Φυλλάδιο για Στερεομετρία

Σχόλιο:

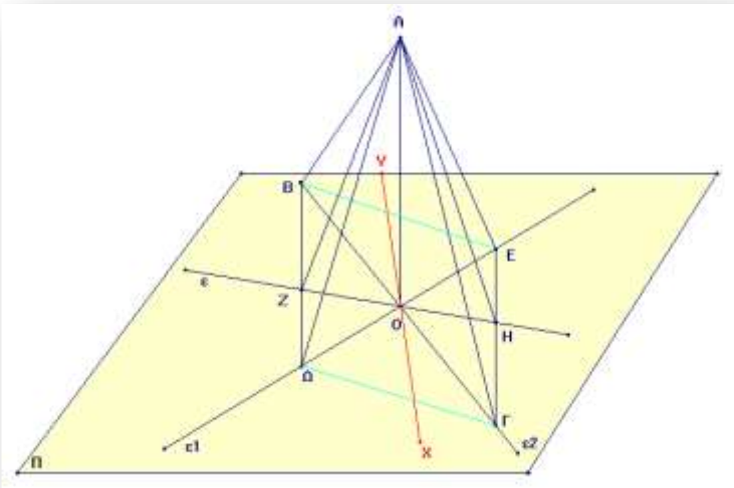
1) Ως αξιώματα για τη Στερεομετρία ακολουθούμε το «Έλασσον Γεωμετρικόν». Διαφοροποιούμαστε στον ορισμό της ευθείας της καθέτου προς επίπεδο, ακολουθώντας τον κλασικό ορισμό:
Ορισμός: Μια ευθεία λέμε πως είναι κάθετη σ’ ένα επίπεδο αν και μόνο αν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της.
Ως κριτήριο αποδεικνύουμε το θεώρημα:

«***Αν μια ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο είναι κάθετη σε δύο διαφορετικές ευθείες του επιπέδου, που διέρχονται από το κοινό της με το επίπεδο σημείο, τότε είναι κάθετη στο επίπεδο***»

Ή:

«***Μια ευθεία είναι κάθετη σένα επίπεδο, αρκεί να είναι κάθετη σε δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το κοινό της με το επίπεδο σημείο***»

<u>**Απόδειξη1:**</u> Έστω ένα επίπεδο, το Π, δύο τεμνόμενες σ’ ένα σημείο του, το Ο, ευθείες του Π, η ε_1 και η ε_2 και η ευθεία ΑΟ κάθετη στις ε_1 ,ε_2. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ΑΟ είναι κάθετη στο Π, δηλαδή κάθετη σε κάθε ευθεία του Π που διέρχεται από το Ο. Έστω λοιπόν μια τέτοια ευθεία η ε, Αρκεί να δείξουμε ότι ΑΟ$\perp$ε. Συνοπτικά:



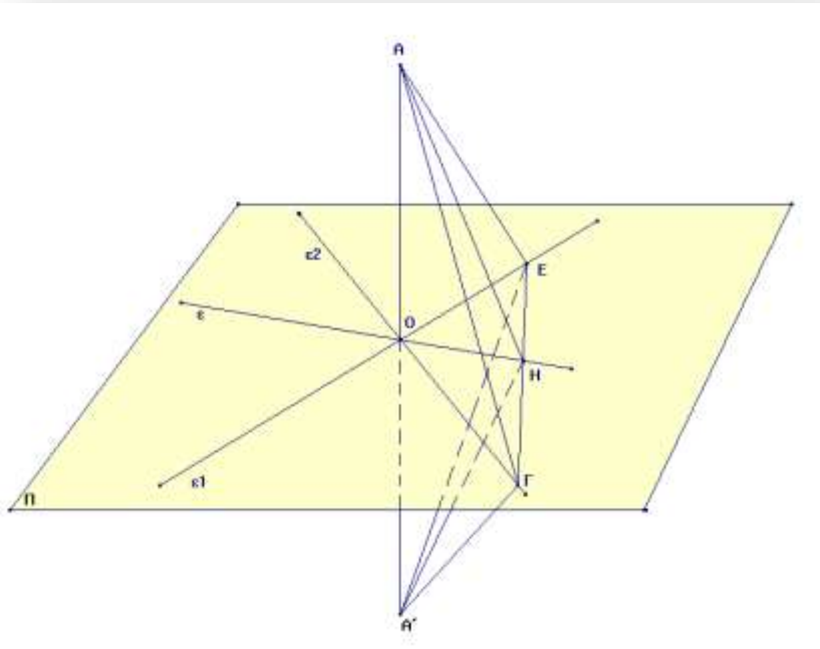
Υποθέσεις	Συμ/μα
$\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \Pi$ $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2=\{O\}$ $\varepsilon \in \Pi$ και $O \in \varepsilon$ $AO \perp \varepsilon_1$ και $AO \perp \varepsilon_2$	$AO \perp \varepsilon$

Με κέντρο το Ο και μια τυχαία ακτίνα, ορίζουμε πάνω στις ε_1, ε_2 τα σημεία Β,Γ,Δ,Ε τέτοια ώστε ΒΟ=ΟΓ= ΔΟ= ΟΕ. Οπότε η ΑΟ είναι μεσοκάθετος στις ΒΓ και ΔΕ. Φέρνουμε και τις ΒΔ και ΕΓ οι οποίες τέμνουν την ε στα Ζ και Η αντίστοιχα. Αν αποδείξουμε ότι το ΑΖΗ τρίγωνο είναι ισοσκελές και ότι το Ο είναι μέσον της ΖΗ, θα έχω το ζητούμενο γιατί η διάμεσος είναι και ύψος στα ισόπλευρα τρίγωνα.

