ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΦΙΛΑΡΕΤΗ ΚΑΡΑΤΖΟΓΛΟΥ-ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΥ

Πάτρα 2010

Κεφάλαιο 1

Η Ουράνια Σφαίρα

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Όταν κάποιος παρατηρεί τον ουρανό, μια σκοτεινή και ξάστερη νύχτα, έχει την αίσθηση ότι τα ουράνια σώματα βρίσκονται στην εσωτερική επιφάνεια μιας σφαίρας που έχει κέντρο τον παρατηρητή και ακτίνα απροσδιόριστη. Την υποθετική αυτή σφαιρική επιφάνεια ονομάζουμε **ουράνια σφαίρα**. Τις προοπτικές θέσεις των διαφόρων ουρανίων σωμάτων στην επιφάνεια αυτή καλούμε **φαινόμενες θέσεις** (Σχήμα 1.1.1). Η ευθεία που ενώνει το μάτι του παρατηρητή με ένα σημείο πάνω στην ουράνια σφαίρα ονομάζεται **οπτική ακτίνα**.

Κάθε επίπεδο που περνάει από το κέντρο της ουράνιας σφαίρας την τέμνει κατά ένα μέγιστο κύκλο, ενώ οποιοδήποτε άλλο επίπεδο την τέμνει κατά ένα μικρό κύκλο. Το τόξο μεγίστου κύκλου που συνδέει δυο σημεία της ουράνιας σφαίρας καλείται **γωνιώδης απόσταση** και καμία σχέση δεν έχει με την πραγματική απόσταση των σημείων.

Η διεύθυνση της κατακορύφου που περνάει από τη θέση ενός παρατηρητή τέμνει την ουράνια σφαίρα σε δυο σημεία Z, Z′ (Σχήμα 1.1.2). Αυτό που βρίσκεται πάνω από το κεφάλι του παρατηρητή ονομάζεται **ζενίθ**, ενώ το αντιδιαμετρικό του ονομάζεται **ναδίρ**. Το επίπεδο που τέμνει κάθετα το ευθύγραμμο τμήμα ζενίθ - ναδίρ και περνάει από το μέσο του, αποτελεί τον **μαθηματικό ορίζοντα**, ενώ **φυσικός** ή **ορατός ορίζοντας** είναι το μέρος της επιφάνειας της γης που είναι ορατό από τον παρατηρητή. Το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τα μάτια του παρατηρητή αποτελεί τον **αστρονομικό ορίζοντα**. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από τα σημεία ζενίθ και ναδίρ ονομάζονται **κατακόρυφοι κύκλοι**.

1.2 Οι κινήσεις της Γης

Οι κυριότερες κινήσεις της Γης είναι δύο: η περιστροφή της γύρω από τον άξονά της από τη δύση προς την ανατολή (ορθή φορά) και η περιφορά της γύρω από τον Ήλιο σε (περίπου) 365.25 ημέρες.

Αποτέλεσμα της πρώτης κίνησης της Γης είναι η εναλλαγή ημέρας και νύχτας, καθώς και η **φαινόμενη ημερήσια κίνηση** όλης της ουράνιας σφαίρας από την ανατολή προς τη δύση (ανάδρομη φορά). Αυτή η κίνηση γίνεται γύρω από τον άξονα της Γης που περνά από το κέντρο της, τον βόρειο και το νότιο γήινο πόλο και ο οποίος, όταν προεκταθεί, τέμνει την ουράνια σφαίρα στον βόρειο και το νότιο ουράνιο πόλο. Επειδή ο βόρειος πόλος προβάλλεται κοντά στους αστερισμούς της Μικρής και της Μεγάλης Άρκτου, ονομάζεται **αρκτικός**. Ο νότιος πόλος λέγεται **ανταρκτικός**.

Το επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της Γης και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής της ονομάζεται **ισημερινό επίπεδο**. Αυτό τέμνει τη Γη κατά ένα μέγιστο κύκλο που αποτελεί τον **γήινο ισημερινό**. Το επίπεδο του γήινου ισημερινού, όταν προεκταθεί, τέμνει την ουράνια σφαίρα κατά ένα μέγιστο κύκλο που αποτελεί τον **ουράνιο ισημερινό**.

Ο μέγιστος κύκλος ο οποίος περνάει από τα σημεία ζενίθ και ναδίρ ενός τόπου και τους πόλους της ουράνιας σφαίρας λέγεται **μεσημβρινός**. Όταν ένα ουράνιο σώμα, κατά τη φαινόμενη κίνησή του, διέρχεται από τον μεσημβρινό ενός τόπου, λέμε ότι αυτό **μεσουρανεί**. Η πλησιέστερη προς το ζενίθ του τόπου μεσουράνηση ονομάζεται **άνω μεσουράνηση**, ενώ η άλλη **κάτω μεσουράνηση**.

Τα σημεία N και S στα οποία τέμνει ο μεσημβρινός τον ορίζοντα ονομάζονται, αντίστοιχα, βόρειο και νότιο σημείο. Το N βρίσκεται πλησιέστερα στο βόρειο πόλο. Η ευθεία NS καλείται **μεσημβρινή γραμμή**. Τα σημεία E και W που τέμνει ο ισημερινός τον ορίζοντα είναι το ανατολικό και το δυτικό σημείο, αντίστοιχα. Το E βρίσκεται δεξιά του παρατηρητή όταν αυτός είναι στραμένος προς το βόρειο σημείο N. Τα τέσσερα σημεία N, S, E και W είναι τα **σημεία του ορίζοντα** (Σχήμα 1.1.2).

Η περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο οφείλεται στην αμοιβαία βαρυτική έλξη τους. Η τροχία της Γης είναι μια έλλειψη με μικρή εκκεντρότητα και έχει περίοδο 365,25 ημέσρες. Το επίπεδο της τροχιάς είναι σταθερό. Αυτή η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο υπακούει στους τρεις νόμους του Kepler.

Αποτέλεσμα της περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι η **ετήσια φαινόμενη κίνηση** του Ήλιου από δύση προς ανατολή κατά 1^o περίπου την ημέρα (Σχήμα 1.2.1). Η φαινόμενη ετήσια τροχιά του Ήλιου ονομάζεται **εκλειπτική**. Ονομάστηκε έτσι γιατί από την αρχαιότητα παρατηρήθηκε ότι, όταν η Σελήνη περνούσε κοντά από αυτή την τροχιά, συνέβαιναν εκλείψεις. Το επίπεδο αυτής της τροχιάς είναι σταθερό και σχηματίζει με το ισημερινό επίπεδο γωνία 23,5^o περίπου που καλείται **λόξωση της εκλειπτικής**. Τα σημεία γ και γ′ τομής του ισημερινού με την εκλειπτική αποτελούν το **εαρινό** και το **φθινοπωρινό ισημερινό σημείο**, αντίστοιχα. Η ευθεία γγ′ λέγεται **γραμμή των ισημεριών**. Η κάθετη σ' αυτήν, EE', ονομάζεται **γραμμή των τροπών**. Στα σημεία E και E' ο Ήλιος έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από τον ισημερινό (Σχήμα 1.2.2). Οι αρχαίοι Έλληνες τα ονόμαζαν **ηλιοστάσια** γιατί, κατά το μεσημέρι, ο Ήλιος φαίνεται να διατηρεί σταθερή τη θέση του για μερικές ημέρες. Η διάμετρος της ουράνιας σφαίρας που είναι κάθετη στο επίπεδο της εκλειπτικής λέγεται **άξονας της εκλειπτικής**. Τα άκρα της αποτελούν τους **πόλους της εκλειπτικής**. Ο πόλος που βρίσκεται πιο κοντά στον βόρειο πόλο της ουράνιας σφαίρας είναι ο βόρειος πόλος της εκλειπτικής, ενώ ο άλλος είναι ο νότιος πόλος της εκλειπτικής.

Κατά την αρχαιότητα, η θέση της εκλειπτικής καθοριζόταν με βάση 12 αστερισμούς που βρίσκονται μέσα σε μια σφαιρική ζώνη 8^o εκατέρωθεν της εκλειπτικής. Καθένας από αυτούς τους αστερισμούς καταλαμβάνει περιοχή εύρους περίπου 30^o (Σχήμα 1.2.3). Κατά σειρά είναι:

Κριός, Ταύρος, Δίδυμοι, Καρκίνος, Λέων, Παρθένος,
Ζυγός, Σκορπιός, Τοξότης, Αιγόκερως, Υδροχόος, Ιχθείς.

Κάθε αστερισμός έχει το δικό του σύμβολο. Για τον Κριό χρησιμοποιείται το γ. Επειδή οι αστερισμοί αυτοί έχουν ονόματα κυρίως μικρών ζών, ονομάστηκαν **ζώδια**, η δε σφαιρική περιοχή που αυτοί καταλαμβάνουν, **ζωδιακός κύκλος**. Ο Ήλιος, η Σελήνη κι οι πλανήτες προβάλλονται πάντα μέσα στο ζωδιακό κύκλο.

Η γραμμή των ισημεριών και η γραμμή των ηλιοστασίων χωρίζουν την εκλειπτική σε 4 άνισα μέρη τα οποία ορίζουν τις 4 εποχές του έτους (Σχήμα 1.2.4). Για το βόρειο ημισφαίριο οι εποχές έχουν ως εξής:

Άνοιξη: έναρξη 21 Μαρτίου, διάρκεια 92 ημέρες και 20,2 ώρες.

Καλοκαίρι: έναρξη 21 Ιουνίου, διάρκεια 92 ημέρες και 14,4ώρες.

Φθινόπωρο: έναρξη 22 Σεπτεμβρίου, διάρκεια 89 ημέρες και 16,7 ώρες.

Χειμώνας: έναρξη 22 Δεκεμβρίου, διάρκεια 89 ημέρες και 0,5 ώρες.

Η διάρκεια της κάθε εποχής καθορίζεται με βάση το 2ο νόμο του Kepler (νόμος των εμβαδών). Αν οι γραμμές των ισημεριών και των ηλιοστασίων συνέπιπταν με τους άξονες της έλλειψης που γράφει η Γη γύρω από τον Ήλιο, τότε η άνοιξη θα είχε ίση διάρκεια με το καλοκαίρι και το φθινόπωρο με τον χειμώνα.

Εκτός από τις παραπάνω κινήσεις, θα αναφερθούμε σύντομα σε δύο ακόμη κινήσεις της Γης, την **μετάπτωση των ισημεριών** και την **κλόνηση του άξονα**. Και οι δύο οφείλονται στις παρέλξεις του Ήλιου, της Σελήνης και των άλλων πλανητών πάνω στο ισημερινό εξόγκωμα της Γης. Αν, δηλαδή, η Γη είχε σχήμα σφαιρικό τότε δεν θα υπήρχαν αυτά τα δύο φαινόμενα. Επειδή όμως η Γη είναι περίπου σφαιροειδής κι επιπλέον παρουσιάζει εξόγκωμα στον ισημερινό, έχουμε την μεταπτωτική κίνηση και την κλόνηση. Αυτές οι κινήσεις οφείλονται και στο γεγονός ότι ο άξονας περιστροφής της Γης σχηματίζει γωνία ($23{,}5^o$) με τον άξονα της εκλειπτικής.

