Δέκα Στοιχειώδεις Κατασκευές:

K_1 : Κατασκευή ευθείας διερχόμενης από δύο σημεία.

K_2 : Κατασκευή κύκλου με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα.

K_3 : Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου

K_4 : Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσου με δοθέν και με το ένα άκρο επί δοθέντος σημείου

K_5 : Κατασκευή τριγώνου με δοθείσες τις τρείς πλευρές του

K_6 : Κατασκευή του μέσου ευθυγράμμου τμήματος

K_7 : Κατασκευή γωνίας ίσης με δοθείσα.

K_8 : Κατασκευή της διχοτόμου δοθείσης γωνίας

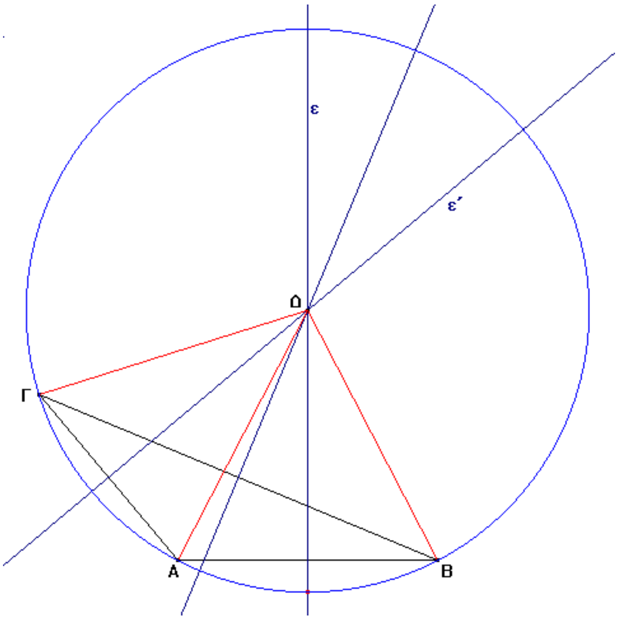
K_9 : Κατασκευή καθέτου προς δοθείσα ευθεία διερχομένης από δοθέν σημείο κείμενου εκτός της δοθείσης ευθείας.

K_{10} : Κατασκευή καθέτου προς δοθείσα ευθεία διερχομένης από δοθέν σημείο κείμενου πάνω σε αυτήν.

Ένα σχόλιο για την ορολογία: Δοθέντος ενός τριγώνου ΑΒΓ, χάριν συντομίας οι γωνίες του ονομάζονται $\angle A$, $\angle B$, $\angle \Gamma$, οι πλευρές του ονομάζονται α, β, γ, το δε ύψος η διάμεσος και η διχοτόμος που περνούν από την κορυφή Α, ονομάζονται αντίστοιχα υ_α, μ_α, και δ_α, ανάλογα και αυτές που διέρχονται από τις άλλες κορυφές, ενώ η περίμετρος συμβολίζεται με 2τ.

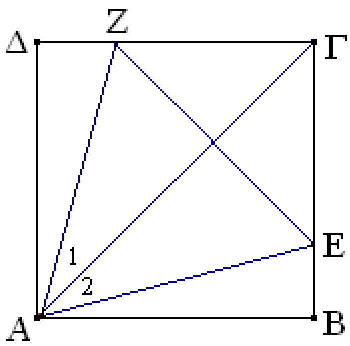
1] Πρόβλημα: *Να κατασκευαστεί κύκλος διερχόμενος από τρία μη συνευθειακά σημεία.*

Ανάλυση του προβλήματος: Έστω τρία μη συνευθειακά σημεία τα Α, Β, Γ. Πρέπει να κατασκευάσουμε ένα κύκλο που να διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. Ζητείται λοιπόν το κέντρο αυτού του κύκλου και η ακτίνα το. Το κέντρο ενός τέτοιου κύκλου θα πρέπει να απέχει εξίσου από τα τρία σημεία. Όμως όλα τα σημεία που ισαπέχουν από το Α και το Β βρίσκονται πάνω στην μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Το ίδιο συμβαίνει και με τα σημεία Α και Γ.



Κατασκευή: Φέρνουμε την ε μεσο-κάθετο στο ΑΒ, καθώς και την ε' μεσοκάθετο στο ΑΓ. Η ε' θα τμήσει οπωσδήποτε την ε γιατί διαφορετικά θα ήταν παράλληλη με αυτήν, και με δεδομένο ότι η ε είναι κάθετη στην ΑΒ θα πρέπει και η ε' να είναι κάθετη σ' αυτήν δηλαδή τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά! 'Εστω λοιπόν ότι οι ε και ε' τέμνονται στο Δ. Δηλαδή ΑΔ=ΒΔ=ΒΓ. Άρα το Δ είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και ακτίνα του η ΑΔ.

2] Πρόταση πρόβλημα: *Σε δοθέν τετράγωνο να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου μία κορυφή να συμπίπτει με μία κορυφή του τετραγώνου.*



Ανάλυση: Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισόπλευρο τρίγωνο έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με την εκφώνηση και είναι το ΑΕΖ, εγγεγραμμένο στο δοθέν τετράγωνο το ΑΒΓΔ.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι ίσα καθότι είναι ορθογώνια και έχουν ίσες τις υποτείνουσες, ως πλευρές ισοπλεύρου τριγώνου, και ίσες τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΔ, ως πλευρές του τετραγώνου.

Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ, η οποία διχοτομεί τη γωνία Α του τετραγώνου. Αν λοιπόν από τις ίσες γωνίες στις οποίες μοιράζεται η Α αφαιρέσουμε αντίστοιχα τις ΔΑΖ και ΕΑΒ που είναι ίσες, τα υπόλοιπα θα είναι ίσα, δηλαδή $\angle A_1 = \angle A_2$. Αυτό σημαίνει ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία Α του τριγώνου η οποία είναι 60 μοίρες. Άρα

$\angle A_1=\angle A_2=30^o$. Οπότε οι πλευρές ΑΒ και ΑΖ είναι κατασκευάσιμες σε σχέση με την ΑΓ.