Ανάλυση: Θέλω να δείξω ότι ΑΗ=ΑΖ. Τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα ανήκουν στα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΖΒ. Θα εξετάσω αν αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα. Έχουν ΑΓ=ΑΒ (καθότι ΑΟ⊥ΑΒ και Ο μέσον της ΒΓ. Εξετάζω μήπως έχουν και την ΒΖ=ΗΓ. Αυτές ανήκουν στα τρίγωνα ΒΖΟ και ΟΗΓ που είναι ίσα γιατί έχουν ΒΟ=ΟΓ, από την κατασκευή. Επίσης ∠ΒΟΖ=∠ΗΟΓ, ως κατά κορυφήν, και ΟΖ=ΟΗ, διότι το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται από την κατασκευή, και αν φέρουμε από το Ο την ΧΥ μεσοπαράλληλη, τότε οι παράλληλες ΒΔ, ΧΥ, και ΓΕ αποκόπτουν τμήματα ανάλογα από τις ΒΓ, ΔΕ, και ΖΗ, άρα ΟΖ=ΟΗ) Άρα το τρίγωνο ΒΖΟ=ΟΗΔ, οπότε και ΒΖ=ΗΓ. Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΗΓ και ΑΖΒ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία: ΑΓ=ΑΒ και ΗΓ=ΒΖ. Μένει να εξετάσουμε αν η περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες, δηλαδή αν ∠ΑΓΗ=;∠ΑΒΖ.

Πράγματι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρείς πλευρές ίσες: ΒΔ=ΕΓ ως απέναντι παραλληλογράμμου και ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ=ΑΕ καθότι η ΑΟ είναι μεσοκάθετος στις Α Β και ΔΕ, άρα ΑΓΕ=ΑΒΔ.
Απόδειξη: (μπορεί να γραφεί ακλουθώντας την αντίστροφη πορεία της ανάλυσης)

<u>Απόδειξη2:</u> Έστω ένα επίπεδο, το Π, δύο τεμνόμενες σ' ένα σημείο του, το Ο, ευθείες του Π, η ε_1 και η ε_2 και η ευθεία ΑΟ κάθετη στις ε_1 ,ε_2. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ΑΟ είναι κάθετη στο Π, δηλαδή κάθετη σε κάθε ευθεία του Π που διέρχεται από το Ο. Έστω λοιπόν μια τέτοια ευθεία η ε, Αρκεί να δείξουμε ότι ΑΟ⊥ε.



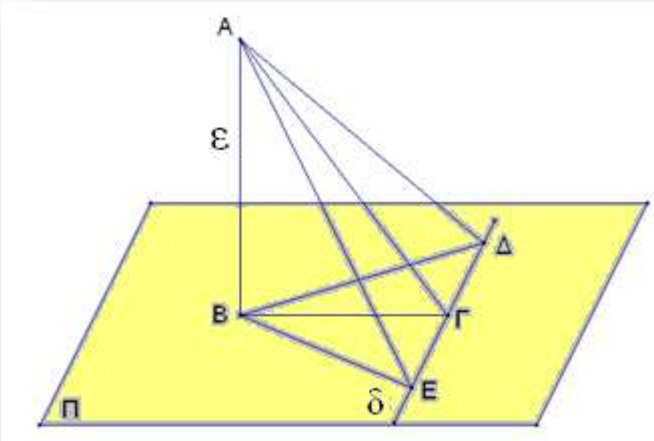
Θεωρούμε μια τυχούσα ευθεία του Π, η οποία να τέμνει τις ε_1 ε_2 και ε στα Ε Γ και Η αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΑΟ προς τον άλλο ημιχώρο και παίρνουμε σημείο Α΄ ώστε ΑΟ=ΑΌ. Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι ΗΟ⊥ΑΟ. Συνδέουμε τα Α και Α΄ με τα Ε, Η και Γ. Οι ΕΟ και ΓΟ είναι μεσοκάθετοι στην ΑΑ΄, οπότε τα τρίγωνα ΑΕΓ και Α΄ΕΓ είναι ίσα αφού έχουν και τις τρείς πλευρές ίσες, δηλαδή ∠ΑΓΗ=∠Α΄ΓΗ, που σημαίνει ότι τα τρίγωνα ΑΓΗ και Α΄ΓΗ είναι ίσα, οπότε και ΑΗ=Α'Η, δηλαδή το τρίγωνο ΑΗΑ΄ είναι ισοσκελές και η διάμεσος ΗΟ είναι και ύψος, δηλαδή ΗΟ⊥ΑΟ. ☺☺
Πόρισμα 8.5.1, Πρόταση 8.5.1, Πρόταση 8.5.2, (ως ΕΛΑΣΣΟΝ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙΝ)

Η Κατασκευή 8.5.1, είναι ένα πολύ καλό παράδειγμα γεωμετρικής κατασκευής στο χώρο, με την Αναλυτικοσυνθετική μέθοδο, ως εξής:

Θεώρημα των τριών Καθέτων Ι : Εάν μια ευθεία, η ε, είναι κάθετη σ' ένα επίπεδο Π και από το ίχνος της ε αχθεί κάθετη πάνω σε μια τυχούσα ευθεία του επιπέδου Π, έστω την δ, τότε η ευθεία που ενώνει ένα τυχαίο σημείο της ε με το ίχνος της καθέτου επί την δ, είναι κάθετος στην δ.