Για να κατανοήσουμε την μετάπτωση μπορούμε να δούμε την κίνηση μιας σβούρας (Σχήμα 1.2.5). Ας υποθέσουμε ότι η σβούρα περιστρέφεται γρήγορα γύρω από τον άξονά της, ο οποίος σχηματίζει γωνία με την κατακόρυφη. Θα παρατηρήσουμε ότι, καθώς η σβούρα περιστρέφεται, ο άξονάς της κινείται αργά γύρω από την κατακόρυφη. Το ίδιο κάνει και ο άξονας της Γης, ο οποίος περιφέρεται γύρω από τον άξονα της εκλειπτικής με περίοδο 25.800 χρόνια, γράφοντας μια κωνική επιφάνεια (Σχήμα 1.2.6). Η κλόνηση έχει ως αποτέλεσμα ο πόλος του ισημερινού, αντί να διαγράφει περιφέρεια κύκλου με κέντρο τον πόλο της εκλειπτικής (λόγω της μετάπτωσης), τελικά να διαγράφει μια κλειστή κυματοειδή καμπύλη.

Την μετάπτωση των ισημεριών ανακάλυψε πρώτος ο Ίππαρχος. Καθώς σύγκρινε τις εκλειπτικές συντεταγμένες ορισμένων αστέρων που παρατηρούσε με παλιότερες παρατηρήσεις, διαπίστωσε μια ετήσια αύξηση $50{,}2''$ στο εκλειπτικό μήκος των αστέρων αυτών, ενώ το εκλειπτικό πλάτος παρέμενε σταθερό. Αυτό σήμαινε ή ότι όλοι οι αστέρες κινούνταν παράλληλα προς την εκλειπτική (μάλλον απίθανο) ή ότι η αρχή μέτρησης του εκλειπτικού μήκους (δηλαδή το σημείο γ) μετακινείτο. Πράγματι αυτό συνέβαινε, αλλά πέρασαν άλλα 2000 χρόνια μέχρι να το αποδείξει ο Νεύτωνας.

Η μετάπτωση, δηλαδή η κίνηση του πόλου του ισημερινού περί τον πόλο της εκλειπτικής, έχει ως αποτέλεσμα να αλλάζει ανά τους αιώνες ο πολικός αστέρας, δηλαδή το αστέρι που είναι πλησιέστερα στον βόρειο πόλο. Σήμερα πολικός αστέρας είναι ο α της Μικρής Άρκτου. Την εποχή που κατασκευζόταν η πυραμίδα του Χέοπα (πριν από 4600 χρόνια) πολικός αστέρας ήταν ο α του Δράκοντα. Επίσης, αλλάζει η μορφή της ουράνιας σφαίρας. Για παράδειγμα, πριν από 6000 χρόνια ο αστερισμός του Νότιου Σταυρού ήταν ορατός απο τις χώρες της Κεντρικής Ευρώπης. Σήμερα δεν φαίνεται ούτε από τη χώρα μας.

Λόγω της μετάπτωσης έχουν μεταβληθεί τα ζώδια. Την εποχή του Ίππαρχου το σημείο εαρινής ισημερίας γ βρισκόταν στην αρχή του ζωδίου του Κριού (και γι' αυτό χρησιμοποιείται το γ που είναι το σύμβολο του Κριού). Έτσι, κατά την εαρινή ισημερία (21 Μαρτίου) ο Ήλιος έμπαινε στον αστερισμό του Κριού. Μετά από ένα μήνα (21 Απριλίου) περνούσε στον αστερισμό του Ταύρου, κ.ο.κ. Σήμερα το γ έχει μετακινηθεί κατά περίπου 30^o, δηλαδή κατά ένα (το αμέσως προηγούμενο) ζώδιο. Δηλαδή το γ τώρα βρίσκεται στην αρχή των Ιχθύων. Κι έτσι, παραδείγματος χάρη, τον Σεπτέμβριο ο Ήλιος δεν προβάλλεται πλέον στον αστερισμό της Παρθένου, αλλά στον αστερισμό του Λέοντα.

1.3 Συστήματα συντεταγμένων

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου Σ στην ουράνια σφαίρα χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες. Επειδή υποθέτουμε ότι το αστέρι βρίσκεται στην επιφάνεια της ουράνιας σφαίρας (που θεωρούμε ότι έχει ακτίνα 1), χρειαζόμαστε δυο γωνίες. Χρησιμοποιούμε τόξα μεγίστων κύκλων οι οποίοι τέμνονται ορθογώνια. Ως άξονες του συστήματος συντεταγμένων επιλέγουμε δύο μέγιστους κύκλους. Ο ένας ονομάζεται **βασικός κύκλος** και ο άλλος **πρώτος κάθετος** (Σχήμα 1.3.1). Ανάλογα με την επιλογή των δυο αυτών κύκλων, έχουμε τα διάφορα αστρονομικά συστήματα συντεταγμένων. Ο μέγιστος κύκλος που διέρχεται από το σημείο Σ και τους πόλους του βασικού κύκλου καλείται **δεύτερος κάθετος**.

Η θέση του σημείου Σ καθορίζεται από τα δύο τόξα μεγίστων κύκλων ΒΓ και ΓΣ. Το τόξο ΒΓ μετριέται κατά την ορθή ή την ανάδρομη φορά από 0^o - 360^o ή 0 - 24 ώρες. Το τόξο ΓΣ θεωρείται θετικό όταν είναι πάνω από τον βασικό κύκλο και αρνητικό αν είναι κάτω απ' αυτόν και μετρίεται από 0^o μέχρι $+90^o$ ή από 0^o μέχρι -90^o.

Τα κυριότερα συστήματα συντεταγμένων αναφέρονται στη συνέχεια.

1.3.1 Γεωγραφικές συντεταγμένες

Η Γη θεωρείται σφαιρική. Ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου πάνω στην επιφάνειά της γίνεται με τα τόξα δύο μεγίστων κύκλων. Ως βασικός κύκλος θεωρείται ο γήινος ισημερινός. Ως πρώτος κάθετος θεωρείται ο γήινος μεσημβρινός που περνάει από το παλιό αστεροσκοπείο του Greenwich, έξω από το Λονδίνο. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες είναι το **γεωγραφικό πλάτος** φ και το **γεωγραφικό μήκος** λ (Σχήμα 1.3.2). Το γεωγραφικό πλάτος ενός τόπου Τ μετριέται πάνω στον μεσημβρινό του τόπου από την τομή του με τον ισημερινό. Είναι θετικό προς βορρά και αρνητικό προς νότο (δηλαδή $|\varphi| \leq 90^o$). Το γεωγραφικό μήκος λ προσδιορίζεται από τη δίεδρη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα του μεσημβρινού του Greenwich και του μεσημβρινού του τόπου. Μετριέται πάνω στον ισημερινό από 0^o - 180^o (ή από 0 - 12 ώρες), αρνητικά προς την ανατολή, θετικά προς τη δύση.

1.3.2 Οριζόντιες συντεταγμένες

Ως βασικός κύκλος θεωρείται ο ορίζοντας του παρατηρητή $AN\Delta B$ (Ανατολή, Νότος, Δύση, Βορράς). Πρώτος κάθετος, ο ουράνιος μεσημβρινός του τόπου $\Pi Z \Pi' \nu$ (Π, Π' οι πόλοι της ουράνιας σφαίρας, Z το ζενίθ, ν το ναδίρ). Για να ορίσουμε τη θέση του αστέρα Σ (Σχήμα 1.3.3) φέρνουμε τον κατακόρυφο κύκλο $Z\Sigma\Sigma'$. Η θέση του Σ ορίζεται πλήρως από τα τόξα $N\Sigma'$ και $\Sigma'\Sigma$

που ονομάζονται, αντίστοιχα, **αζιμούθιο** και **ύψος** του αστέρα Σ. Πολλές φορές, αντί του ύψους Σ'Σ χρησιμοποιείται το συμπληρωματικό τόξο $Z\Sigma$ που ονομάζεται **ζενιθία απόσταση** του Σ.

Το αζιμούθιο συμβολίζεται με A και μετριέται στον ορίζοντα από 0^o - 360^o, με αρχή το σημείο N (Νότος) και κατά την ανάδρομη φορά.

Το ύψος συμβολίζεται με υ και μετριέται στον κατακόρυφο του αστέρα από 0^o - $\pm 90^o$ με αρχή το σημείο Σ' του ορίζοντα. Θετικά προς το ζενίθ Z, αρνητικά προς το ναδίρ ν.

Η ζενιθία απόσταση συμβολίζεται με z. Μετριέται στον κατακόρυφο από 0^o - 180^o με αρχή το ζενίθ. Είναι πάντα θετική.

Οι οριζόντιες συντεταγμένες εξαρτώνται από τον ορίζοντα και το μεσημβρινό του παρατηρητή. Γι' αυτό αποτελούν τοπικό σύστημα συντεταγμένων και είναι χρήσιμες στη μελέτη της κίνησης των αστέρων σε σχέση με τον ορίζοντα του παρατηρητή.

1.3.3 Ισημερινές συντεταγμένες

Αυτές είναι η **απόκλιση** (δ) και η **τοπική ωριαία γωνία** (H)(Σχήμα 1.3.3). Αποτελούν ένα **ημιτοπικό** σύστημα συντεταγμένων, χρήσιμο στη μελέτη της κίνησης των ουρανίων σωμάτων σε σχέση με το μεσημβρινό του παρατηρητή $\Pi Z \Pi' \nu$. Η τοπική ωριαία γωνία H είναι το μέτρο $I\Sigma''$ της δίεδρης γωνίας που σχηματίζεται από το μεσημβρινό του παρατηρητή και τον ωριαίο κύκλο του αστέρα ΠΣΣ''. Μετριέται στον ισημερινό, από το μεσημβρινό του παρατηρητή, κατά την ανάδρομη φορά σε μοίρες ή ώρες. Μερικές φορές χρησιμοποιούνται και αρνητικές τιμές για την ωριαία γωνία, δηλαδή από $0\,h$ μέχρι -$12\,h$ προς ανατολάς και από $0\,h$ μέχρι $+12\,h$ προς δυσμάς.

Λόγω της φαινόμενης περιστροφής της ουράνιας σφαίρας από ανατολή προς δύση (η οποία είναι κατά προσέγγιση ομαλή), η ωριαία γωνία ενός αστέρα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο. Γι' αυτό η ωριαία γωνία είναι χρήσιμη στη μέτρηση του χρόνου , καθώς και στη μετατροπή των οριζόντιων συντεταγμένων σε ουρανογραφικές.

1.3.4 Ουρανογραφικές συντεταγμένες

Το σύστημα αυτό είναι ανεξάρτητο από τη θέση του παρατηρητή. Βασικός κύκλος είναι ο ουράνιος ισημερινός $I'\gamma I\gamma'$ (Σχήμα 1.3.4). Πρώτος κάθετος είναι ο *ωριαίος κύκλος* του σημείου γ, δηλαδή *ο μέγιστος κύκλος* ΠγΠ' που περνά από τους πόλους και το σημείο εαρινής ισημερίας γ. Δεύτερος κάθετος είναι ο μέγιστος κύκλος ΠΣΠ' που περνά από τους πόλους και τον αστέρα. Επειδή η θέση του γ μεταξύ των αστέρων είναι (σχεδόν) σταθερή, οι ουρανογραφικές συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες της ημερήσιας φαινόμενης κίνησης. Έτσι, το σύστημα αυτό είναι ανεξάρτητο του τόπου και του χρόνου της παρατήρησης. Είναι κατάλληλο για τη σύνταξη καταλόγων συντεταγμένων των αστέρων.

Οι ουρανογραφικές συντεταγμένες είναι η **απόκλιση** (δ) και η **ορθή αναφορά** (α).

Απόκλιση είναι η γωνιώδης απόσταση του αστέρα Σ από τον ισημερινό και μετριέται με το τόξο Σ'Σ από 0^o - $\pm 90^o$ (θετικά προς βορρά, αρνητικά προς νότο). Πολλές φορές αντί του τόξου Σ'Σ λαμβάνεται το τόξο ΠΣ που ονομάζεται **πολική απόσταση** του Σ και μετριέται από 0^o - 180^o.