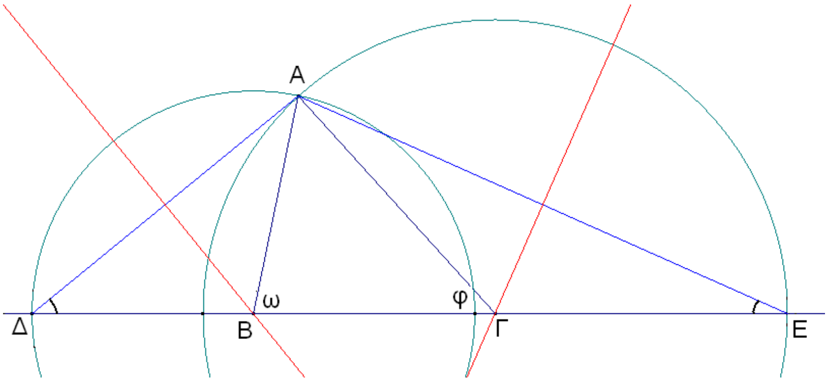
Σύνθεση: Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου και με κορυφή το σημείο Α, και πλευρά ΑΓ, κατασκευάζουμε γωνία $A_2=30^o$, η πλευρά της οποίας τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΕ γράφουμε περιφέρεια η οποία τέμνει τη ΔΓ στο Ζ. Φέρουμε και τις ΕΖ και ΑΖ. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Αφού ΑΕ=ΑΖ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα καθότι είναι ορθογώνια και έχουν ίσες τις υποτείνουσες. Άρα οι γωνίες ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσες. Αν τις αφαιρέσουμε αντίστοιχα από τις ΓΑΒ και ΓΑΔ που είναι ίσες, τα υπόλοιπα θα είναι ίσα. Άρα $\angle A_1=\angle A_2$ δηλαδή η ΖΑΕ είναι 60^o. Οπότε και οι γωνίες της βάσης ΕΖ είναι60^o μοίρες η κάθε μία αφού το ΑΕΖ είναι, ισοσκελές άρα είναι και ισόπλευρο.

Διερεύνηση: Αφού η κατασκευή της A_2 ($=30^o$) είναι πάντα εφικτή άρα το πρόβλημα έχει πάντα λύση, η οποία είναι και μοναδική διότι η πλευρά της A_2 θα τμήσει σε ένα και μοναδικό σημείο την απέναντι στην γωνία Α πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

3] *Να κατασκευαστεί τρίγωνο* ΑΒΓ *από τα στοιχεία του* Β, Γ, 2τ.

Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο τρίγωνο έχει κατασκευαστεί με ΑΒ+ΑΓ+ΑΓ=2τ, ∠Β=ω και ∠Γ=φ. Επειδή είναι γνωστή η περίμετρος 2τ, προεκτείνουμε τη ΒΓ εκατέροθεν και με τη βοήθεια των κύκλων (Β, ΒΑ) και (Γ,ΓΑ) παίρνουμε τα σημεία Δ και Γ, τέτοια ώστε ΒΔ=ΒΑ και ΓΕ=ΓΑ, δηλαδή ΔΕ=2τ. Από την κατασκευή αυτή τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΓΕΑ είναι ισοσκελή,



οπότε ∠Δ=ω/2 και ∠Ε=φ/2. Αυτά σημαίνουν ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι κατασκευάσιμο, ενώ οι μεσοκάθετοι στις πλευρές του ΑΔ και ΑΕ προσδιορίζουν τις κορυφές Β και Γ του ζητούμενου τριγώνου.

Σύνθεση: Με βάση ένα ευθύγραμμο τμήμα ισο με 2τ και προσκείμενες πλευρές ω/2 και φ/2, κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΔΕ. Φλερνουμε στη συνέχεια τις μεσοκαθέτους στις ΑΔ και ΑΕ οι οποίες θατμήσουν την ΔΕ στα Β και Γ αντίσοιχα. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

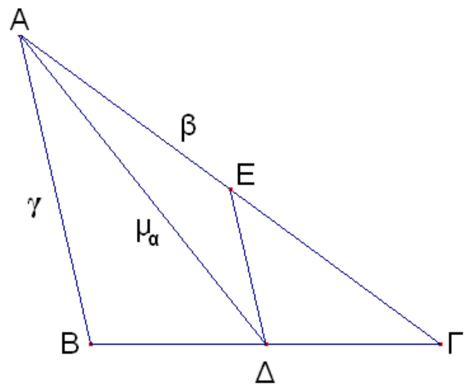
Απόδειξη: Από τις μεσοκάθετες έχουμε ότι ΒΔ=ΑΒ και ΓΕ=ΓΑ, άρα ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ=ΔΕ=2τ. Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΕ έχουμε ∠ω=2∠Δ και ∠φ=2∠Ε, όπως ζητείται από την ακφώνηση.

Διερεύνηση: Για να είναι κατασκευάσιμο το τρίγωνο ΑΒΓ θα πρέπει οι μεσοκάθετοι στις πλευρές του ΑΔΓ να τέμνονται εκτός του τριγώνου ΑΔΕ. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το

ΑΔΕ να είναι αμβλυγώνιο στο Α, που σημαίνει ότι οι άλλες δύο γωνίες πρέπει να έχουν άθροισμα μικρότερο από 90^o : $ω/2+φ/2<90^O$, δηλαδή $ω+φ<180^o$.

4] *Να κατασκευαστεί τρίγωνο* ΑΒΓ *από τα στοιχεία του* β, γ, $μ_α$.

Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο τρίγωνο έχει κατασκευαστεί και είναι το ΑΒΓ, με πλευρές β και γ και διάμεσο $ΑΔ=μ_α$. Έστω Ε, το μέσον της ΑΓ. Η ΔΕ λοιπόν συνδέει τα μέσα Δ και Ε των πλευρών του ΑΒΓ, άρα είναι παράλληλη με την ΑΒ και ισξ με ΑΒ/2. Οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι κατασκευάσιμο, από τις τρείς πλευρές του $ΑΔ=μ_α$, ΔΕ=γ/2 και ΕΑ=β/2.



Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το ΑΔΕ με πλευρές $ΑΔ=μ_α$, ΔΕ=γ/2 και ΕΑ=β/2. Στην προς το Ε προέκτασητης ΑΕ, παίρνουμε σημεό Γ ώστε ΕΓ=ΑΕ. Φέρνουμε την ΓΔ και στην προέκτασή της παίρνουμε το Β τέτοιο ώστε ΓΔ=ΔΒ. Φέρνουμε τέλος την ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο γιατί έχει πλευρά ΑΓ=2ΑΕ=2β/2=β, πλευρά ΑΒ=2ΔΕ αφού από την κατασκευή τα Δ και Ε είναι μεσα των ΒΓ και ΑΓ, δηλαδή ΑΒ=2ΔΕ=2γ/2=γ και διάμεσο $ΑΔ=μ_α$, από την κατασκευή.

Διερεύνηση: Για να είναι κατασκυεάσιμο το ΑΒΓ θα πρέπει να είναι κατασκευάσιμο το ΑΔΕ, δηλαδή τα μήκη $μ_α$, β/2 και γ/2 να απότελούν πλευρές τριγώνου. Δηλαδή:

$|ΑΕ-ΔΕ|<ΑΔ<|ΑΕ+ΔΕ|$ που μετά την αντικατάσταση γίνεται $|β-γ|<2μ_α<|β+γ|$.