(*Ανάλυση*: Διερευνούμε τις περιπτώσεις που μια ευθεία είναι κάθετη σε μια άλλη για να δούμε ποια μπορεί εδώ να αξιοποιηθεί π.χ. ακτίνα και εφαπτόμενη, διαδοχικές πλευρές ορθογωνίου, ύψος τριγώνου, διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου άρα και ύψος, κλπ. Εξετάζουμε το τελευταίο.)

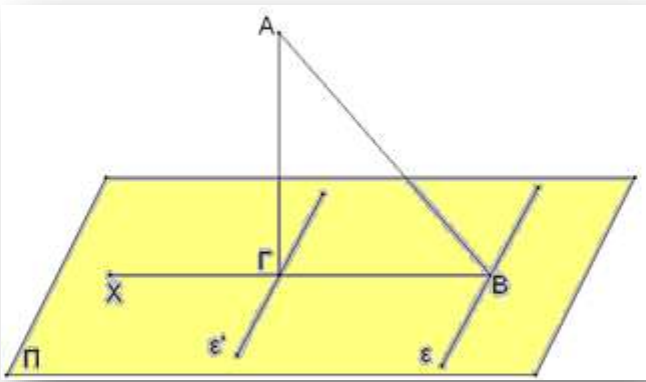
Έστω ένα επίπεδο, το Π, η ευθεία ε⊥Π, με Β το ήχνος της, δ μια τυχούσα ευθεία του Π και ΒΓ⊥δ στο Γ. Έστω ακόμα Α ένα τυχαίο σημείο της ε. Πρέπει να δείξουμε ότι ΑΗ⊥δ.



Παίρνουμε δύο σημεία πάνω στην δ εκατέρωθεν του Γ και ισαπέχοντα απ' αυτό, τα Δ και Ε. Αν αποδείξουμε ότι ΑΔ = ΑΕ, έχουμε τελειώσει καθότι τότε η ΑΓ θα είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΑΔ, από την κατασκευή, άρα και ύψος.

Πράγματι στα τρίγωνα ΒΓΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες μία προς μία τις κάθετες πλευρές, (η ΒΑ είναι κοινή, ενώ από την κατασκευή ΒΓ είναι μεσοκάθετος στην ΕΔ) οπότε για τον ίδιο λόγο είναι ίσα και τα ΑΒΕ και ΑΒΔ, άρα και ΑΕ = ΑΔ, και ΑΗ⊥δ. Το οποίο ήταν προς απόδειξη.

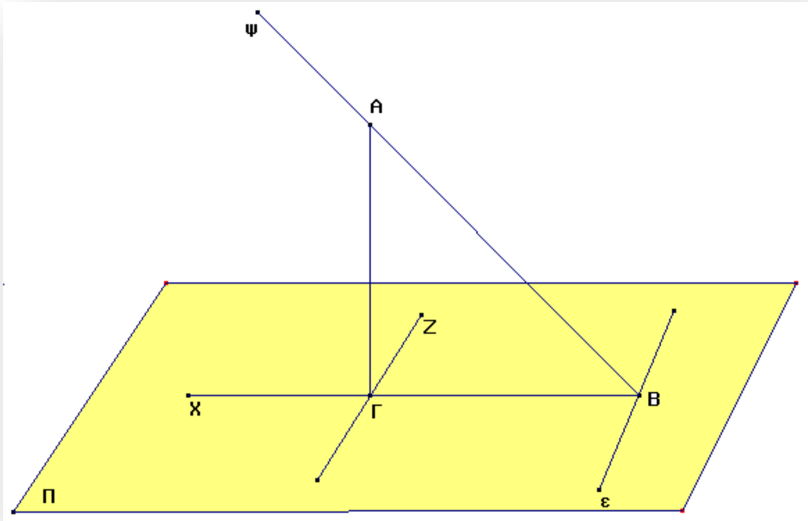
Θεώρημα των τριών Καθέτων ΙΙ: Από ένα τυχαίο σημείο το Α έξω από ένα επίπεδο, το Π, φέρνουμε την ΑΒ κάθετη πάνω σε τυχαία ευθεία του επιπέδου Π, έστω την ε, και πάνω στο επίπεδο Π την ΒΧ κάθετη στην ε. Αν από το Α φέρουμε μία κάθετη στην ΒΧ, τότε αυτή θα είναι κάθετη στο επίπεδο Π.



Επειδή η ε είναι κάθετη στην ΑΒ αλλά και στην ΒΧ, άρα είναι κάθετη στο επίπεδο ΧΒΑ. Φέρνουμε από το Γ μία παράλληλη στην ε, η οποία θα είναι κάθετη και στο επίπεδο

ΧΒΑ, οπότε θα είναι κάθετη στην ΓΑ που είναι ευθεία του επιπέδου ΧΒΑ. Η ΑΓ λοιπόν είναι κάθετη στην ε΄ και στην ΒΧ άρα είναι κάθετη στο επίπεδο Π.