Η ορθή αναφορά είναι η γωνιώδης απόσταση γΣ' της τομής του ωριαίου κύκλου του αστέρα με τον ισημερινό και μετριέται από το γ πάνω στον ισημερινό κατά την ορθή φορά από 0^o - 360^o, ή, συνηθέστερα, από 0 - 24 ώρες.

Υπενθυμίζουμε ότι ωριαίος κύκλος ενός αστέρα είναι ο μέγιστος κύκλος που περνάει από τον αστέρα και τους πόλους του ουρανού. Όλα τα σημεία που βρίσκονται στον ίδιο ωριαίο κύκλο έχουν την ίδια ώρα.

1.3.5 Εκλειπτικές συντεταγμένες

Βασικός κύκλος είναι η εκλειπτική $E'\gamma E\gamma'$ (Σχήμα 1.3.4) και πρώτος κάθετος ο μέγιστος κύκλος $P\gamma P'$ που διέρχεται από τους πόλους της εκλειπτικής και το σημείο γ. Τον μέγιστο κύκλο που περνά από τους πόλους της εκλειπτικές και έναν αστέρα ονομάζουμε **κύκλο πλάτους** του αστέρα. Οι εκλειπτικές συντεταγμένες είναι το **ουρανογραφικό** ή **εκλειπτικό πλάτος** (β) και το **ουρανογραφικό** ή **εκλειπτικό μήκος** (λ). Το β είναι η γωνιώδης απόσταση Σ''Σ του αστέρα Σ από την εκλειπτική, μετρούμενο πάνω στον κύκλο πλάτους του αστέρα από 0^o - $\pm 90^o$, θετικό προς το βόρειο πόλο της εκλειπτική Π και αρνητικά προς το νότιο πόλο Π'. Το λ είναι το τόξο γΣ'' της εκλειπτικής μεταξύ του γ και της τομής Σ'' του κύκλου πλάτους του αστέρα με την εκλειπτική. Μετριέται από το γ κατά την ορθή φορά. Τα (β,λ) είναι ανεξάρτητα της ημερήσιας κίνησης, διότι αυτή δεν μεταβάλλει τις σχετικές θέσεις των Σ, γ και Σ''. Οι εκλειπτικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται κυρίως στον καθορισμό της θέσης των μελών του ηλιακού μας συστήματος, τα οποία βρίσκονται κοντά στην εκλειπτική.

1.3.6 Γαλαξιακές συντεταγμένες

Είναι το **γαλαξιακό μήκος** l'' (ΚΣ') και το **γαλαξιακό πλάτος** b'' (ΣΣ') (Σχήμα 1.3.5). Το γαλαξιακό μήκος μετριέται κατά την ορθή φορά στο γαλαξιακό επίπεδο ΜΜ' (είναι το επίπεδο συμμετρίας του γαλαξία), από 0^o - 360^o και αρχή μέτρησης το γαλαξιακό κέντρο Κ. Το γαλαξιακό πλάτος μετριέται πάνω στο μέγιστο κύκλο ΓΣΣΓ' που περνά από τους γαλαξιακούς πόλους Γ, Γ' και τον αστέρα, με αρχή μέτρησης το σημείο τομής του μέγιστου κύκλου ΓΣΓ' και του γαλαξιακού επιπέδου, από 0^o μέχρι $+90^o$, βόρεια, και από 0^o μέχρι -90^o, νότια.

1.4 Αειφανείς, αμφιφανείς και αφανείς αστέρες

Καλούμε **κύκλο απόκλισης** ενός αστέρα τον κύκλο που περνά από τον αστέρα και είναι παράλληλος προς τον Ισημερινό. Ο κύκλος απόκλισης είναι ένας μικρός κύκλος $\Sigma_1\Sigma\Sigma_2$ (Σχήμα 1.4.1) και είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που έχουν την ίδια απόκλιση. Λόγω της φαινόμενης περιστροφής της ουράνιας σφαίρας ο κάθε αστέρας φαίνεται να κινείται πάνω στον κύκλο απόκλισής του. Ανατέλει σε ένα σημείο α, μεσορανεί άνω στο Σ_1, δύει στο δ και μεσουρανεί κάτω στο Σ_2. Το τόξο $\alpha\Sigma_1\delta$ που βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα καλείται **ημερήσιο τόξο**, ενώ το τόξο $\delta\Sigma_2\alpha$ που βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα καλείται **νυχτερινό τόξο** του αστέρα.

Αν ο κύκλος απόκλισης του Σ τέμνει τον ορίζοντα του τόπου, ο αστέρας είναι **αμφιφανής**. Αν δεν τον τέμνει (δηλαδή αν είναι παράλληλος), τότε: (α) αν ο κύκλος είναι πάνω από τον ορίζοντα ο αστέρας είναι **αειφανής**, ενώ αν είναι κάτω από τον ορίζονται ο αστέρας είναι **αφανής** (Σχήμα 1.4.2).

Αν βρισκόμαστε στο βόρειο ημισφαίριο σε ένα τόπο με γεωγραφικό πλάτος φ, παρατηρούμε ότι ένας αστέρας, με πολική απόσταση ΠΣ, είναι:

αειφανής, αν $\Pi\Sigma<\varphi$,

αφανής, αν $\Pi\Sigma>180^o-\varphi$,

αμφιφανής, αν $\varphi<\Pi\Sigma<180^o-\varphi$.

Ας σημειωθεί ότι το γεωγραφικό πλάτος φ ενός τόπου Τ ισούται με το τόξο ΙΣ του μεσημβρινού του τόπου $\Pi Z\Pi'\nu$ (Σχήμα 1.4.3).

Κεφάλαιο 2

Σφαιρική Τριγωνομετρία

2.1 Σφαιρικά τρίγωνα

Η τομή της σφαίρας με επίπεδο είναι πάντα ένας κύκλος. Αυτός θα είναι μέγιστος, αν το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, διαφορετικά θα είναι μικρός. Πόλοι του κύκλου ονομάζονται τα άκρα της διαμέτρου της σφαίρας που είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου. Από δύο τυχαία μη αντιδιαμετρικά σημεία της επιφάνειας μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι, αλλά μόνο ένας μέγιστος. Αυτός ορίζει τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων αυτών. Έτσι, οι μέγιστοι κύκλοι αποτελούν τις λεγόμενες **γεωδαισιακές γραμμές** σε μια σφαίρα. Αν τα δύο σημεία είναι αντιδιαμετρικά, τότε όλοι οι κύκλοι που περνούν από αυτά είναι μέγιστοι.

Ένα **σφαιρικό τρίγωνο** (Σχήμα 2.1.1) ορίζεται από τρία τυχαία σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας (που δεν βρίσκονται στον ίδιο μέγιστο κύκλο), τα οποία αποτελούν τις **κορυφές** του τριγώνου, και από τρία τόξα μέγιστων κύκλων που ενώνουν ανά δύο τα σημεία αυτά και αποτελούν τις **πλευρές** του. Κάθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180^o και θεωρείται θετική. Οι δίεδρες γωνίες που σχηματίζουν τα επίπεδα - φορείς των μεγίστων κύκλων είναι οι **γωνίες** του σφαιρικού τριγώνου. Αυτές είναι επίσης θετικές και μικρότερες των 180^O. Ένα σφαιρικό τρίγωνα μπορεί να έχει μία γωνία ή δύο ή και τις τρεις γωνίες του ορθές, οπότε ονομάζεται, αντίστοιχα, **ορθογώνιο** ή **δισορθογώνιο** ή **τρισορθογώνιο**. Επίσης, ένα σφαιρικό τρίγωνο μπορεί να έχει μία πλευρά ή δύο ή και τις τρεις πλευρές του ίσες με 90^o. Τότε ονομάζεται **ορθόπλευρο** ή **δισορθόπλευρο** ή **τρισορθόπλευρο**, αντίστοιχα.

Έστω $E\Delta\Theta$ μικρός κύκλος σφαίρας και $A\Gamma B$ ο παράλληλος προς αυτόν μέγιστος κύκλος (Σχήμα 2.1.2). Έστω Π το σημείο τομής της επιφάνειας της σφαίρας με την ευθεία OK που συνδέει τα κέντρα των δύο κύκλων και η οποία, προφανώς, είναι κάθετη στο επίπεδο του μέγιστου κύκλου. Έστω $E\Delta$ τυχόν τόξο πάνω στο μικρό κύκλο και $A\Gamma$ το τόξο που ορίζεται πάνω στο μέγιστο κύκλο $A\Gamma B$ όταν φέρουμε τους μέγιστους κύκλους $\Pi E A \Pi'$ και $\Pi \Delta \Gamma \Pi'$. Θα είναι:

$$E\Delta = \hat{\omega}(KE) = \hat{\omega}(OE)\cos\phi = \hat{\omega}(OA)\cos\phi = A\Gamma\cos\phi\,,$$

όπου η γωνία $\hat{\omega}$ μετριέται σε ακτίνια. Θυμίζουμε ότι το μήκος ενός τόξου κύκλου είναι ίσο με το γινόμενο της ακτίνας επί την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μετρημένη σε ακτίνια.

2.2 Τύποι συνημιτόνου

Χάρη απλότητας, θα θεωρήσουμε ότι η σφαίρα είναι μοναδιαία. Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{c}$. Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστή η σχέση:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot\vec{c} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,. \tag{2.1}$$

Έστω τώρα $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$ και α, β και γ οι απέναντι των γωνιών πλευρές. Με βάση τη σχέση (1.1) παίρνουμε:

$$\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\cos A = \cos\alpha - \cos\gamma\cdot\cos\beta\,.$$

Επομένως

$$\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A\,. \tag{2.2}$$

Όμοια βρίσκουμε:

$$\cos\beta = \cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos B \tag{2.3}$$

και

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\Gamma\,. \tag{2.4}$$

2.3 Τύποι ημιτόνου

Από τον τύπο:

$$\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A = \cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma$$

έπεται ότι:

$$\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^2 A = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma \tag{2.5}$$

Εξάλλου είναι:

$$\sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma \cdot \sin^2 A = \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma - \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma \cdot \cos^2 A\,, \tag{2.6}$$

η οποία, με βάση τη σχέση (1.5), δίνει:

$$\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2 A = 1-\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,. \tag{2.7}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος αυτής της σχέσης δεν αλλάζει αν κάνουμε κυκλική εναλλαγή των στοιχείων. Έτσι καταλήγουμε ότι:

$$\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2 A = \sin^2\gamma\sin^2\alpha\sin^2 B = \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\Gamma\,.$$

Από τις ισότητες αυτές παίρνουμε:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin\Gamma}{\sin\gamma}\,. \tag{2.8}$$

2.4 Τύποι των πέντε στοιχείων

Από τους τύπους του συνημιτόνου, μετά από κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στους παρακάτω τύπους που συνδέουν πέντε διαδοχικά στοιχεία ενός σφαιρικού τριγώνου, δηλαδή δυο πλευρές και τρεις γωνίες ή τρεις πλευρές και δυο γωνίες:

$$\sin\alpha\cos B = \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma\cos A\,, \tag{2.9}$$

και

$$\sin\alpha\cos\Gamma = \cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma\cos\beta\cos A\,. \tag{2.10}$$

Με κυκλική εναλλαγή προκύπτουν οι υπόλοιποι τύποι των πέντε στοιχείων.