Ασκήσεις για εξάσκηση:

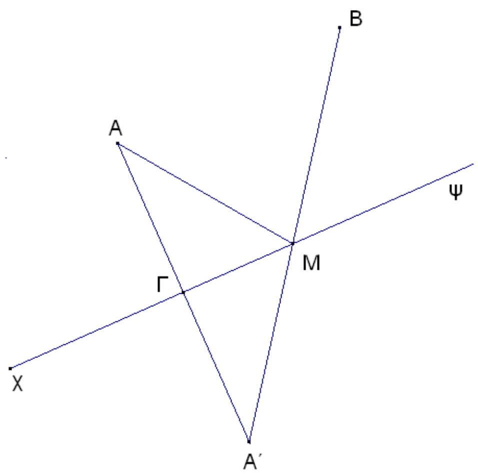
a. *Να κατασκευαστεί τρίγωνο* ΑΒΓ *από τα στοιχεία του* Α, $υ_α$, 2τ.
   (υπόδειξη: κατ΄αναλογία με τη 1)

b. *Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο* ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) *από τα στοιχεία του* $υ_α$ *και* 2τ.

c. *Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο* ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) *από τα στοιχεία του* β *και* $υ_α$.

d. *Δίδονται δύο ευθύγραμμα τμήματα* κ *και* λ *και δύο σημεία τα* Α *και* Β*.Να κατασκευαστεί μία ευθεία* ε *η οποία να απέχει από τα* Α *και* Β *αποστάσεις* κ *και* λ *αντίστοιχα.*

5] Πρόταση πρόβλημα: *Δίδεται μια ευθεία* Χ,Ψ *και δύο σημεία τα* Α *και* Β *στο ίδιο ημιεπίπεδο. Να βρεθεί πάνω στην* ΧΨ *ένα σημείο* Μ *τέτοιο ώστε* γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΧ)



Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο σημείο είναι το Μ. Φέρνουμε από το Α κάθετη στην ΧΨ και προεκτείνουμε την ΒΜ προς το Μ. Οι δύο ευθείες τέμνονται σ' ένα σημείο έστω το Α΄.

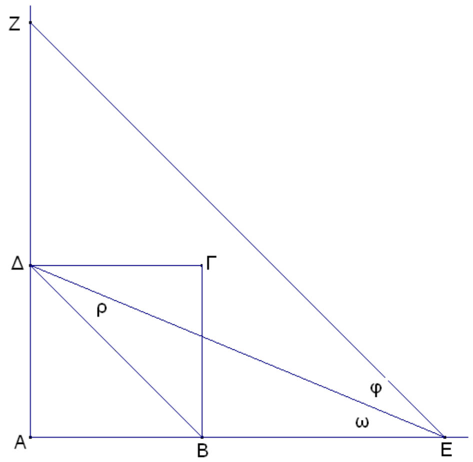
Τα δύο τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΜΑ καθότι: γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΨ)=γων(ΓΜΑ΄), έχουν κοινή την ΓΜ και είναι ορθογώνια. Οπότε ΑΓ= ΓΑ' που σημαίνει ότι το Α΄ είναι συμμετρικό του Α. και άρα κατασκευάσιμο, άρα κατασκευάσιμη είναι και η ΒΑ΄.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το συμμετρικό Α΄ του Α και φέρνουμε την Α΄Β η οποία θα τμήσει την στο Μ. Το Μ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΧ). Πράγματι: Τα δύο τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΜΑ, είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια, από την κατασκευή του συμμετρικού του Α, έχουν μια κοινή πλευρά και γων(ΑΜΧ)=γων(ΧΜΑ΄), αλλά και γων(ΓΜΑ΄)=γων(ΧΜΑ΄), οπότε και, γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΨ)=γων(ΓΜΑ).

Διερεύνηση: Αφού, από τα δεδομένα, τα Α και Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο, το Β και το συμμετρικό τα Α σε σχέση με την ΧΨ θα είναι εκατέρωθεν της ΧΨ. Έτσι η ΒΑ΄ θα έχει ένα κοινό σημείο με την ΧΨ. Αν το Α και το Β βρίσκονται πάνω στην ίδια κάθετο προς τη ΧΨ τότε η περίπτωση είναι τετριμμένη.

6] Πρόταση πρόβλημα: *Να κατασκευαστεί τετράγωνο με δεδομένο το άθροισμα της πλευράς και της διαγωνίου του.*



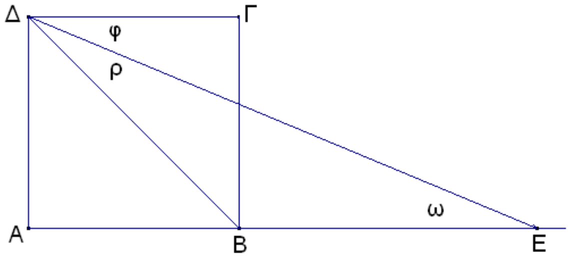
Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο τετράγωνο είναι το ΑΒΓΔ με ΑΒ+ΒΔ=λ δεδομένο. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και παίρνουμε ΒΕ=ΒΔ και την ΑΔ προς το Δ και παίρνουμε ΑΖ=ΔΒ. Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΔ και ΑΕΖ είναι ισοσκελή ορθογώνια, άρα γων(ΑΒΔ)=γων(ΑΕΖ) άρα ΒΔ//ΕΖ. Φέρνουμε την ΔΕ. Οπότε από το ισοσκελές από τη κατασκευή τρίγωνο ΔΕΒ έχουμε ω=ρ, ενώ από την παραλληλία των ΒΔ και ΕΖ, φ=ρ, άρα ω=φ, δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος τη ΑΕΖ, δηλαδή κατασκευάσιμη.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ με κάθετες πλευρές ίσες με λ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της ΑΕΖ, η οποία τέμνει την απέναντι πλευρά στο Δ. Ορίζουμε πάνω στην ΑΕ σημείο Β τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΒ και φέρνουμε κάθετες στα Β και Δ που τέμνονται στο Γ. Τα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.

Απόδειξη: Το τετράπλευρο είναι από την κατασκευή τετράγωνο. Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι ΒΔ+ΑΒ=λ. ή ότι ΒΔ=ΒΕ. Από την κατασκευή ΑΒ=ΑΔ άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές ορθογώνιο όπως και το ΑΕΖ οπότε από την ισότητα των γωνιών των βάσεών του έχουμε ότι ΒΔ//ΕΖ, άρα φ=ρ αλλά και φ=ω καθότι η ΕΔ είναι διχοτόμος, άρα ω=ρ δηλαδή το ΔΒΕ είναι ισοσκελές άρα ΒΔ=ΒΕ.

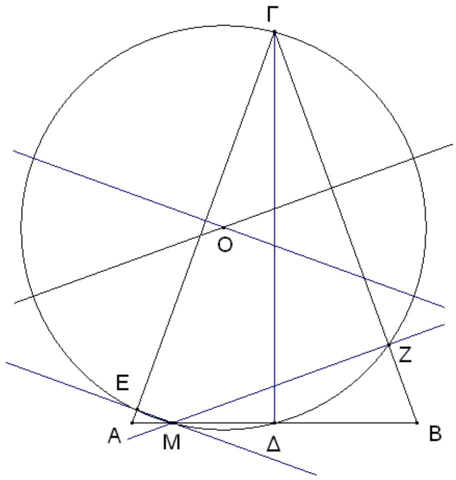
Άλλη λύση:

Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο τετράγωνο είναι το ΑΒΓΔ με ΑΒ+ΒΔ=λ δεδομένο.



Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και παίρνουμε ΒΕ=ΒΔ οπότε ΑΕ=λ. Φέρνουμε τη ΔΕ. Τότε από το ισοσκελές ΔΒΕ είναι ρ=ω αλλά και ω=φ, ως εντός εναλλάξ, άρα ρ=φ, που σημαίνει ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος την ΒΔΓ. Οπότε ω=π/8, δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΔ είναι κατά-σκευάσιμο ως ορθογώνιο με γνωστή τη μία κάθετη πλευρά και τη προσκείμενη οξεία γωνία κλπ.

7] Πρόταση θεώρημα: *Αν από τυχόν σημείο της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου αχθούν κάθετες προς τις ίσες πλευρές του τριγώνου, τότε τα ίχνη των καθέτων, η κορυφή και το μέσον της βάσης, βρίσκονται πάνω στην ίδια περιφέρεια.*



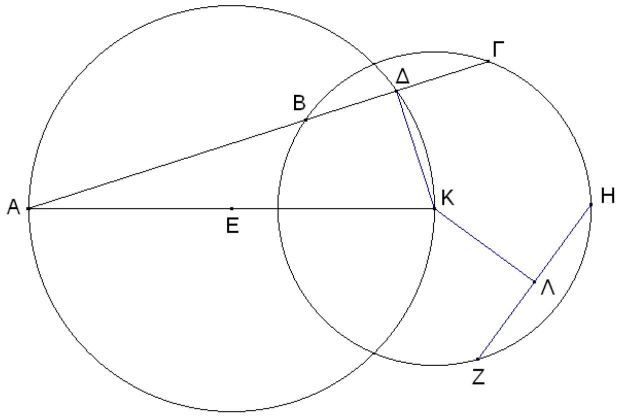
Έστω τρίγωνο ισόπλευρο το ΑΒΓ και Μ τυχόν σημείο της βάσης του και Δ το μέσον της. Από το Μ φέρνουμε τις ΜΕ και ΜΖ κάθετες στις ίσες πλευρές Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μια περιφέρεια που περνά από τα Ε, Μ, Δ, Ζ, και Γ.

(Ανάλυση: Ξέρουμε πως για να είναι τέσσερα διαφορετικά σημεία πάνω στην ίδια περιφέρεια θα πρέπει να είναι κορυφές ενός εγγράψιμου τετραπλεύρου.) Το τετράπλευρο ΕΜΔΓ έχει δύο απέναντι γωνίες την Ε και τη Δ παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο. Όμοια και το ΕΜΖΓ. Οι κύκλοι δε που τα περιγράφουν έχουν τρία κοινά σημεία τα Ε, Μ και Γ άρα ταυτίζονται. Υπάρχει λοιπόν μια περιφέρεια που περνά τα Ε, Μ, Δ, Ζ, και Γ.

8] Πρόταση πρόβλημα: *Από δοθέν σημείο* Α *να αχθεί ευθεία τέμνουσα δοθέντα κύκλο, ώστε επί της ευθείας αυτής να ορίζεται χορδή δεδομένου μήκους.*

Ανάλυση: Έστω ότι έχει αχθεί η τέμνουσα από το σημείο Α, η ΑΓ η οποία τέμνει τον κύκλο με κέντρο το Κ αποκόπτοντας τη χορδή ΒΓ ίση με τη δοσμένη. Ενώνουμε το μέσον Δ της χορδής με το Κ. Τρίγωνο ΑΚΔ που σχηματίζεται, είναι ορθογώνιο με τη AK δεδομένη και την KΔ κατασκευάσιμη αφού η ΒΓ είναι δεδομένη (ίσες χορδές απέχουν εξ' ίσου από το κέντρο του κύκλου) άρα το ΑΚΔ είναι κατασκευάσιμο.

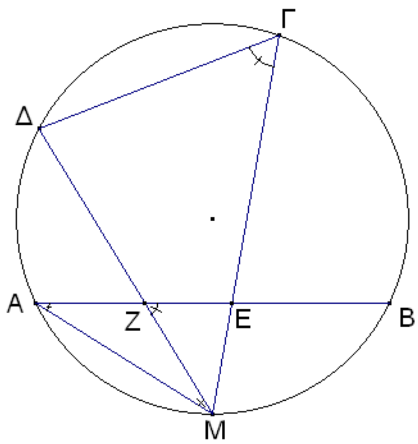
<u>Σύνθεση</u>: Με κέντρο τυχόν σημείο του δεδομένου κύκλου και ακτίνα ίση με το μήκος της δεδομένης χορδής ορίζω μια χορδή την ΖΗ και ενώνω το μέσον της Λ με



το Κ. Με υποτείνουσα την ΑΚ κατασκευάζω ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά ίση με τη ΚΛ, το ΑΚΔ. Το Δ θα πέσει προφανώς στο εσωτερικό του κύκλου. Προεκτείνω την ΑΔ η οποία τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Η ΑΓ είναι η ζητούμενη τέμνουσα.

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή το ΚΔ είναι ορθογώνια εκ κατασκευής η κδ είναι κάθετη στην ΒΓ, η ΚΔ είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τη χορδή. Όμως ΚΔ=ΚΛ, Άρα ΒΓ=ΖΗ αφού απέχουν το ίδιο από το κέντρο.

9] Πρόταση θεώρημα: *Δίδεται κύκλος* Ο *και μια χορδή του η* ΑΒ. *Από το μέσον* Μ *της του τόξου* ΑΒ *φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες την* ΜΔ *και* ΜΓ, *οι οποίες τέμνουν τη χορδή* ΑΒ *στα σημεία* Ζ *και* Ε *αντίστοιχα. Τότε το σχηματιζόμενο τετράπλευρο* ΖΕΓΔ *είναι εγγράψιμο σε κύκλο.*