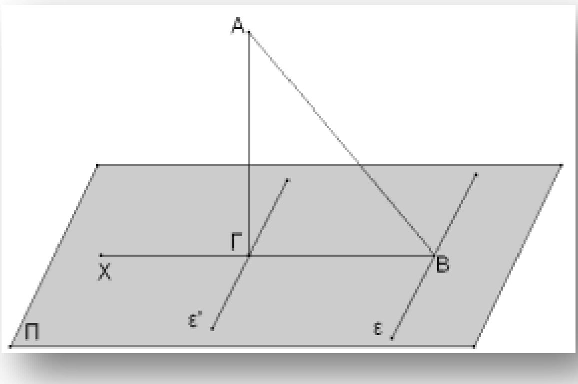
Θεώρημα των τριών Καθέτων III: Αν από ένα σημείο, έστω το Β, μιας τυχαίας ευθείας ε, ενός επιπέδου, έστω του Π, αχθούν δύο ευθείες κάθετες στην ε η ΒΧ επί του επιπέδου Π και η ΒΨ το χώρο, τότε η κάθετος που άγεται από ένα τυχαίο σημείο Α της ΒΨ επί την ΒΧ είναι κάθετη και στο επίπεδο Π.



Απόδειξη: (αφήνεται ως άσκηση)

Πρόταση πρόβλημα: Δίδεται ένα επίπεδο Π και ένα σημείο, έστω το Α, εκτός αυτού. Να αχθεί κάθετος από το Α στο επίπεδο Π.

<u>Ανάλυση:</u> Έστω ότι η ΑΒ είναι η ζητούμενη κάθετος από το Α στο επίπεδο Π. Γράφουμε μια τυχαία ευθεία, την ε, πάνω στο επίπεδο π και από τον πόδα β της καθέτου φέρουμε κάθετο στην ε, την ΒΓ. Φέρουμε την ΑΓ, η οποία σύμφωνα με το θεώρημα των τριών καθέτων, είναι κάθετη στην ε.

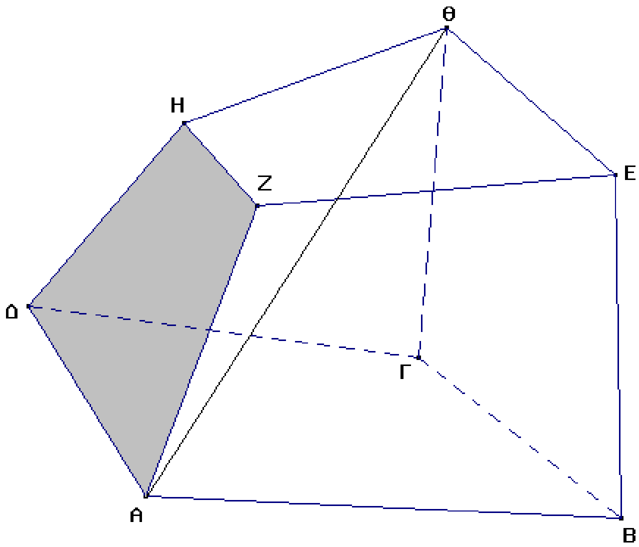


<u>Σύνθεση:</u> Θεωρούμε μια τυχούσα ευθεία του επιπέδου Π, ας είναι η ε, και από το σημείο Α φέρουμε μια κάθετη στην ε, την ΑΒ. Επί του επιπέδου Π φέρουμε την ΒΧ, κάθετη στην ε. Από το σημείο τώρα Α φέρουμε μια κάθετη στην ΒΧ, την ΑΓ. Η ΑΓ είναι η ζητούμενη κάθετος από το Α στο επίπεδο Π.

<u>Απόδειξη</u>:(Προφανής από παραπάνω θεώρημα)

Το Πολύεδρο

Ονομάζουμε **Πολύεδρο** ένα στερεό το οποίο περικλείεται από επίπεδα. Τα επίπεδα που περιορίζουν τον χώρο που καταλαμβάνει το στερεό λέγονται **Έδρες του πολυέδρου**. Οι ευθείες που ορίζονται ως τομές δύο εδρών του πολυέδρου λέγονται **Ακμές του πολυέδρου**. Συχνά ονομάζουμε *έδρες* και τα *πολύγωνα* που σχηματίζονται επί μιάς έδρας μέσω των ευθειών-τομών της με τις άλλες. Οι δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται στις ακμές του πολυέδρου λέγονται **Δίεδρες του πολυέδρου**. Οι πολυεδρικές γωνίες που σχηματίζονται από τρεις ή περισσότερες έδρες που διέρχονται από κοινό σημείο λέγονται **Πολυεδρικές γωνίες του πολυέδρου**. Οι κορυφές των πολυεδρικών γωνιών λέγονται **Κορυφές του πολυέδρου**. Ένα πολύεδρο λέγεται **Κυρτό** όταν κάθε έδρα του αφήνει το πολύεδρο από την μιά μεριά του μόνο. Δύο πολύεδρα ΑΒΓ... και Α*Β*Γ*... λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες δίεδρες επίσης ίσες.