2.5 Τύποι των τεσσάρων διαδοχικών στοιχείων

Ξεκινώντας από τους τύπους του συνημιτόνου, κάνοντας κατάλληλες πράξεις και χρησιμοποιώντας τους τύπους του ημιτόνου παίρνουμε τον παρακάτω τύπο:

$$\cos\alpha\cos\Gamma = \sin\alpha\cot\beta - \sin\Gamma\cot B\,, \tag{2.11}$$

ο οποίος συνδέει τα τέσσερα διαδοχικά στοιχεία B, α, Γ και β του σφαιρικού τριγώνου.

Επίσης παίρνουμε:

$$\cos\alpha\cos B = \sin\alpha\cot\gamma - \sin B\cot\Gamma\,, \tag{2.12}$$

που συνδέει τις πλευρές α και γ με τις γωνίες B και Γ.

Με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων προκύπτουν οι υπόλοιποι τύποι των τεσσάρων διαδοχικών στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου.

2.6 Πολικά σφαιρικά τρίγωνα

Έστω σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Ο μέγιστος κύκλος πάνω στον οποίο βρίσκεται το τόξο ΒΓ έχει δύο πόλους, δηλαδή τα δύο σημεία στα οποία η επιφάνεια της σφαίρας τέμνεται από την κάθετη στο κέντρο του μέγιστου κύκλου. Οι πόλοι απέχουν από όλα τα σημεία του μέγιστου κύκλου γωνιώδη απόσταση 90^o. Θεωρούμε τον πόλο που βρίσκεται στο ίδιο ημισφαίριο με το σημείο Α, έστω Α'. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τα σημεία Β' και Γ', ως τους πόλους των μέγιστων κύκλων ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Το σφαιρικό τρίγωνο Α'Β'Γ', όπως ορίστηκε, λέγεται **πολικό τρίγωνο** του ΑΒΓ (Σχήμα 2.6.1).

Αποδεικνύεται ότι η πολικότητα μεταξύ δύο σφαιρικών τριγώνων είναι αμοιβαία. Δηλαδή, αν ΑΒΓ πολικό του Α'Β'Γ' $\Leftrightarrow$ Α'Β'Γ' πολικό του ΑΒΓ.

Από το Σχήμα 2.6.1 προκύπτει ότι $A' = X\Psi = XB + B\Psi = X\Gamma - B\Gamma + B\Psi = 90^o - \alpha + 90^o = 180^o - \alpha$. Όμοια, $B' = 180^o - \beta$, $\Gamma' = 180^o - \gamma$.

Επειδή η πολικότητα είναι αμοιβαία, ισχύουν: $A = 180^o - \alpha'$, $B = 180^o - \beta'$, $\Gamma = 180^o - \gamma'$ και $\alpha' = 180^o - A$, $\beta' = 180^o - B$, $\gamma' = 180^o - \Gamma$. Δηλαδή, *οι πλευρές και οι γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των γωνιών και των πλευρών, αντίστοιχα, του πολικού του τριγώνου.*

2.7 Τύποι του Borda

Ο τύπος του συνημιτόνου:

$$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos A$$

δίνει:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}.$$

Θέτουμε $\alpha + \beta + \gamma = 2p$ και παίρνουμε:

$$2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \cos A = 1 - \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= \frac{\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Επίσης:

$$2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 + \cos A = \frac{-\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2\sin p\sin(p-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις και έχουμε:

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}{\sin p\sin(p-\alpha)}}.$$

Και με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων βρίσκουμε τους αντίστοιχους τύπους για την $\tan(B/2)$ και την $\tan(\Gamma/2)$.

Με τη βοήθεια αυτών των τύπων υπολογίζονται οι γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου όταν είναι γνωστές οι πλευρές του.

2.8 Τρίγωνο θέσης αστέρα

Το σφαιρικό τρίγωνο ΠΖΣ (Σχήμα 2.8.1) που έχει κορυφές τον βόρειο πόλο του ουρανού, το ζενίθ του τόπου παρατήρησης και τον αστέρα καλείται **τρίγωνο θέσης** του αστέρα. Στο Σχήμα 2.8.1 είναι: δ η απόκλιση, Α το αζιμούθιο, Η η ωριαία γωνια, Π η πολική απόσταση, φ το γεωγραφικό πλάτος του τόπου και ζ η ζενιθία απόσταση. Η γωνία S ονομάζεται **παραλλακτική γωνία**.

Κατά τη στιγμή της ανατολής ή της δύσης ενός αστέρα είναι υ=0^o, συνεπώς ζ=90^o. Εφαρμόζουμε τον τύπο του συνημιτόνου για την πλευρά ΖΣ:

$$\cos(\Sigma Z) = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H \quad \Rightarrow \quad \cos H = -\tan\varphi \cdot \tan\delta\,.$$

Αφού $0^o \leq H \leq 360^o$, από την τελευταία σχέση προκύπτουν δύο τιμές για την ωριαία γωνία Η του αστέρα. Το τόξο που είναι μικρότερο των 180^o είναι η ωριαία γωνία H_δ δύσης του αστέρα, ενώ το τόξο που είναι μεγαλύτερο των 180^o είναι η ωριαία γωνία H_α ανατολής του αστέρα.

Εφαρμόζουμε τον τύπο των πέντε στοιχείων για τα ΠΖ=90^o-φ, 180^o-Α, Ζ, S, ΠΣ=90^o-δ:

$$\sin(90^o - \varphi)\cos(180^o - A) = \cos(90^o - \delta)\sin Z - \sin(90^o - \delta)\cos Z\cos S\,.$$

Για Ζ=90^o προκύπτει:

$$-\cos\varphi\cos A = \sin\delta \quad \Rightarrow \quad \cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\,.$$

Για να έχουν λύση οι εξισώσεις αυτές θα πρέπει:

$$-1 \leq -\tan\varphi\tan\delta \leq 1 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad -1 \leq -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \leq 1\,.$$

2.9 Ανατολή και δύση του Ήλιου

Η ανατολή και η δύση του Ήλιου σε ένα τόπο με γεωγραφικό πλάτος φ δεν γίνεται πάντοτε στα ίδια σημεία του ορίζοντα. Αυτό προκύπτει από τη σχέση:

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\,,$$

η οποία λέει ότι το αζιμούθιο A μεταβάλλεται, αφού, κατά τη διάρκεια του έτους, η απόκλιση δ του Ήλιου μεταβάλλεται από -ω μέχρι +ω, όπου ω είναι η λόξωση της εκλειπτικής (Σχήμα 2.9.1).

Την 21η Μαρτίου και την 22α Σεπτεμβρίου είναι δ=0, γιατί ο Ήλιος βρίσκεται στο γ ή στο γ', αντίστοιχα. Άρα

$$\cos A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 90^o \quad ή \quad A = 270^o\,.$$

Η μικρότερη τιμή του αζιμούθιου αντιστοιχεί στη δύση και η μεγαλύτερη στην ανατολή, αφού το αζιμούθιο μετριέται κατά την ανάδρομη φορά. Έτσι, τις ημέρες αυτές (και μόνον αυτές) ο Ήλιος ανατέλει ακριβώς στην Ανατολή και δύει ακριβώς στη Δύση του τόπου. Επειδή ο Ήλιος αυτές τις ημέρες βρίσκεται στο γ ή στο γ', ο κύκλος απόκλισής του είναι αυτός του γ. Το γ βρίσκεται στον ισημερινό, συνεπώς ο κύκλος απόκλισης του Ήλιου **είναι** ο ισημερινός. Αυτός διχοτομείται από τον ορίζονται του τόπου. Άρα το ημερήσιο και το νυχτερινό τόξο είναι ίσα, δηλαδή έχουμε **ισημερία**.

Μετά την 21η Μαρτίου η απόκλιση είναι θετική. Για $\delta > 0$ έχουμε $\cos A < 0$. Άρα θα είναι $90^o < A_\delta < 180^o$ και $180^o < A_\alpha < 270^o$. Δηλαδή, ο Ήλιος καθημερινά ανατέλει και δύει βορειότερα από ό,τι την προηγούμενη ημέρα, μέχρι την 21η Ιουνίου, οπότε είναι $\delta = \omega$. Τότε έχουμε τα ακρότατα προς Βορρά αζιμούθια ανατολής και δύσης, που δίνονται από τον τύπο:

$$\cos A = -\frac{\sin\omega}{\cos\varphi}\,.$$

Μετά την 21η Ιουνίου η απόκλιση δ του Ήλιου ελαττώνεται και το μεν σημείο της ανατολής κινείται προς την Ανατολή, το δε σημείο της δύσης κινείται προς τη Δϋση, όπου φτάνουν την 22α Σεπτεμβρίου όταν και πάλι είναι $\delta = 0$.

Ακολούθως η απόκλιση γίνεται αρνητική. Για $\delta < 0$ είναι $\cos A > 0$. Άρα θα έχουμε: $0^o < A_\delta < 90^o$ και $270^o < A_\alpha < 360^o$. Δηλαδή, ο Ήλιος καθημερινά ανατέλει και δύει νοτιότερα της προηγούμενης ημέρας, μέχρι την 22α Δεκεμβρίου, οπότε $\delta = -\omega$. Τότε έχουμε τα ακρότατα προς Νότο αζιμούθια ανατολής και δύσης, που δίνονται από τη σχέση:

$$\cos A = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi}\,.$$

Μετά την 22α Δεκεμβρίου το μεν σημείο ανατολής κινείται προς την Ανατολή, το δε σημείο της δύσης προς τη Δύση, όπου φτάνουν την 21η Μαρτίου (Σχήμα 2.9.2).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο βόρειο ημισφαίριο, από την εαρινή μέχρι την φθινοπωρινή ισημερία, το ημερήσιο τόξο του Ήλιου είναι μεγαλύτερο από το νυχτερινό. Το αντίθετο συμβαίνει στο νότιο ημισφαίριο.

Κεφάλαιο 3

Χρόνος

3.1 Μέτρηση του χρόνου

Η μέτρηση του χρόνου, μια από τις δεξιότητες που απέκτησε ο πρωτόγονος άνθρωπος χάρη στην ενασχόλησή του με την Αστρονομία (η άλλη είναι ο προσανατολισμός) βασίζεται στην περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της, η οποία, με μεγάλη προσέγγιση, είναι ομαλή. Αποτέλεσμα αυτής της κίνησης είανι η φαινόμενη περιστροφή της πυράνιας σφαίρας, που μπορεί να οριστεί από την ωριαία γωνία ενός σταθερού σημείου του ουρανού. Άρα η μέτρηση του χρόνου ανάγεται στον προσδιορισμό αυτής της ωριαίας γωνίας.

Ανάλογα με το σημείο που θεωρούμε, προκύπτει και το αντίστοιχο σύστημα χρόνου. Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών άνω ή κάτω μεσουρανήσεων του θεωρούμενου σημείου σε ένα τόπο καλείται **ημέρα**. Ως αρχή μέτρησης λαμβάνεται (κατόπιν συμφωνίας) η άνω ή η κάτω μεσουράνηση του συγκεκριμένου σημείου.

3.2 Αστρικός χρόνος

Αστρικός χρόνος (t) ενός τόπου καλείται η ωριαία γωνία του εαρινού σημείου ισημερίας γ (γΟΙ). Αν α είναι η ορθή αναφορά (γΣ′) ενός αστέρα και Η(=ΙΣ′) η ωριαία γωνία αυτού όταν ο αστρικός χρόνος είναι t, από το Σχήμα 3.2.1 προκύπτει t=α+Η. Για Η=0 (δηλαδή όταν ο αστέρας Σ μεσουρανεί άνω) είναι t=α, δηλαδή ο αστρικός χρόνος ενός τόπου ισούται με την ορθή αναφορά του αστέρα.