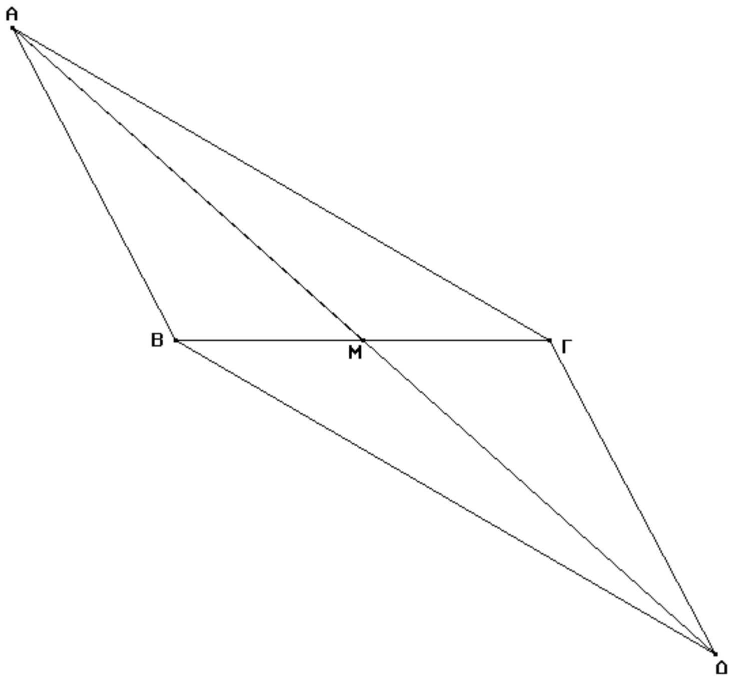
(Ανάλυση: Αρκεί να αποδείξουμε ότι μια γωνία, η Γ ισούται με την απέναντι εξωτερική της την Ζ. Η Ζ όμως ως εξωτερική του τριγώνου ΑΖΜ είναι γων(Ζ)= γων(Α) +γων(Μ).

Όμως η Α βαίνει στο τόξο ΜΒ και ως εγγεγραμμένη είναι το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης, δηλαδή ίση με το μισό του τόξου ΜΑ, και το ίδιο συμβαίνει με την Μ και το τόξο ΑΔ.

Δηλαδή: γων(Ζ)=τοξ(ΜΒ)/2+τοξ(ΑΔ)/2 αλλά τοξ(ΜΒ)=τοξ(ΜΑ). Άρα: γων(Ζ)=τοξ(ΑΜ)/2=γων(Γ).

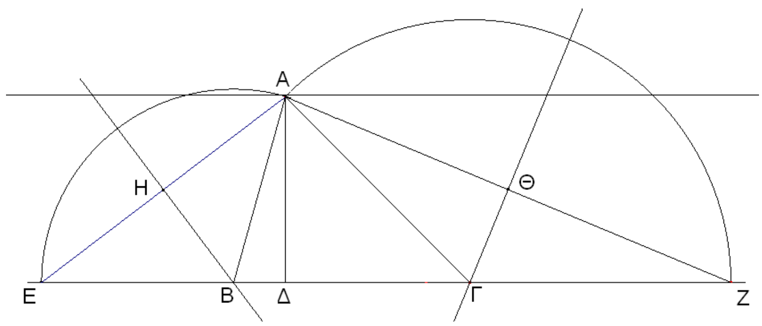
10] Πρόταση πρόβλημα: *Να κατασκευασθεί τρίγωνο από τα εξής στοιχεία:*

a) β, γ, μ_α



a) Υπόδειξη: Προεκτείνουμε τη διάμετρο μ_α κατά ίσο τμήμα το ΜΔ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι κατασκευάσιμο.

b) 2τ, Α, υ_α
Υπόδειξη: Προεκτείνουμε τη βάση προς Β και Γ και παίρνουμε αντίστοιχα ΒΕ=ΒΑ και ΓΖ=ΓΑ. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι κατασκευάσιμο καθότι ΕΖ είναι δεδομένο, το ύψος ΑΔ επίσης, και η γωνία ΕΑΖ, είναι κατασκευάσιμη αφού είναι (π-Α/2), ενώ τα σημεία Β και Γ προσδιορίζονται από τις μεσοκάθετες στις ΑΕ και ΑΖ.



Ασκήσεις για εξάσκηση:

11] *Να αχθεί ευθεία η οποία να απέχει από δύο δοθέντα σημεία δοθείσες αποστάσεις.*

12] *Δίδεται ένας κύκλος και ένα σημείο εκτός αυτού. Να αχθεί ευθεία που να διέρχεται από το σημείο και να είναι εφαπτόμενη στον κύκλο.*

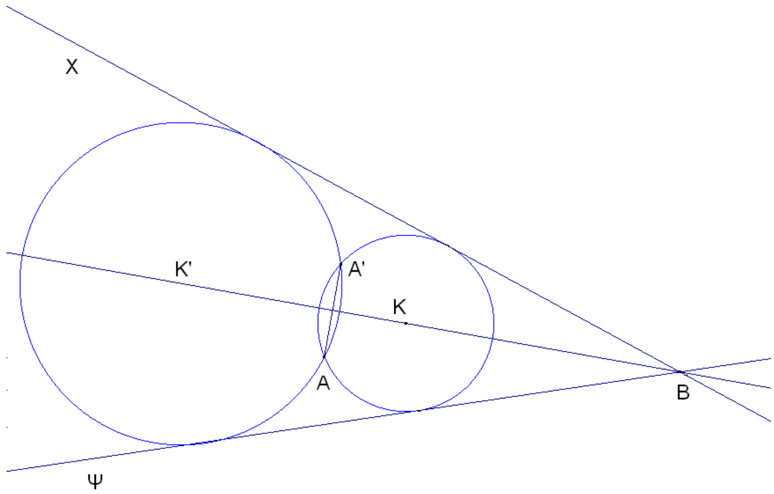
13] *Δίδεται ευθεία και σημείο εκτός αυτής. Να κατασκευαστεί κύκλος με κέντρο το δοθέν σημείο εφαπτόμενος στην ευθεία.*

Δέκα προβλήματα που αποδίδονται στον Απολλώνιο

i. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη από τρία δοθέντα σημεία*
(πρόκειται για την περιγεγραμμένη σε τρίγωνο περιφέρεια)

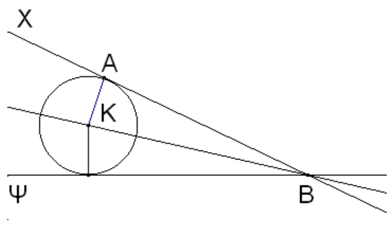
ii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη από δύο δοθέντα σημεία και εφαπτόμενη δοθείσης ευθείας*

iii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη διά δοθέντος σημείου και εφαπτόμενη δύο δοθέντων ευθειών*

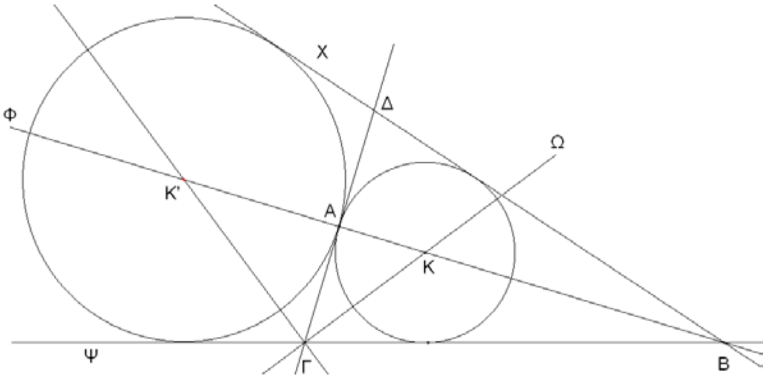


1η Περίπτωση: Έστω οι δοθείσες ευθείες οι Χ και Ψ ότι τέμνονται στο Β και ότι το δοθέν σημείο Α δεν βρίσκεται πάνω σε καμιά από τις δοθείσες ευθείες, ούτε πάνω στην διχοτόμο της γωνίας των Χ και Ψ. Έστω ακόμη ότι η ζητούμενη περιφέρεια έχει κατασκευαστεί και είναι αυτή με κέντρο το Κ. Το Κ προφανώς βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας ΧΒΨ, ενώ το συμμετρικό του Α, το Α'που είναι κατασκευάσιμο, θα βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην κατασκευή περιφέρεια που διέρχεται από δυο δεδομένα σημεία το Α και το Α'και εφάπτεται δοθείσας της Χ (ή της Ψ).