Έδρες: ΑΖΗΔ, ΖΗΘΕ, ΕΘΓΒ, ΔΓΘΗ, ΑΒΓΔ

Κορυφές: Α, Β, Γ, Δ, Ε,Ζ Η, Θ

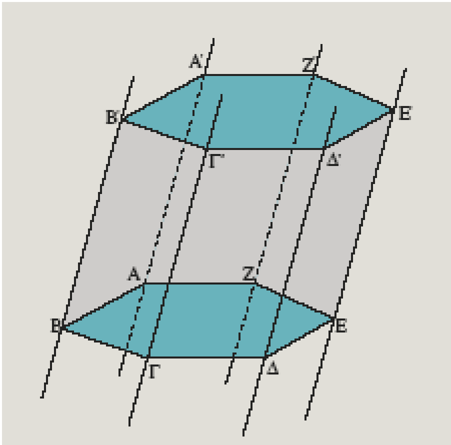
Διαγώνιος: ΑΘ

Ακμές: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ, ….

Η Πρισματική επιφάνεια - Πρίσμα

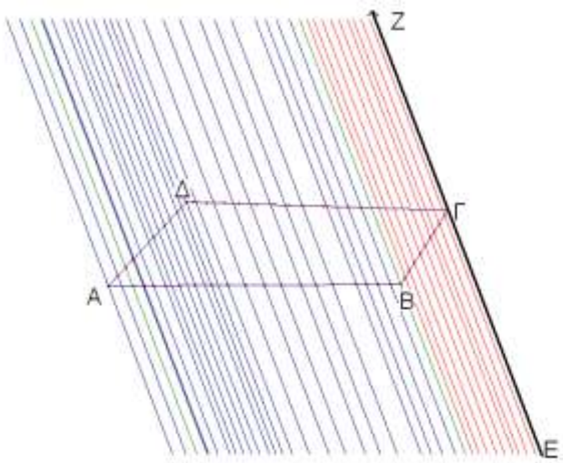
1^{ος} Ορισμός

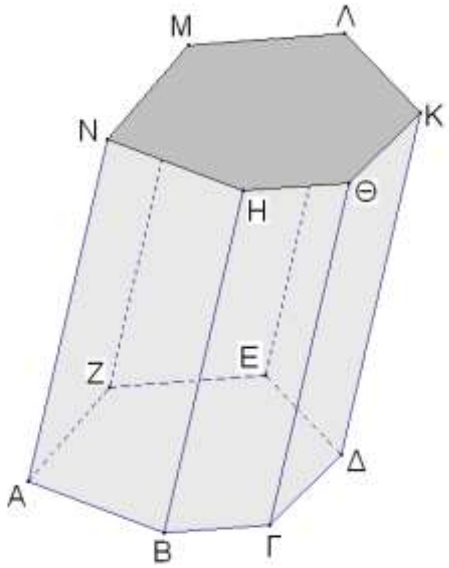
Η εκτεινόμενη στο άπειρο επιφάνεια, αποτελούμενη από τις λωρίδες μεταξύ των παραλλήλων ευθειών (ΑΑ′,ΒΒ′), (ΒΒ′,ΓΓ′), ... λέγεται **Πρισματική επιφάνεια**. Οι δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών λωρίδων ονομάζονται **Δίεδρες** της πρισματικής επιφάνειας. Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας μία πρισματική επιφάνεια με δύο παράλληλα επίπεδα λέγεται **Πρίσμα**. Η απόσταση αυτών των επιπέδων λέγεται **Ύψος του πρίσματος**. Τα πολύγωνα που ΑΒΓΔ... και Α′Β′Γ′Δ′... που ορίζονται από την τομή της πρισματικής επιφάνειας με τα παράλληλα επίπεδα είναι ίσα (Πόρισμα 7.3.2) και λέγονται **Βάσεις του πρίσματος**. Το πρίσμα λέγεται **Κυρτό** όταν το αντίστοιχο πολύγωνο της βάσης ΑΒΓΔ... είναι κυρτό. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ... λέγονται **Παράπλευρες ακμές**



2^{ος} Ορισμός

Δίδεται μια Η κλειστή κυρτή πολυγωνική γραμμή, η ΑΒΓΔ, και μια ευθεία οδηγός, η ΕΖ (ή μια διεύθυνση η ΕΖ). Αν από κάθε σημείο της πολυγωνικής γραμμής αχθούν ευθείες παράλληλες προς την ΕΖ, η επιφάνεια που δημιουργείται ονομάζεται **πρισματική επιφάνεια.**





Ονομάζεται **πρίσμα** το στερεό που περικλείεται από μια πρισματική επιφάνεια και δύο παράλληλα επίπεδα τα οποία τέμνουν την πρισματική αυτή επιφάνεια.

Τα τμήματα των παράλληλων επιπέδων που αποκόπτονται από τα παράλληλα επίπεδα αποτελούν τις **βάσεις του πρίσματος**. Εδώ τα ΑΒΓΔΕΖ και ΝΗΘΚΛΜ.

Το τμήμα της πρισματικής επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ των παράλληλων επιπέδων λέγεται **παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος.**

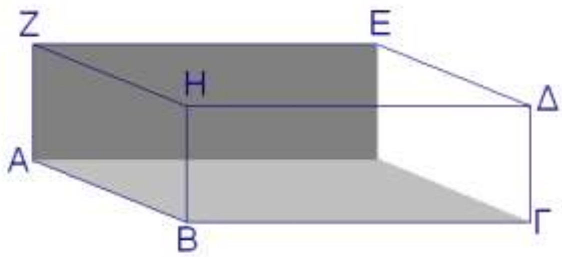
Θεώρημα: Οι βάσεις ενός πρίσματος είναι ίσα (και όμοια) πολύγωνα.

