $\mathbb{R}^2$ και ανοικτή γειτονιά αυτού $W \subseteq \mathbb{R}^2$ επί της οποίας ορίζονται συναρτήσεις $g, h : W \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης έτσι ώστε για κάθε $(u, v) \in W$ να ισχύουν οι ισότητες

$$f_x(g(u,v), h(u,v)) = u, \qquad f_y(g(u,v), h(u,v)) = v.$$

(β) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους g_u και h_v στο W συναρτήσει των g, h και των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης της f.

Λύση.
(α) Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που δίνεται από τον τύπο $F(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Από τις υποθέσεις, η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

που ισούται με $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ είναι μη μηδενική σε κάποιο σημείο (x_0, y_0). Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης, υπάρχει ανοικτή γειτονιά W του σημείου $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$ και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $G : W \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $F \circ G$ να είναι ταυτοτική στο W. Αν g και h είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της G, δηλαδή $G(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$, για κάθε $(u, v) \in W$, έπεται ότι

$$f_x(g(u,v), h(u,v)) = u, \qquad f_y(g(u,v), h(u,v)) = v,$$

για κάθε $(u, v) \in W$.
(β) Αφού η $F \circ G$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο W, έπεται, από τον κανόνα της αλυσίδας, ότι ο πίνακας DG των μερικών παραγώγων της G ισούται στο W με τον αντίστροφο του πίνακα DF των μερικών παραγώγων της F, δηλαδή

$$DG(u,v) = (DF)^{-1}(G(u,v)) = \left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \right)^{-1} (G(u,v)) = \begin{bmatrix} \frac{f_{yy}}{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2} & \frac{-f_{xy}}{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2} \\ \frac{-f_{xy}}{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2} & \frac{f_{xx}}{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2} \end{bmatrix} (G(u,v)),$$

επομένως

$$g_u(u,v) = \frac{f_{yy}(g(u,v), h(u,v))}{f_{xx}(g(u,v), h(u,v))\ f_{yy}(g(u,v), h(u,v)) - (f_{xy}(g(u,v), h(u,v)))^2},$$

$$h_v(u,v) = \frac{f_{xx}(g(u,v), h(u,v))}{f_{xx}(g(u,v), h(u,v))\ f_{yy}(g(u,v), h(u,v)) - (f_{xy}(g(u,v), h(u,v)))^2},$$

για κάθε $(u, v) \in W$.

Θέμα 5 (2 μονάδες).
(α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Έστω $c_1,\ c_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ οι καμπύλες που δίνονται από τους τύπους $c_1(t) = (t, -t)$ και $c_2(t) = (2t, -4t)$. Να υπολογιστεί το $\nabla f(0, 0)$, αν δίνεται ότι

$$\frac{d}{dt} f(c_1(t)) \Big|_{t=0} = 5, \qquad \frac{d}{dt} f(c_2(t)) \Big|_{t=0} = 6.$$

(β) Έστω $\vec{r}$ το ακτινικό διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ που δίνεται από τον τύπο $\vec{r}\,(x,y,z) = (x,y,z)$. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}= \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$ είναι αστρόβιλο και υπολογίστε την απόκλισή του.

Λύση.
(α) Έστω $\nabla f(0,0) = (a,b)$. Αφού $c_1(0) = c_2(0) = (0,0)$, $c_1'(0) = (1,-1)$ και $c_2'(0) = (2,-4)$, έπεται από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$5 = \frac{d}{dt} f(c_1(t))\Big|_{t=0} = (a,b)\cdot(1,-1), \qquad 6 = \frac{d}{dt} f(c_2(t))\Big|_{t=0} = (a,b)\cdot(2,-4),$$

δηλαδή ότι $a - b = 5$ και $2a - 4b = 6$. Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε ότι $a = 7$ και $b = 2$, άρα $\nabla f(0,0) = (7,2)$.
(β) Έστω P, Q, R οι συντεταγμένες συναρτήσεις του $\vec{F}$, δηλαδή

$$P(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad Q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad R(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Εύκολα

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0.$$

Όμοια,

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

επομένως $\nabla\times \vec{F}=\vec{0}$. Επίσης,

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{F}}= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}{\sqrt{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^3}} + \frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{z}^2}{\sqrt{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^3}} + \frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\sqrt{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{||\,\vec{r}\,||}.$$