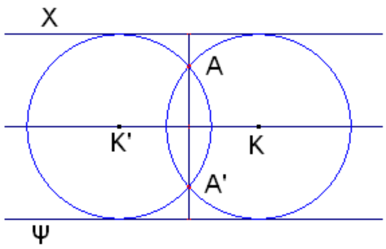
2η Περίπτωση: Έστω οι δοθείσες ευθείες οι Χ και Ψ ότι τέμνονται στο Β και ότι το δοθέν σημείο Α βρίσκεται πάνω σε μία από τις δοθείσες ευθείες, έστω την Χ. Τότε η ζητούμενη περιφέρεια που πρέπει να διέρχεται από το Α θα είναι εφαπτόμενη στην Χ, άρα το κέντρο της θα βρίσκεται πάνω στην κάθετο της Χ στο σημείο Α και επίσης πάνω στη διχοτόμο. Το πρόβλημα τότε έχει μία λύση.



3η Περίπτωση: Έστω ότι οι δοθείσες ευθείες, οι Χ και Ψ, τέμνονται στο Β και ότι το δοθέν σημείο Α βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας των Χ και Ψ. Αν φέρουμε τη διερχόμενη από το Α κάθετη στη διχοτόμο ΒΦ, τότε ο ζητούμενος κύκλος ό εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΓΒΔ, ενώ μια δεύτερη λύση είναι ο παρεγγεγραμμένος στη γωνία ΧΒΨ:



4η Περίπτωση: Αν οι χ και ψ είναι παράλληλες και το Α βρίσκεται εντός της ζώνης των παραλλήλων τότε έχουμε δύο λύσεις:



iv. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτομένη τριών δοθεισών ευθειών*

v. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχομένη από δύο δοθέντα σημεία και εφαπτόμενη δοθείσας περιφέρειας.*

vi. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη δια δοθέντος σημείου και εφαπτόμενη δοθείσας ευθεία και δοθείσας περιφέρειας.*

vii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτόμενη δοθείσας ευθείας και εφαπτόμενη δύο δοθεισών περιφερειών*

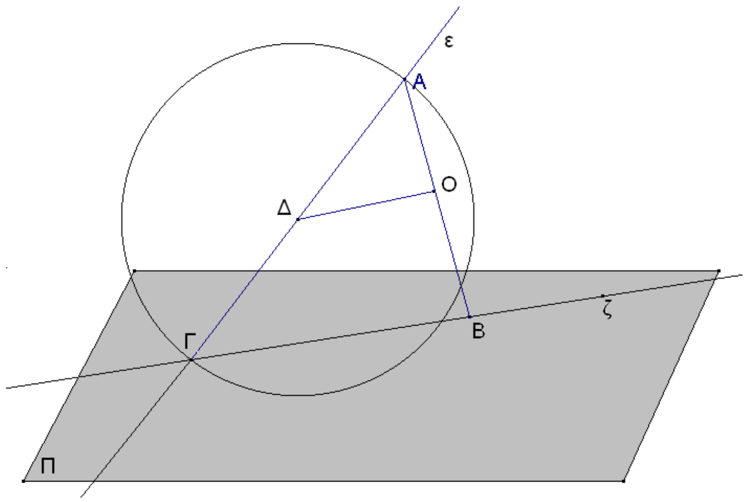
viii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη διά δοθέντος σημείου και εφαπτόμενη δύο δοθεισών περιφερειών.*

ix. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτόμενη δύο δοθεισών ευθειών και δοθείσας περιφέρειας.*

x. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτόμενη τριών δοθεισών περιφερειών.*

Προβλήματα και θεωρήματα στο χώρο

13] Πρόταση πρόβλημα: *Δίδεται επίπεδο* Π, *ευθεία ε και τυχόν σημείο* Ο, *εκτός του* Π *και εκτός της* ε. *Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα* ΑΒ, *διερχόμενο από το* Ο *και τέτοιο ώστε το* Α *να κείται επί της* ε, *το* Β *επί του επιπέδου* Π *ενώ το* Ο *να είναι το μέσον του.*



Ανάλυση: Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο Γ και ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, στο παραπάνω σχήμα είναι το ζητούμενο. Ενώνουμε το Β με το Γ και πάνω στο επίπεδο που ορίζουν τα Α, Β και Γ, πάνω στο οποίο προφανώς βρίσκεται το Ο, φέρνουμε από το Ο παράλληλο στην ΒΓ. Αυτή θα τμήσει την ΑΓ στο σημείο Δ, το οποίο είναι το μέσον του ΑΓ. Το σημείο Δ λοιπόν είναι κατασκευάσιμο, όπως κατασκευάσιμη είναι και η ευθεία Γζ ως τομή του Π με το επίπεδο που ορίζει η δεδομένη ευθεία ε με το δεδομένο σημείο Ο.

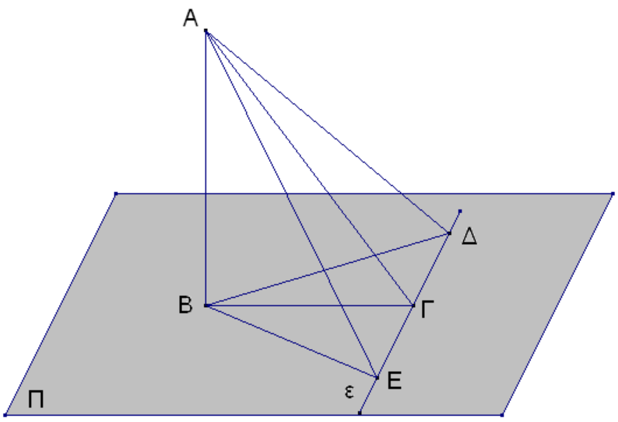
Σύνθεση: Έστω Γζ η τομή του Π με το επίπεδο που ορίζει η ε με το Ο. Πάνω στο επίπεδο αυτό φέρνω παράλληλο από το Ο προς την Γζ και έστω Δ η τομή της με την ε. Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΓ γράφω περιφέρεια πάνω στο επίπεδο που ορίζει η ε με το Ο. Αυτή θα τμήσει την ε στο Α. Φέρνω την ΑΟ η οποία προεκτεινόμενη θα τμήσει την Γζ (ως ομοεπίπεδες) στο Β. Το ΑΒ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Το Δ είναι, από την κατασκευή, το μέσον της ΓΑ. Στο τρίγωνο ΑΓΒ η ΑΔ διέρχεται από το μέσον Δ της ΑΓ κα είναι παράλληλη προς την ΓΒ, άρα περνά από το μέσον Ο της ΑΒ.