Τα παραλληλόγραμμα που αποτελούν τη παράπλευρη επιφάνεια ενός πρίσματος λέγονται **έδρες του πρίσματος**.

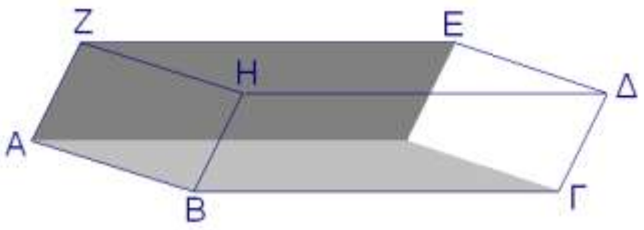
Παραλληλεπίπεδα

(Ή μια κατηγορία Πρισμάτων)

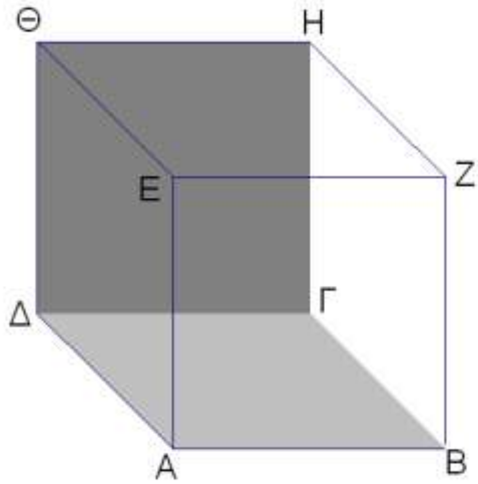
Ορθογώνιο



Πλάγιο

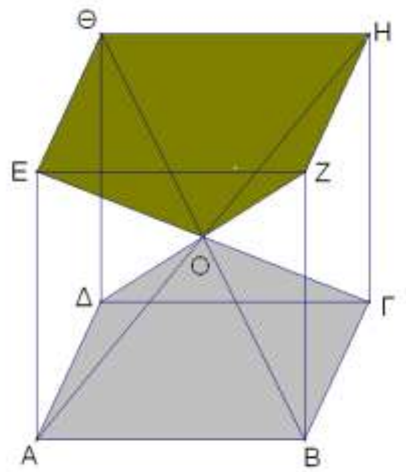


Ο κύβος



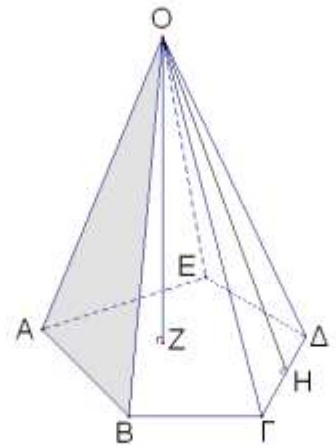
Οι διαγώνιοι του κύβου χωρίζουν τον κύβο σε έξη ίσες μεταξύ τους πυραμίδες τις

Ο,ΑΒΓΔ Ο,ΒΓΗΖ Ο,ΕΖΗΘ Ο,ΑΔΘΕ Ο,ΑΒΖΕ και Ο,ΓΗΘΔ.



Η Πυραμίδα

Δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔ... περιεχομένου σε επίπεδο ε και σημείου Ο εκτός του επιπέδου αυτού, ονομάζουμε **Πυραμίδα** το στερεό σχήμα που δημιουργείται ενώνοντας το σημείο Ο με τις κορυφές του πολυγώνου. Οι πλευρές του πολυγώνου καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ... λέγονται **Ακμές της πυραμίδας**. Οι ακμές ΟΑ, ΟΒ, ... λέγονται συχνά και **Παράπλευρες ακμές** της πυραμίδας. Το πολύγωνο, λέγεται **Βάση της πυραμίδας**. Όταν το πολύγωνο είναι κυρτό η πυραμίδα λέγεται **Κυρτή πυραμίδα**. Συχνά με τον όρο *βάση πυραμίδας* εννοούμε και το επίπεδο ε που περιέχει το πολύγωνο. Στα



Η βάση της πυραμίδας το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ

Η κορυφή της Πυραμίδας το σημείο Ο

Το ύψος της πυραμίδας το ΟΖ

Παράπλευρες έδρες: ΟΑΒ, ΟΒΓ,ΟΓΔ,ΟΕΔ,ΟΕΑ

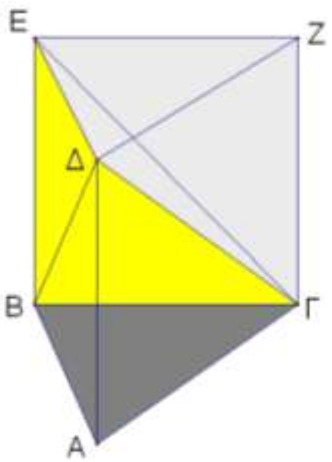
Παράπλευρο ύψος της έδρας ΓΟΔ: ΟΗ

Θα συμβολίζουμε μια πυραμίδα γράφοντας πρώτα το γράμμα της κορυφής το οποίο θα χωρίζεται με ένα κόμμα από τα γράμματα του πολυπλεύρου της βάσης.