Εξαιτίας της μετάπτωσης των ισημεριών και της κλόνησης του άξονα της Γης, η αστρική ημέρα δεν είναι ακριβώς ίση με την περιστροφή της Γης. Λόγω μετάπτωσης το γ κινείται πάνω στην εκλειπτική κατά την ανάδρομη φορά. Πάνω στον ισημερινό η κίνηση αυτή αντιστοιχεί σε τόξο 0,008 *sec* περίπου ημερησίως.

Επιπλέον, λόγω της κλόνησης, το γ παλινδρομεί περιοδικά περί την εκάστοτε θέση του.

Καλείται **μέσο εαρινό ισημερινό σημείο** (γ_0) η θέση του γ όταν αυτό υπόκειται μόνο σε μεταπτωτική κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Η ωριαία γωνία του γ_0 ορίζει τον **μέσο αστρικό χρόνο**, ενώ η ωριαία γωνία του γ ορίζει τον **αληθή αστρικό χρόνο**. Η διαφορά των δύο χρόνων καλείται **εξίσωση των ισημερινών σημείων** και ανέρχεται σε κλάσμα του δευτερολέπτου.

3.3 Ηλιακός χρόνος

Η ωριαία γωνία H_A του κέντρου του ηλιακού δίσκου, αυξημένη κατά 12 ώρες, καλείται **αληθής ηλιακός χρόνος** (A), δηλαδή A=H_A+12 h.

Αλλά ο Ήλιος κινείται πάνω στην εκλειπτική κατά την ορθή φορά και συνεπώς η ορθή αναφορά του αυξάνει κατά 1^o, ή κατά 4 λεπτά της ώρας περίπου, ημερησίως. Επομένως η διάρκεια της αληθούς ηλιακής ημέρας είναι κατά 4 λεπτά περίπου μεγαλύτερη της περιόδου περιστοφής της Γης και, κατά συνέπεια, της αστρικής ημέρας.

Η διαφορά αυτή δεν είναι σταθερή. Γιατί, αφενός η κίνηση του Ήλιου στην εκλειπτική ακολουθεί τον νόμο των εμβαδών (δεύτερος νόμος του Kepler), αφετέρου ίσα τόξα της εκλειπτικής αντιστοιχούν γενικά σε άνισα τόξα στον ισημερινό. Γι' αυτό ο αληθής ηλιακός χρόνος δεν είναι κατάλληλος για τη μέτρηση του χρόνου. Έτσι, θεωρούμε ένα νοητό σημείο, τον **μέσο Ήλιο**, που κινείται ομαλά πάνω στον ισημερινό με περίοδο αυτή του αληθινού Ήλιου. Η ωριαία γωνία H_M του μέσου Ήλιου, αυξημένη κατά 12 ώρες καλείται **μέσος ηλιακός χρόνος** ή **μέσος χρόνος** (M). Δηλαδή M=H_M+12 h.

Ως αρχή μέτρησης της αληθούς και της μέσης ηλιακής ημέρας λαμβάνεται η κάτω μεσουράνηση του αληθινού και του μέσου Ήλιου, αντίστοιχα.

Ο μέσος χρόνος ενός τόπου ονομάζεται και **πολιτικός χρόνος** του τόπου. Ο πολιτικός χρόνος του Greenwich καλείται παγκόσμιος χρόνος (Universal Time, U.T.).

Η διαφορά του μέσου ηλιακού χρόνου M από τον αληθή ηλιακό χρόνο A, κάποια στιγμή, καλείται **εξίσωση του χρόνου** (ε): ε=A-M. Με αντικατάσταση A=H_A+12 και M=H_M+12, έπεται:

$$\varepsilon = H_A - H_M = (t - \alpha_A) - (t - \alpha_M) = \alpha_M - \alpha_A \,,$$

όπου α_A και α_M η ορθή αναφορά του αληθινού και του μέσου Ήλιου, αντίστοιχα.

3.4 Επίσημος χρόνος - Άτρακτοι

Διαιρούμε την εποιφάνεια της Γης με μεσημβρινά τόξα σε 24 ίσες **ατράκτους**. Κάθε άτρακτος αντιστοιχεί σε τόξο 15^O ή σε 1 ώρα. Ως βασική άτρακτος λαμβάνεται αυτή που εκτείνεται $7{,}5^O$ εκατέρωθεν του μεσημβρινού του Greenwich.

Ο πολιτικός χρόνος του κεντρικού μεσημβρινού κάθε ατράκτου καλείται **χρόνος ατράκτου**. Κατά συνέπεια, ο χρόνος της βασικής ατράκτου είναι ο παγκόσμιος χρόνος. Ο χρόνος μιας ατράκτου διαφέρει από τον παγκόσμιο χρόνο κατά ακέραιο αριθμό ωρών και προηγείται ή έπεται αυτού αν η άτρακτος είναι ανατολικά ή δυτικά του Greenwich. Στη δωδέκατη άτρακτο, οι δύο ημιάτρακτοι εκατέρωθεν του κεντρικού μεσημβρινού που έχει γεωγραφικό μήκος 180^o, έχουν διαφορά 24 ωρών, δηλαδή παρουσιάζουν ασυνέχεια μιας ημέρας. Έτσι, αυτοί που ταξιδεύουν από ανατολικά προς δυτικά ελαττώνουν την ημρομηνία κατά μια ημέρα, ενώ αυτοί που ταξιδεύουν αντίθετα την αυξάνουν. Ο μεσημβρινός των 180^o (που στην πραγματικότητα είναι μια τεθλασμένη γραμμή), καλείται **γραμμή αλλαγής ημερομηνίας**.

Επίσημος χρόνος μιας χώρας είναι ο χρόνος της ατράκτου στην οποία ανήκει η χώρα (κατά το μεγαλύτερο μέρος της). Η Ελλάδα ανήκει στη δεύτερη ανατολική άτρακτο και η επίσημη ώρα της προηγείται κατά 2 ώρες του παγκόσμιου χρόνου. Αν μια χώρα εκτείνεται σε περισσότερες από μια ατράκτους, χρησιμοποιεί περισσότερους του ενός επίσημους χρόνους.

Αν E_ν είναι ο επίσημος χρόνος μιας χώρας που ανήκει στην ν-οστή άτρακτο, ισχύει η σχέση: $\mathrm{E}_\nu = \mathrm{U.T.} - \nu$, όπου το ν θεωρείται θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το αν η άτρακτος βρίσκεται δυτικά ή ανατολικά του Greenwich.

3.5 Ατομικός χρόνος

Η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της ήταν για εκατομμύρια χρόνια η βάση για τη μέτρηση του χρόνου. Το 1930 ανακαλύφτηκαν τα **ρολόγια quartz** που βασίζονται στις δονήσεις των κρυστάλλων quartz. Τα ρολόγια αυτά έχουν ακρίβεια 1 sec/δεκαετία.

Το 1950 ανακαλύφτηκαν τα **ατομικά ρολόγια** που οδήγησαν σε ακριβέστερο καθορισμό του δευτερολέπτου, βασισμένο στην υπέρλεπτη δομή του ατόμου του Καισίου 133 ($Cs133$). Έτσι προσδιορίστηκε το **ατομικό δευτερόλεπτο** και ορίστηκε ο **Διεθνής Ατομικός Χρόνος** (TAI, Temps Atomique International). Ως αρχή μέτρησης του TAI καθορίστηκε η ώρα μηδέν της 1ης Ιανουαρίου 1958, ενώ στην καθημερινή χρήση εισήχθηκε την 1η Ιανουαρίου 1967.

Ο ατομικός χρόνος, λόγω της ομαλότητάς του και της ανεξαρτησίας του από την κίνηση της Γης, χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό των μικρών ανωμαλιών της γήινης περιστροφής, που αποτελεί πάντα το θεμελιώδες χρονόμετρο για τις καθημερινές ανθρώπινες δραστηριότητες. Επίσης, χρησιμοποιείται σε επιστημονικά πειράματα όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια χρόνου.

Με τη βοήθεια των ατομικών χρονομέτρων βρέθηκε ότι η περίοδος της Γης αυξάνει κατά 1/100 *sec* ανά αιώνα. Αυτό οφείλεται στην τριβή που δημιουργείται από τις παλίρροιες των θαλασσών. Ακόμη υπάρχουν και εποχιακές μεταβολλές της περιόδου της τάξης των 0,002 - 0,003 *sec* λόγω της τήξης των πάγων και την κίνηση της ατμόσφαιρας. Τελικά παρατηρείται επιβράδυνση την άνοιξη και επιτάχυνση το φθινόπωρο.

3.6 Χρονόμετρα - Εκκρεμές

Η εναλλαγή ημέρας και νύχτας δεν προσφέρεται για τη μέτρηση του χρόνου στις καθημερινές ανάγκες του ανθρώπου. Έτσι, επινοήθηκαν διάφορες συσκευές για τη μέτρηση μικρότερων χρονικών διαστημάτων. Η ημέρα (24ωρο) χωρίστηκε σε 24 ώρες. Κάθε 1 ώρα σε 60 λεπτά και κάθε 1 λεπτό σε 60 δευτερόλεπτα.

Η κλεψύδρα και το ηλιακό ρολόι, καθώς και η ομαλή καύση ενός κεριού, ήταν τα πρώτα χρονόμετρα.

Η πρώτη σημαντική πρόοδος στη μέτρηση του χρόνου έγινε το 1581 με την ανακάλυψη του νόμου του εκκρεμούς από τον Γαλιλαίο: "Η περίοδος του εκκρεμούς είναι σταθερή κι εξαρτάται από το μήκος του". Η χρήση όμως του εκκρεμούς για τη μέτρηση του χρόνου έγινε μετά την ανακάλυψη από τον Cristian Huyghens (1639 - 1695) του ωρολογιακού ρυθμιστή. Για πολλούς αιώνες, μέχρι το 1930, το εκκρεμές, με τις διάφορες παραλλαγές και βελτιώασεις, ήταν το κυριότερο όργανο μέτρησης του χρόνου. Η ακρίβειά του κυμαινόταν από 0,01 - 0,001 *sec* την ημέρα.

3.7 Έτος - Ημερολόγια

Η περίοδος της φαινόμενης κίνησης του Ήλιου πάνω στην εκλειπτική ορίζει το **έτος**. Ανάλογα με το σημείο αναφοράς που θεωρούμε (όπως και για την ημέρα) έχουμε αστρικό, τροπικό και ανωμαλιακό έτος.

Αστρικό έτος είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επανόδων του Ήλιου στο ίδιο σταθερό σημείο της εκλειπτικής.

Τροπικό έτος είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διαβάσεων του Ήλιου από το εαρινό σημείο ισημερίας γ. Λόγω της μετάπτωσης του γ, το τροπικό έτος είναι λίγο μικρότερης διάρκειας από το αστρικό (περίπου 20 λεπτά μέσου χρόνου).

Ανωμαλιακό έτος είναι το χρονικό διάστημα ματαξύ δύο διαδοχικών διαβάσεων του Ήλιου από το περίγειο της φαινόμενης τροχιάς του. Επειδή η γραμμή των αψίδων κινείται κατά την ορθή φορά κατά 11,25 λεπτά της μοίρας ετησίως, το ανωμαλιακό έτος είναι μεγαλύτερο του αστρικού κατά περίπου 4,5 λεπτά μέσου χρόνου. Η διάρκεια του κάθε έτους είναι:

Τροπικό έτος: 365,2422 μέσες ηλιακές ημέρες

Αστρικό έτος: 365,2564 μέσες ηλιακές ημέρες

Ανωμαλιακό έτος: 365,2596 μέσες ηλιακές ημέρες.