Διερεύνηση: Στην περίπτωση που η ε τέμνει το επίπεδο Π, η παραπάνω λύση είναι μονοσήμαντη, αφού το Δ ορίζεται μονοσήμαντα.
Αν η ε είναι παράλληλη προς το Π το πρόβλημα δεν έχει λύση.

14] Θεώρημα των τριών Καθέτων: *Εάν μια ευθεία, έστω η ΑΒ, είναι κάθετος πάνω σ' ένα επίπεδο Π και η ΒΓ κάθετη πάνω σε μια ευθεία, έστω την ε, του επιπέδου Π, τότε η ΑΓ είναι κάθετος στην ε.*

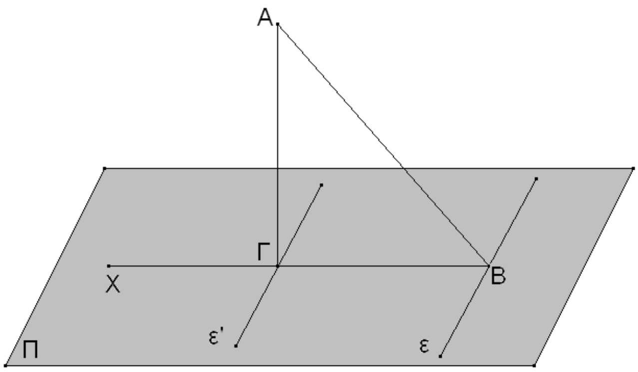
(ΑΝΑΛΥΣΗ: Διερευνούμε τις περιπτώσεις που μια ευθεία είναι κάθετη σε μια άλλη για να δούμε ποια μπορεί εδώ να αξιοποιηθεί π.χ. ακτίνα και εφαπτόμενη, διαδοχικές πλευρές ορθογωνίου, ύψος τριγώνου, διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου άρα και ύψος, κλπ. Εξετάζουμε το τελευταίο.)
Παίρνουμε δύο σημεία πάνω στην ε εκατέρωθεν του Γ και ισαπέχοντα απ' αυτό,



τα Δ και Ε. Αν αποδείξουμε ότι ΑΔ = ΑΕ, έχουμε τελειώσει καθότι τότε η ΑΓ θα είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΑΔ, από την κατασκευή, άρα και ύψος.
Πράγματι στα τρίγωνα ΒΓΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες μία προς μία τις κάθετες πλευρές, (η ΒΑ είναι κοινή, ενώ από την κατασκευή ΒΓ είναι μεσοκάθετος στην ΕΔ) οπότε για τον ίδιο λόγο είναι ίσα και τα ΑΒΕ και ΑΒΔ, άρα και ΑΕ = ΑΔ. Το οποίο ήταν προς απόδειξη.

15] Θεώρημα των τριών Καθέτων (αντίστροφο):

Από ένα τυχαίο σημείο το Α έξω από ένα επίπεδο, το Π, φέρνουμε την ΑΒ κάθετη πάνω σε τυχαία ευθεία του επιπέδου Π, έστω την ε, και πάνω στο επίπεδο Π την ΒΧ κάθετη στην ε. Αν από το Α φέρουμε μία κάθετη στην ΒΧ, τότε αυτή θα είναι κάθετη στο επίπεδο Π.

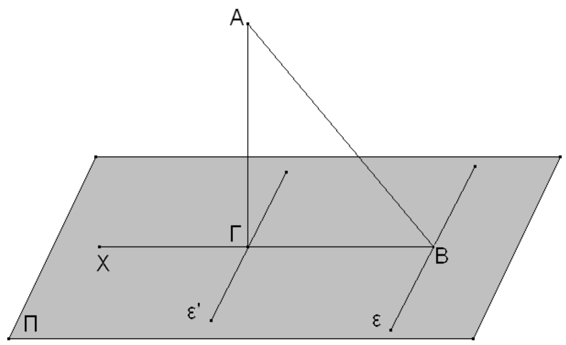


Επειδή η ε είναι κάθετη στην ΑΒ αλλά και στην ΒΧ, άρα είναι κάθετη στο επίπεδο ΧΒΑ. Φέρνουμε από το Γ μία παράλληλη στην ε, η οποία θα είναι κάθετη και στο επίπεδο ΧΒΑ, οπότε θα είναι κάθετη στην ΓΑ που είναι ευθεία του επιπέδου ΧΒΑ. Η ΑΓ λοιπόν είναι κάθετη στην ε΄ και στην ΒΧ άρα είναι κάθετη στο επίπεδο Π.

16] Πρόταση πρόβλημα: Δίδεται ένα επίπεδο Π και ένα σημείο, έστω το Α, εκτός αυτού. Να αχθεί κάθετος από το Α στο επίπεδο Π.

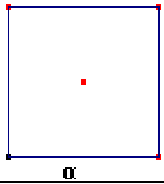
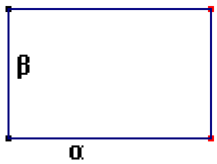
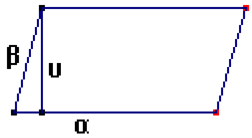
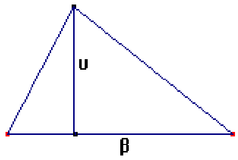
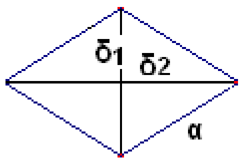
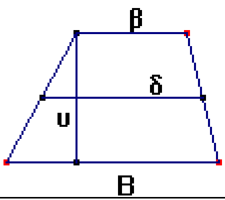
<u>Ανάλυση:</u> Έστω ότι η ΑΒ είναι η ζητούμενη κάθετος από το Α στο επίπεδο Π. Γράφουμε μια τυχαία ευθεία, την ε, πάνω στο επίπεδο π και από τον πόδα β της καθέτου φέρουμε κάθετο στην ε, την ΒΓ. Φέρουμε την ΑΓ, η οποία σύμφωνα με το θεώρημα των τριών καθέτων, είναι κάθετη στην ε.