Έτσι η διπλανή πυραμίδα είναι η Ο,ΑΒΓΔΕ

Ο όγκος της Πυραμίδας

Ο όγκος μιας πυραμίδας ως φυσικό μέγεθος πρέπει να είναι γινόμενο (μήκος)^3, να έχει διαστάσεις L^3, να είναι επιφάνεια επί μήκος επί κάποια συντελεστή, καθαρό αριθμό. Δηλαδή να είναι της μορφής $V_\pi = \frac{1}{3}B\upsilon$



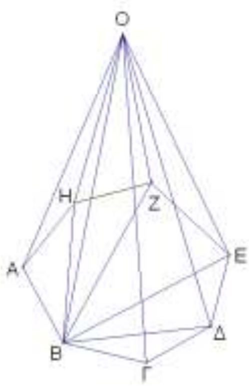
Θεώρημα: Ο όγκος μιας τριγωνικής πυραμίδας είναι το ένα τρίτο του πρίσματος που έχει την ίδια βάση, *Β* και το ίδιο ύψος, *υ*.

Έστω μια τριγωνική πυραμίδα η Δ,ΑΒΓ. Από τη κορυφή Δ φέρνουμε την ΔΖ=//ΑΓ και ΔΕ=//ΑΒ και κατόπιν τα ΓΖ ΒΕ και ΕΖ. Προφανώς το στερεό ΑΒΓΔΕΖ είναι ένα τριγωνικό πρίσμα, που αποτελείται από την αρχική πυραμίδα Δ,ΑΒΓ και την Δ,ΒΓΖΕ. Φέρνουμε τώρα τη διαγώνιο ΕΓ της πλευράς ΒΓΖΕ του πρίσματος η οποία από την κατασκευή είναι παραλληλόγραμμο. Δημιουργούνται τότε δύο ακόμη πυραμίδες η Δ,ΕΓΖ και η Δ,ΕΓΒ οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους καθότι έχουν ίσες βάσεις πάνω στο ίδιο επίπεδο(ΕΓΖ)=(ΕΓΒ) και κοινή κορφή δηλαδή ίσα ύψη. Επίσης η Δ,ΕΓΖ μπορεί να θεωρηθεί με κορυφή το Γ ως Γ,ΔΕΖ και ως τέτοια έχει ίση τη βάση της και το ύψος της με την αρχική τη Δ,ΑΒΓ. Άρα (Δ,ΑΒΓ)=(Δ,ΕΓΖ)=(Δ,ΕΓΒ). ¨Όμως

(Δ,ΑΒΓ)+(Δ,ΕΓΖ)+(Δ,ΕΓΒ)=(ΑΒΓΔΕΖ). Με άλλα λόγια (Δ,ΑΒΓ)= $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓΔΕΖ) ή

$$V_\pi = \frac{1}{3} B\upsilon$$

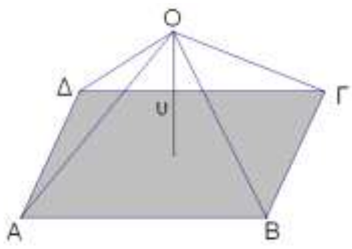
Σχόλιο: Η παραπάνω απόδειξη είναι η κλασική Ευκλείδεια απόδειξη, Όπως όμως μαθαίνουμε από τον Αρχιμήδη το αποτέλεσμα αυτό ήταν γνωστό στον Δημόκριτο, αλλά η απόδειξη, μέσα στο αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Εύδοξο τον Κνίδειο,

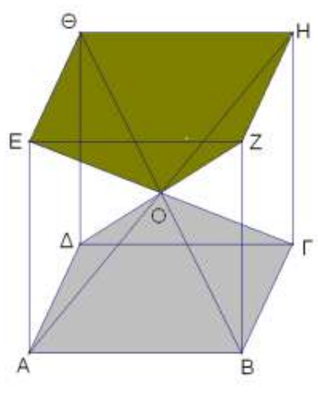


Ο τύπος αυτό γενικεύεται εύκολα ως εξής:

Θεώρημα: Κάθε πυραμίδα είναι ίση σε όγκο με το ένα τρίτο του πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

(Υπόδ. Κάθε πυραμίδα χωρίζεται σε τριγωνικές…)





Σχόλιο: Ο συντελεστής $\frac{1}{3}$ μπορεί να προσδιοριστεί και ως εξής:

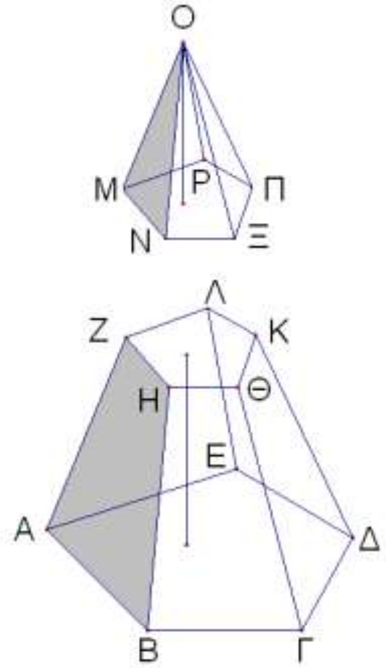
Έστω μια τετραγωνική κανονική πυραμίδα με πλευρά βάσης α. Τότε ο όγκος της θα είναι $V_\pi = \frac{1}{k} a^2 \upsilon$