Το έτος που στην πράξη θα χρησιμοποιείται πρέπει να πληροί δύο συνθήκες:

1) Να περιέχει ακέραιο αριθμό ημερών, ώστε να αποφεύγεται η αλλαγή ημερομηνίας μέσα στην ίδια ημέρα.

2) Να εξσφαλίζει την κανονική διαδοχή των εποχών.

Επειδή κανένα από τα παραπάνω έτη δεν ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, υιοθετήθηκε το **πολιτικό έτος**. Ως βάση αυτού λαμβάνεται το τροπικό έτος, ώστε να εξασφαλίζεται η δεύτερη συνθήκη. Για να ικανοποιηθεί η πρώτη συνθήκη το πολιτικό έτος θεωρείται ότι περιέχει άλλοτε ~~356~~ ημέρες και άλλοτε 365 366, έτσι ώστε κατά μέσο όρο να διαρκεί όσο το τροπικό έτος.

Τα διάφορα συστήματα διαίρεσης και καθορισμού του πολιτικού έτους αποτελούν τα λεγόμενα **ημερολόγια**.

Το **Ιουλιανό Ημερολόγιο** (παλιό) καθιερώθηκε το 45 π.Χ. από τον Ιούλιο Καίσαρα, μετά από υπόδειξη του Έλληνα αστρονόμου Σωσιγένη.

Σ' αυτό το ημερολόγιο κάθε έτος περιέχει 365 ημέρες, ενώ κάθε τέσσερα χρόνια το έτος περιέχει 366 ημέρες (**δίσεκτο**).

Αυτό όμως είχε ως αποτέλεσμα η μέση διάρκεια του έτους να είναι μεγαλύτερη του τροπικού έτους γιατί κάθε τέσσερα χρόνια προστίθεται μια ημέρα, ενώ θα έπρεπε να προστίθεται το 0,9688 της ημέρας. Άρα κάθε τετρακόσια πολιτικά έτη υπάρχει μια διαφορά 3 ημερών 2 ωρών 53 min 30 sec.

Για τη διόρθωση αυτής της διαφοράς εισήχθη το 1582 μ.Χ. από τον Πάπα Γρηγόριο τον 13ο το καλούμενο **Γρηγοριανό Ημερολόγιο** (νέο). Σ' αυτό το ημερολόγιο **δίσεκτα** έτη θεωρούνται εκείνα που ο αριθμός τους είναι διαιρετός δια 4, εκτός από εκείνα των οποίων ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 100 και δεν είναι διαιρετός δια 400. Για παράδειγμα, το έτος 1700 δεν είναι δίσεκτο κατά το Γρηγοριανό, ενώ είναι δίσεκτο κατά το Ιουλιανό.

Επειδή στο Γρηγοριανό ημερολόγιο υπάρχει μια πολύ μικρή διαφορά μεταξύ πολιτικού και τροπικού έτους, που ανέρχεται σε 1 ημέρα 4 ώρες και 55 λεπτά ανά περίοδο 4.000 ετών, αυτό έχει υιοθετηθελι από όλους τους πολιτισμένους λαούς.

Το έτος χωρίζεται σε **μήνες**.

Συνοδικός μήνας: Η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη καθορίζει τον συνοδικό μήνα ως το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών επανόδων της Σελήνης στην ίδια φάση. Ο συνοδικός μήνας αποτελείται από 29,530588 ημέρες μέσου χρόνου.

Η θεμελίωση του πολιτικού έτους επί του συνοδικού μήνα έφερ μεγάλη σύγχυση μέχρι την καθιέρωση του Ιουλιανού ημερολογίου, οπότε το έτος χωρίστηκε σε 12 μήνες που περιέχουν διάφορο ακέραιο αριθμό ημερών.

3.8 Η ημερομηνία του Πάσχα

Η Οικουμενική Σύνοδος της Νίκαιας (325 μ.Χ.) καθόρισε να γιορτάζεται το Πάσχα την πρώτη Κυριακή μετά την Πανσέληνο που συμπίπτει ή έπεται της εαρινής ισημερίας. Η ημερομηνία Π, σε ημέρες Απριλίου, εορτασμού του Ορθόδοξου Πάσχα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi = [\,19[E]_{19} + 16]_{30} + [2\,[E]_4 + 4\,[E]_7 + 6\,[19\,[E]_{19} + 16]_{30}\,]_7 + 3\,,$$

όπου E παριστάνει το έτος και $[q]_u$ παριστάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης q/u. Για παράδειγμα, το Πάσχα του έτους $E = 2009$ υπολογίζεται αό τον τύπο:

$$\Pi = [\,19[2009]_{19} + 16]_{30} + [2[2009]_4 + 4[2009]_7 + 6\,[19[2009]_{19} + 16]_{30}\,]_7 + 3$$

και το αποτέλεσμα είναι 19 (το Πάσχα του 2009 ήταν στις 19 Απριλίου).

Η ημερομηνία του Πάσχα των Καθολικών διαφέρει γενικα από την ημερομηνία του Ορθόδοξου, γιατί ο προσδιορισμός της εαρινής ισημερίας γίνεται βάσει του Γρηγοριανού ημερολογίου, ενώ του Ορθόδοξου με βάση το Ιουλιανό. Επίσης ο προσδιορισμός των φάσεων της Σελήνης γίνεται κατά διαφορετικούς τρόπους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Γρ. Αντωνακόπουλου, *Μαθηαμτική Αστρονομία*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 1995.

[2] Γρ. Αντωνακόπουλου, *Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 2007.

[3] Χ. Ζαγούρα, Φ. Καρατζόγλου - Ζαφειροπούλου, *Ουράνιος Μηχανική - Σημειώσεις*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών, Πάτρα 2010.

[4] Β. Ν. Ζαφειρόπουλου, *Εισαγωγή στην Αστρονομία και Αστροφυσική*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2009.

[5] Β. Ν. Ζαφειρόπουλου, *Κοσμική Φυσική*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2009.

[6] Β. Ν. Ζαφειρόπουλου, *Πρακτική Αστρονομία*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2008.

[7]Β. Ν. Ζαφειρόπουλου, Α. Φλογαΐτη, *Ασκήσεις Εργαστηριακής Αστρονομίας*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2002.

[8] Μπ. Λανγκ, *Το Ηλιακό Σύστημα: Οι πλανήτες και η δημιουργία τους*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2009.

[9] Β. Μπαρμπάνη, *Μαθήματα Γενικής Αστρονομίας*, Πάτρα 1973.

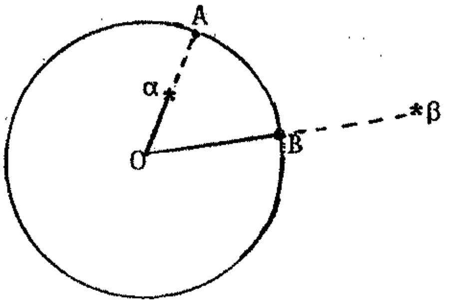
[10] A. E. Roy, D. Clark, *Astronomy: Principles and Practice*, Adam Hilger Ltd, Bristol 1982.

[11] J. M. Pasachoff, M. L. Kutner, *University Astronomy*, Saunders Co., Philadelphia 1978.

[12] Δ. Π. Σιμόπουλου, *Η βιογραφία του Σύμπαντος*, Εκδόσεις Ερευνητές, Αθήνα 2008.

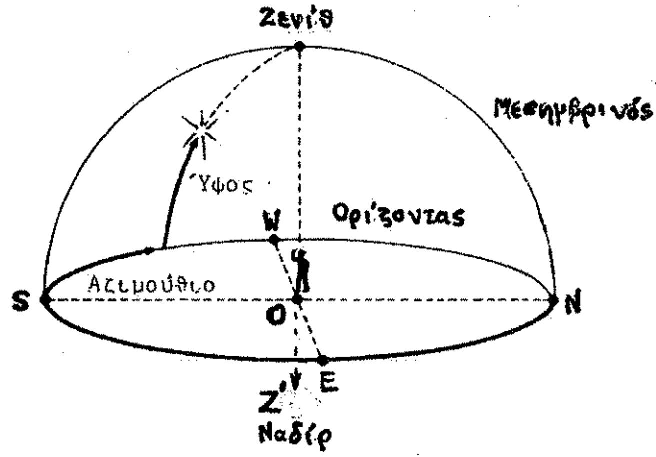
[13] Δ. Π. Σιμόπουλου, *Ο Χορός των Πλανητών*, Ίδρυμα Ευγενίδου, Νέο Ψηφιακό Πλανητάριο, Αθήνα 2007.

[14] Α. Φλογαΐτη, *Θέματα Αστρονομίας*, Πανεπιστ. Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2008.

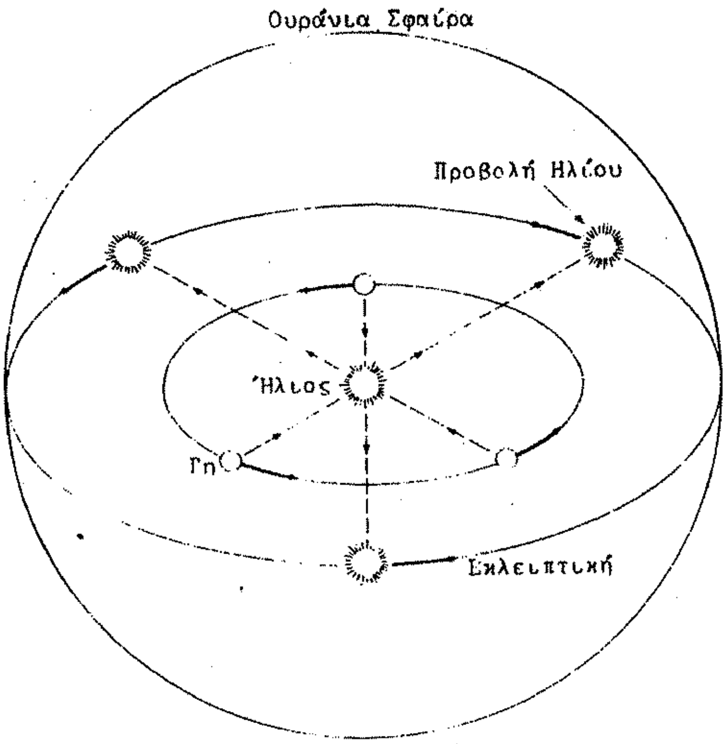


Οι θέσεις Α και Β είναι οι φαινόμενες θέσεις των αστέρων α και β αντίστοιχα.