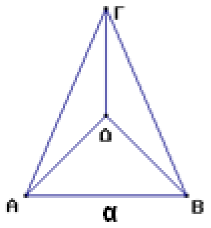
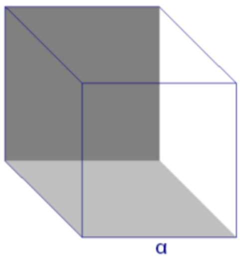
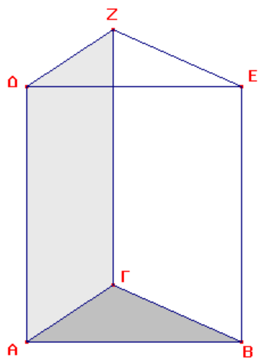
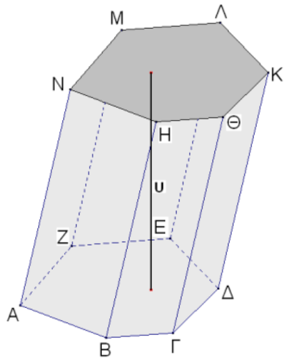
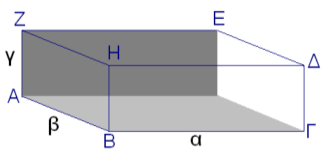
<u>Σύνθεση:</u> Θεωρούμε μια τυχούσα ευθεία του επιπέδου Π, ας είναι η ε, και από το σημείο Α φέρουμε μια κάθετη στην ε, την ΑΒ. Επί του επιπέδου Π φέρουμε την ΒΧ, κάθετη στην ε. Από το σημείο τώρα Α φέρουμε μια κάθετη στην ΒΧ, την ΑΓ. Η ΑΓ είναι η ζητούμενη κάθετος από το Α στο επίπεδο Π.

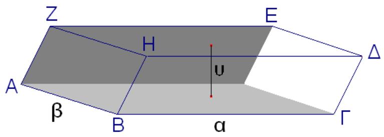
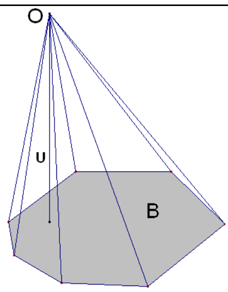
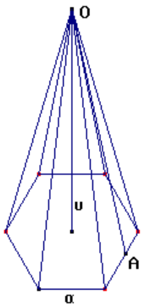
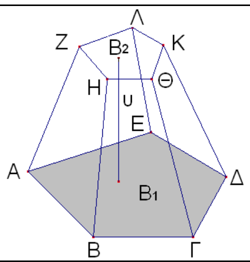
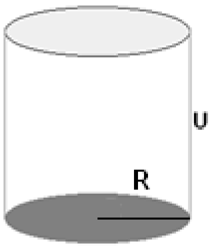
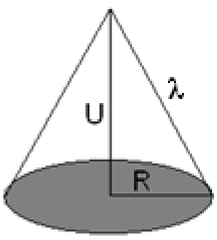


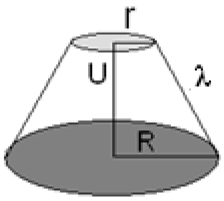
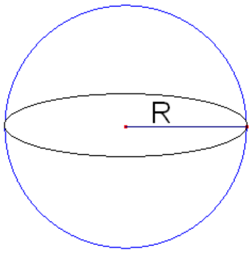
<u>Απόδειξη</u>:(Προφανής από θεώρημα 12)

Περίμετροι και Εμβαδά επιπέδων σχημάτων

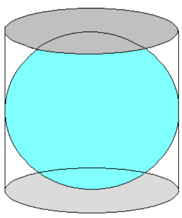
Τετράγωνο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 4\alpha$	$\mathrm{E} = \alpha^2$
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 2(\alpha + \beta)$	$\mathrm{E} = \alpha\beta$
Πλάγιο παραλληλόγραμμο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 2(\alpha + \beta)$	$\mathrm{E} = \alpha\upsilon$
Τρίγωνο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 2\tau = \alpha + \beta + \gamma$	$\mathrm{E} = \dfrac{\beta\upsilon}{2}$
Ρόμβος		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 4\alpha$	$\mathrm{E} = \dfrac{\delta_1\delta_2}{2}$
Τραπέζιο		Περίμετρος	Εμβαδόν
		$\Pi = 4\alpha$	$\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{B} + \beta}{2}\upsilon = \delta\upsilon$

<table>
<tr><td colspan="5">Επιφάνειες, παράπλευρες επιφάνειες, όγκοι στερεών</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κανονικό
Τετράεδρο
πλευράς α</td><td rowspan="2">
</td><td>Ύψος</td><td>Συνολική επιφάνια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$
Όλα τα ύψη ενός κανονικού τετραέδρου είναι ίσα μεταξύ τους.</td><td>$E_\sigma = \alpha^2\sqrt{3}$</td><td>$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κύβος</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$E_\sigma = 4\alpha^2$</td><td>$E_\pi = 6\alpha^2$</td><td>$V = \alpha^3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ορθό Πρίσμα</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>Περίμετρος της βάσης, επί το ύψος, συν το εμβαδόν των δύο βάσεων</td><td>Περίμετρος της βάσης, επί το ύψος</td><td>$V = B\upsilon$
(εμβαδόν της βάσης επί το ύψος)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Πλάγιο Πρίσμα</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>Περίμετρος της βάσης, επί το παράπλευρο ύψος, συν το εμβαδόν των δύο βάσεων</td><td>Περίμετρος της βάσης, επί το παράπλευρο ύψος,</td><td>$V = B\upsilon$
(εμβαδόν της βάσης επί το ύψος)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ορθογώνιο παραλ/πεδο</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$E_\sigma = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$</td><td>$E_\sigma = 2(\alpha + \beta)\gamma$</td><td>$V = \alpha\beta\gamma$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Πλάγιο παραλληλεπίπεδο</td><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">$V = \alpha\beta\upsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Πυραμίδα</td><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">$V = \frac{1}{3}\mathrm{B}\upsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κανονική εξαγωνική πυραμίδα</td><td rowspan="2"></td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">Αφήνεται ως άσκηση</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κόλουρη Πυραμίδα</td><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Όγκος</td></tr>
<tr><td colspan="3">$V_k = \frac{1}{3}\upsilon(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κύλινδρος</td><td rowspan="2"></td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}_\sigma = 2\pi R(\upsilon + R)$</td><td>$\mathrm{E}_\pi = 2\pi R\upsilon$</td><td>$V = \pi R^2\upsilon$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κώνος</td><td rowspan="2"></td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Παράπλευρη επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{E}_\sigma = \pi R(\lambda + R)$</td><td>$\mathrm{E}_\pi = \pi R\lambda$</td><td>$V = \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Κόλουρος Κώνος</td><td rowspan="2">
</td><td>Συνολική επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$E_{\sigma} = \pi\lambda(R+r) + \pi(R^2 + r^2)$</td><td>$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Σφαίρα</td><td rowspan="2">
</td><td>επιφάνεια</td><td>Όγκος</td></tr>
<tr><td>$E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2$</td><td>$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi R^3$</td></tr>
</table>

Θεώρημα του Αρχιμήδη: Η επιφάνεια μιας σφαίρας εγγεγραμμένης σε κύλινδρο είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.



Απόδειξη: Έστω R η ακτίνα της σφαίρας. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου

$$E_{\pi} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$$

Όσο και η επιφάνεια της σφαίρας