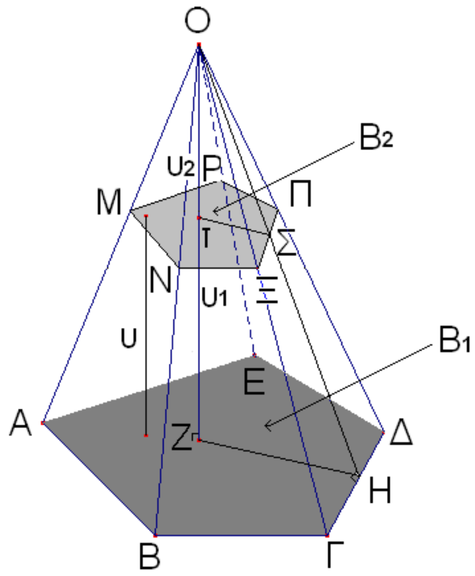
Ο κύβος με ακμή α αποτελείται από 6 τέτοιες πυραμίδες. Δηλαδή

$$a^3 = 6\frac{1}{k} a^2 \frac{a}{2} \text{ ή } k = \frac{1}{3}$$

Η Κόλουρη πυραμίδα

μιά πολυεδρική γωνία και ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της καθώς και ένα άλλο παράλληλο προς το προηγούμενο επίπεδο λέγεται **Κόλουρη πυραμίδα**.





Ζητείται ο όγκος της κόλουρης πυραμίδας.

(Θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα ως λήμμα ότι: [1]Αν δύο παράλληλα επίπεδα τμηθούν από ένα τρίτο οι τομές είναι ευθείες παράλληλες. Από αυτό δε συνάγεται ότι οι δύο βάσεις της κόλουρης πυραμίδας είναι όμοια πολύγωνα. Και από την επιπεδομετρία ξέρουμε ότι [2]ο λόγος δύο ομοίων επιπέδων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας,, δηλαδή δύο ομόλογων πλευρών τους)

Έστω η κόλουρη πυραμίδα ΑΒΓΔΕΜΝΞΠΡ, θα υπολογίσουμε τον όγκο της ως συνάρτηση του εμβαδού των βάσεων B_1 και B_2 και του ύψους της υ.

Προεκτείνουμε τις ακμές ΑΜ, ΒΝ, ΓΞ, ΔΠ, ΚΑΙ ΕΡ της κόλουρης πυραμίδας οι οποίες συναντώνται σε ένα σημείο (από τον ορισμό της κόλουρης) έστω το Ο. Σχηματίζεται έτσι άλλη μία πυραμίδα με βάση B_2 και ύψος $υ_2$.

Οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι $V_K = V_{O,ABGDE} - V_{O,MNΞΠΡ}$. Δηλαδή:

$$V_k = \frac{1}{3} B_1 \upsilon_1 - \frac{1}{3} B_2 \upsilon_2$$

$$V_k = \frac{1}{3}(B_1\upsilon_1 - B_2\upsilon_2) \qquad (1)$$

Θα εκφράσουμε τώρα τα υ_1 και υ_2 συνάρτηση του εμβαδού των βάσεων B_1 και B_2 και του ύψους υ της κόλουρης πυραμίδας.

Από εφαρμογή του [2] έχουμε ότι $\frac{B_1}{B_2} = (\frac{\Gamma\Delta}{\Xi\Pi})^2$ που ισοδυναμεί με

$$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{\Gamma\Delta}{\Xi\Pi} \qquad (2)$$

Πρέπει τώρα το δεύτερο λόγο της ισότητας αυτής να τον συσχετίσουμε με τα ύψη των δύο πυραμίδων. Αυτό φαίνεται εφικτό αν χρησιμοποιήσω το τρίγωνο ΟΖΗ στο οποίο συμμετέχουν τα ύψη.

Έστω $\mathrm{OZ} \perp B_1$, δηλαδή $\mathrm{OZ} = \upsilon_1$ το ύψος της μεγάλης πυραμίδας. Φέρνω από το Ζ την $\mathrm{ZH} \perp \Gamma\Delta$ οπότε από το Θεώρημα των τριών καθέτων $\mathrm{OH} \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή η ΟΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΟΓΔ. Όμοια $\mathrm{OT} = \upsilon_2$ και $\mathrm{OT} \perp B_2$, $\mathrm{T\Sigma} \perp \Xi\Pi$ άρα $\mathrm{O\Sigma} \perp \Xi\Pi$ είναι το ύψος του τριγώνου ΟΞΠ. Έτσι από τα όμοια τρίγωνα ΓΟΔ και ΞΟΠ έχουμε

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Xi\Pi} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{O\Sigma}} \qquad (3)$$

Και από τα όμοια τρίγωνα ΟΖΗ και ΟΤΣ έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{O\Sigma}} = \frac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{OT}} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \qquad (4)$$

Από τις (2), (3), (4) έχουμε και ότι $\upsilon_1 - \upsilon_2 = \upsilon$

$$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\upsilon_1}{\sqrt{B_1}} = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

Από την ισότητα του πρώτου κλάσματος με το τελευταίο έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

Ενώ από το δεύτερο και το τελευταίο:

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

Αντικαθιστούμε τις δύο τελευταίες σχέσεις στην (1) και έχουμε

$$V_k = \frac{\upsilon}{3}\left(\frac{(\sqrt{B_1})^3 - (\sqrt{B_2})^3}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}\right)$$

Και αξιοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα: $(\alpha^3-\beta^3)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ έχουμε τον τελικό τύπο:

$$V_k = \frac{1}{3}\upsilon(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$$