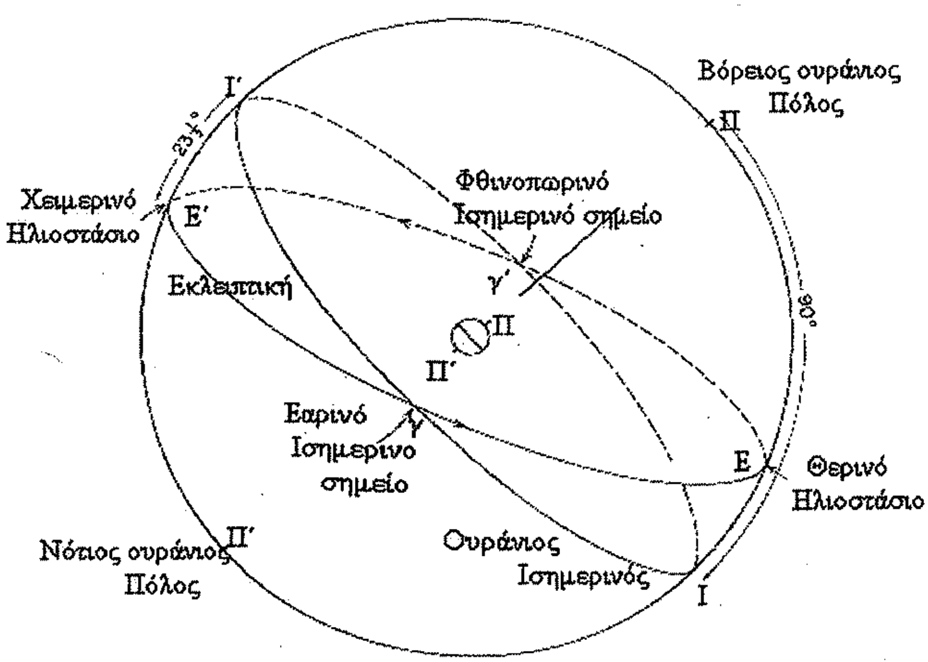
Σχήμα 1.1.1.



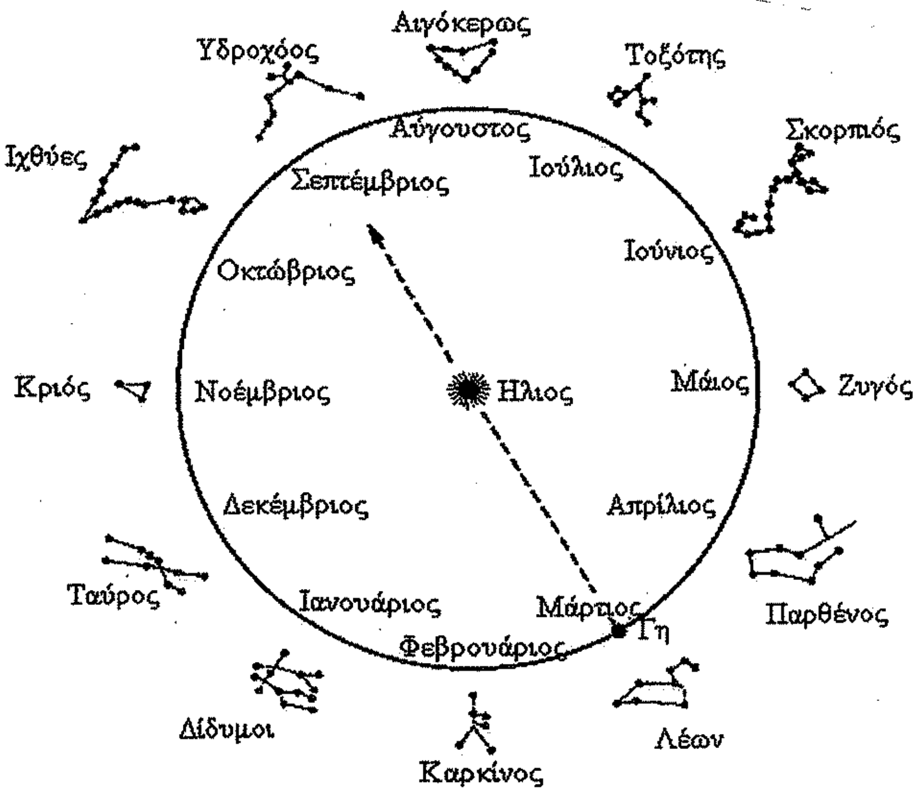
Σχήμα 1.1.2



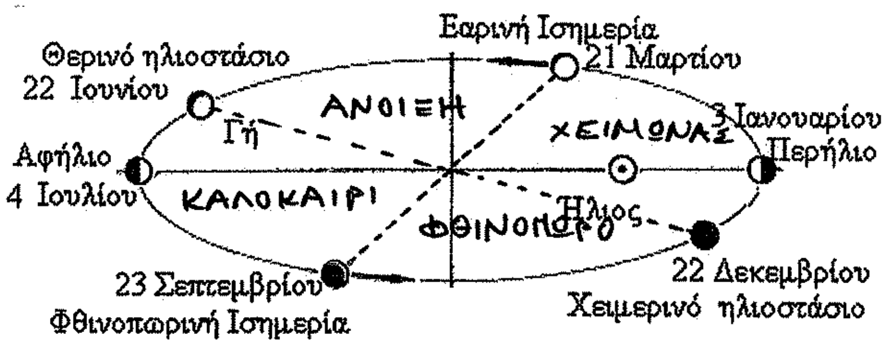
Σχήμα 1.2.1.



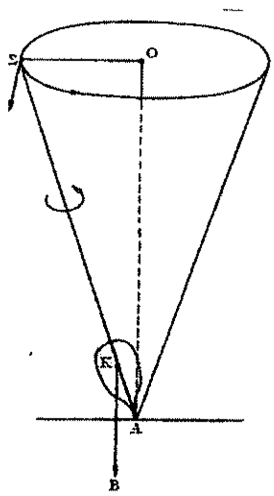
Σχήμα 1.2.2



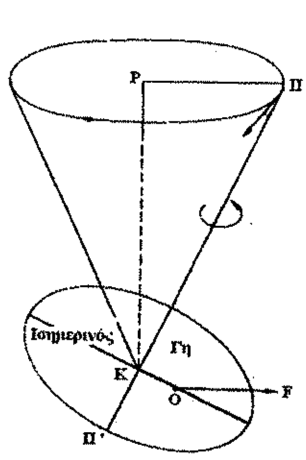
Σχήμα 1.2.3.



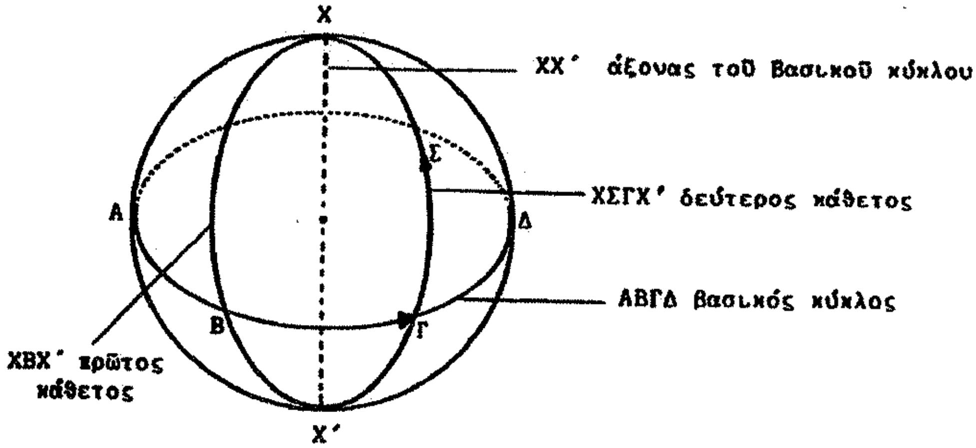
Σχήμα 1.2.4.



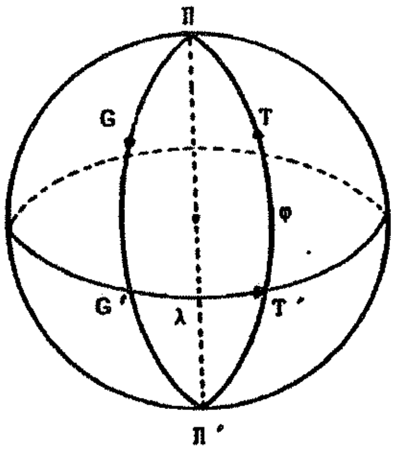
Σχ. 1.2.5.



Σχ. 1.2.6.



Σχήμα 1.3.1.



G = Greenwich.

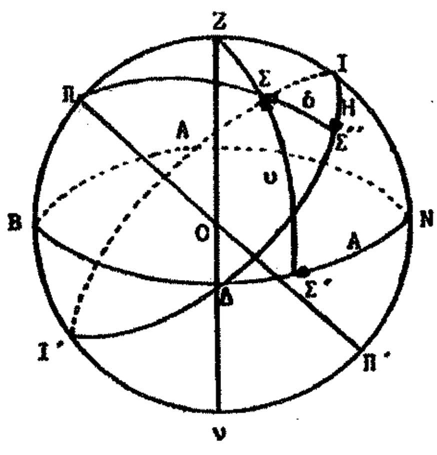
G'T' = γήϊνος ισημερινός (βασικός κύκλος).

ΠTT'Π' = μεσημβρινός του τόπου (δεύτερος κάθετος).

ΠΠ' = άξονας περιστροφής της Γής

ΠGG'Π' = μεσημβρινός του Greenwich (πρώτος κάθετος).

Σχήμα 1.3.2



ΠΠ' = Άξονας ουράνιας σφαίρας.

Zν = Κατακόρυφος του τόπου.

ΠΣΣ'' = Ωριαίος κύκλος του αστέρα.

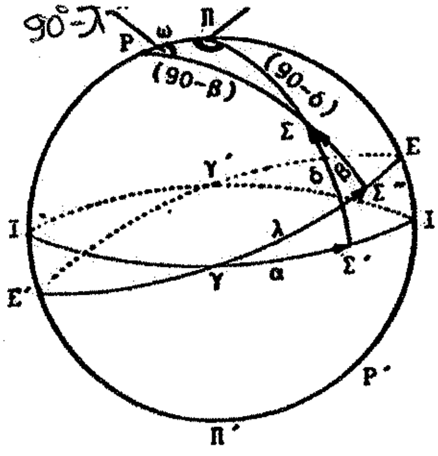
II' = Ουράνιος ισημερινός (βασικός κυκλος για ισημερινές συντεταγμένες).

ANΔB = Ορίζοντας του τόπου (βασικός κύκλος για οριζόντιες συντεταγμένες).

ΠZΠ'ν = Μεσημβρινός του τόπου

ZΣΣ' = Κατακόρυφος του αστέρα.

Σχήμα 1.3.3



γ = Εαρινό ισημερινό σημείο.

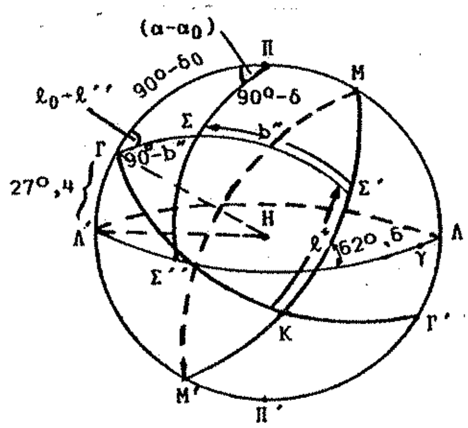
γ' = Φθινοπωρινό ισημερινό σημείο.

ΕΕ' = Εκλειπτική (βασικός κύκλος για εκλειπτικές συντεταγμένες).

PP' = Άξονας της εκλειπτικής.

ΠΠ' = Άξονας περιστροφής της ουράνιας σφαίρας.

Σχήμα 1.3.4

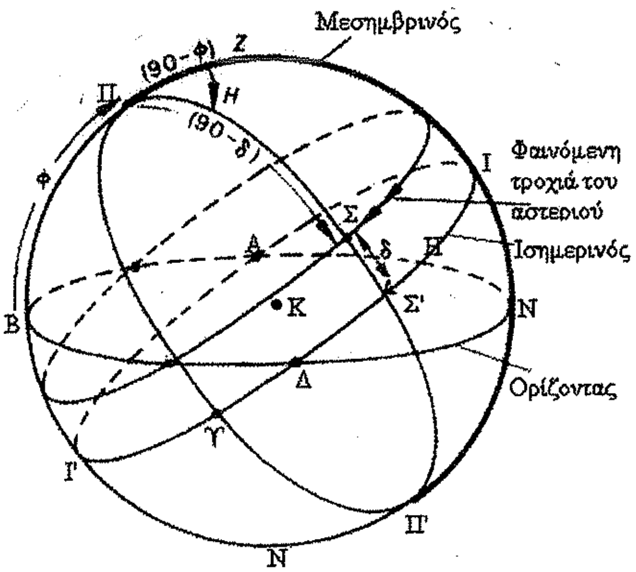


Μ ΚΜ' = Επίπεδο του γαλαξία (βασικός κύκλος).

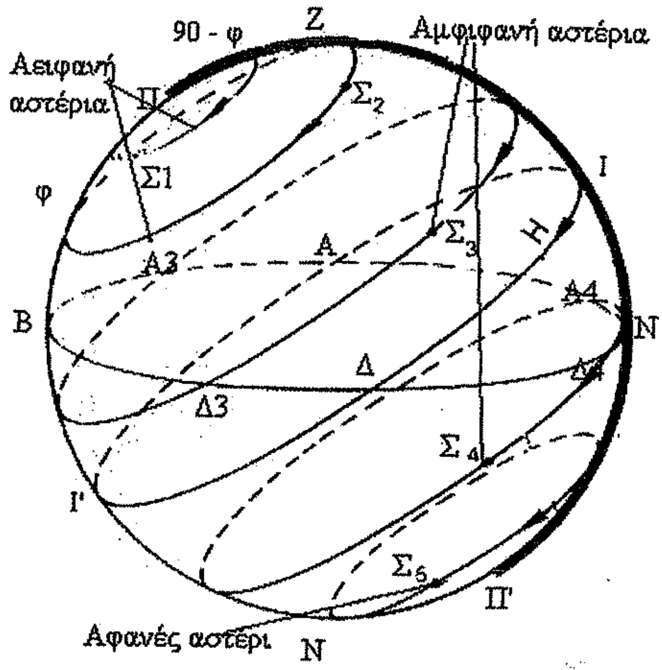
ΓΓ' = Άξονας του γαλαξία.

ΠΠ' = Άξονας περιστροφής της ουράνιας σφαίρας.

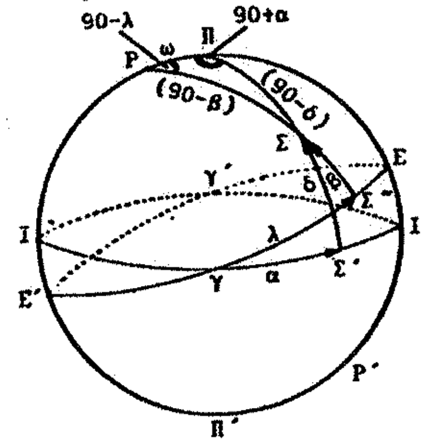
Σχήμα 1.3.5



Σχήμα 1.4.1

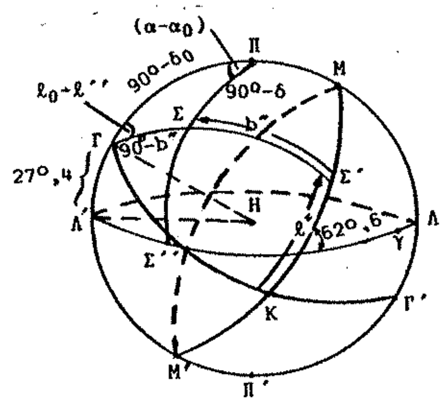


Σχήμα 1.4.2



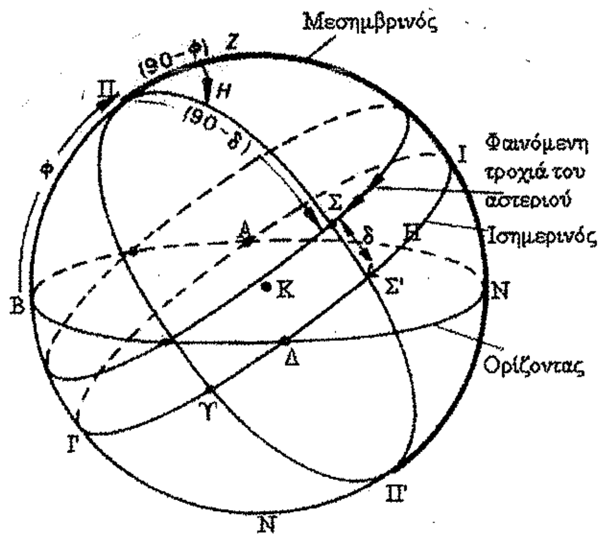
γ = Εαρινό ισημερινό σημείο.
γ' = Φθινοπωρινό ισημερινό σημείο.
ΕΕ' = Εκλειπτική (βασικός κύκλος για εκλειπτικές συντεταγμένες).
PP' = Άξονας της εκλειπτικής.
ΠΠ' = Άξονας περιστροφής της ουράνιας σφαίρας.

Σχήμα 1.3.4

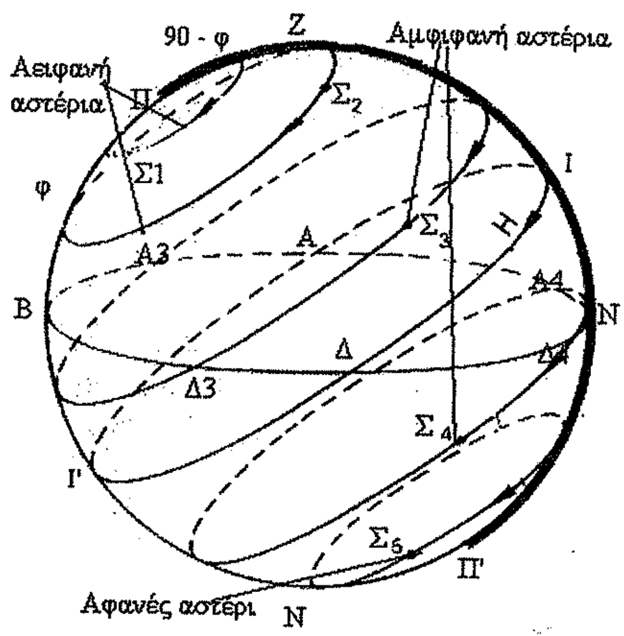


Μ ΚΜ' = Επίπεδο του γαλαξία (βασικός κύκλος).
ΓΓ' = Άξονας του γαλαξία.
ΠΠ' = Άξονας περιστροφής της ουράνιας σφαίρας.

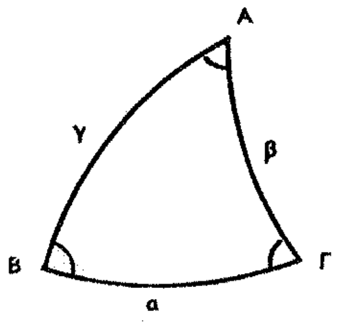
Σχήμα 1.3.5



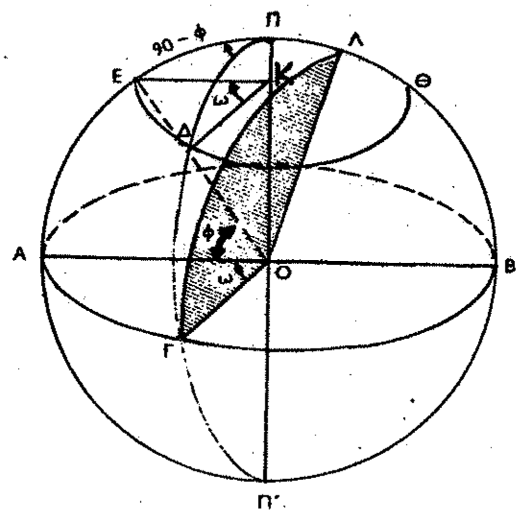
Σχήμα 1.4.1



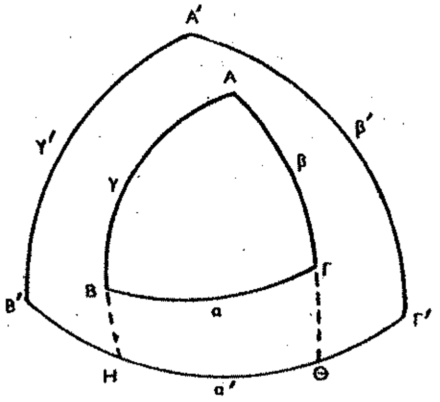
Σχήμα 1.4.2



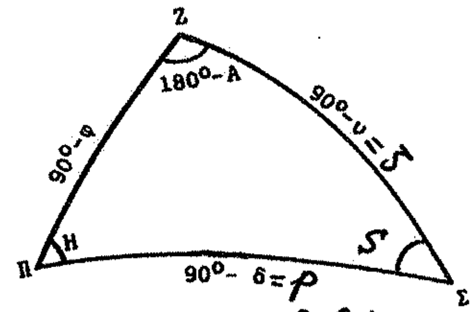
Σχήμα 2.1.1



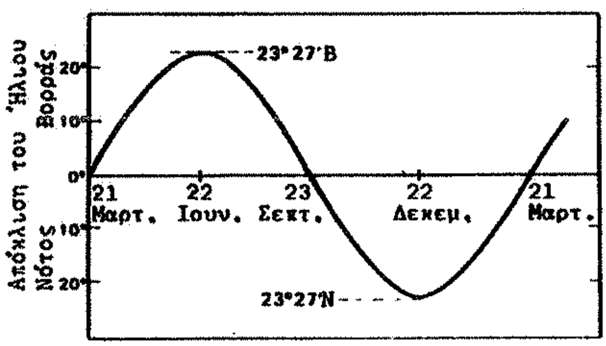
Σχήμα 2.1.2



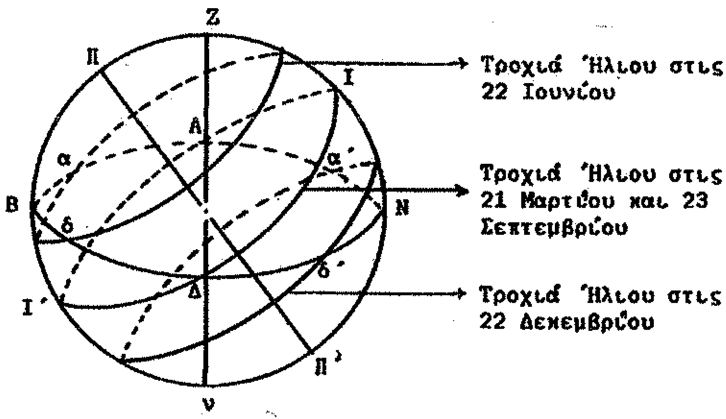
Σχήμα 2.6.1



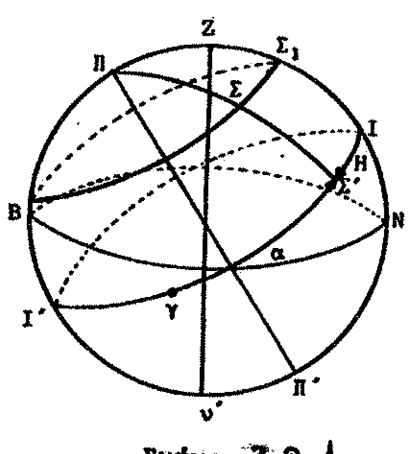
Σχήμα 2.8.1



Σχήμα 2.9.1



Σχήμα 2.9.2



Σχήμα 3.2.1