

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΩΝ

- (1) Έστω G απλός γράφος, που έχει 9 κορυφές και άθροισμα βαθμών κορυφών μεγαλύτερο του 27. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια κορυφή του G με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4.

- (2) Αποδείξτε ότι το πλήθος των απλών γράφων με σύνολο κορυφών το $[n]$ είναι $2^{\binom{n}{2}}$.

Λύση: Όλες οι δυνατές ακμές που θα μπορούσαν να σχηματισθούν από έναν απλό γράφο με σύνολο κορυφών το $[n]$ είναι $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, αλλά κάθε ακμή μπορεί να επιλεγεί είτε ως υπάρχουσα ή ως ανύπαρκτη, δηλαδή, σύμφωνα με δυο επιλογές. Επομένως, το πλήθος των απλών γράφων με σύνολο κορυφών το $[n]$ είναι $2^{\binom{n}{2}}$.

- (3) Έστω G απλός γράφος με 9 κορυφές και τουλάχιστον 14 ακμές. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή του G με βαθμό τουλάχιστον 4.

Λύση: Έστω $d_1, d_2, \dots, d_9$ οι βαθμοί των κορυφών και e ο αριθμός των ακμών του G . Αφού

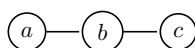
$$\sum_{i=1}^9 d_i = 2e \geq 28,$$

έπεται ότι κάποιο d_i θα πρέπει να είναι ≥ 4 , διότι αλλιώς αν όλα τα d_i ήταν το πολύ 3, τότε το άθροισμά τους θα ήταν το πολύ 27, που είναι άτοπο.

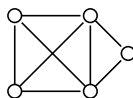
- (4) Δείξτε ότι αν ένας γράφος έχει ακριβώς δυο κορυφές περιττού βαθμού, τότε οι κορυφές αυτές συνδέονται με μια διαδρομή.

Λύση: Αν οι δυο κορυφές περιττού βαθμού δεν συνδέονται με καμιά διαδρομή, τότε θα ανήκουν σε δυο διαφορετικές συνδεδεμένες συνιστώσες του γράφου. Αλλά από το Θεώρημα της Χειραψίας, σε κάθε συνδεδεμένη συνιστώσα του γράφου, το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού πρέπει να είναι άρτιο. Επομένως, ο γράφος περιέχει 4 κορυφές περιττού βαθμού, που είναι αντίφαση.

- (5) (α) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γειτνίασης, για τον παρακάτω γράφο βρείτε το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από b ως c και το πλήθος των περιπάτων μήκους 3 από a ως b .



- (β) Βρείτε το πλήθος όλων των κυκλικών υπογράφων του παρακάτω γράφου:



Λύση:

(α) Ο πίνακας γειτνίασης είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, οπότε βρίσκουμε $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Επειδή το στοιχείο $(2,3)$ του A^2 είναι 0, δεν υπάρχει κανένας περίπατος μήκους 2 από b ως c . Επειδή το στοιχείο $(1,2)$ του A^3 είναι 2, υπάρχουν 2 περίπατοι μήκους 3 από a ως b .

(β) Υπάρχουν 5 τρίγωνα, 3 τετράπλευρα και 1 πεντάπλευρο.

- (6) Ονομάζεται αυτομορφισμός ένας ισομορφισμός ενός γράφου στον εαυτό του. (1) Αποδείξτε ότι το πλήθος των αυτομορφισμών του πλήρους γράφου n κορυφών είναι $n!$. (2) Επίσης αν S_n είναι ο γράφος “αστέρι” n κορυφών (δηλαδή, μια κορυφή του S_n έχει βαθμό $n-1$ κι όλες οι άλλες $n-1$ κορυφές έχουν βαθμό 1 η κάθε μια), αποδείξτε ότι το πλήθος των αυτομορφισμών του S_n είναι $(n-1)!$.

Λύση: (1) Προφανώς, το ζητούμενο πλήθος των αυτομορφισμών είναι ίσο προς το πλήθος των απεικονίσεων 1-1 και επί από το $[n]$ στο $[n]$, που είναι $n!$. (2) Τώρα, συμβολίζοντας με C το κέντρο του αστεριού S_n (δηλαδή, τη μοναδική

κορυφή του με βαθμό $n - 1$), προφανώς, για κάθε αυτομορφισμό f του $[n]$, πρέπει να έχουμε $f(C) = C$. Επειδή όμως δεν υπάρχει κανένας άλλος περιορισμός πάνω στις υπόλοιπες κορυφές, ο αυτομορφισμός f μπορεί να τις διατάσσει με κάθε δυνατό τρόπο. Επομένως, το πλήθος των διατάξεων των $n - 1$ κορυφών, που είναι $(n - 1)!$, θα είναι ίσο με το ζητούμενο πλήθος αυτομορφισμών του S_n .

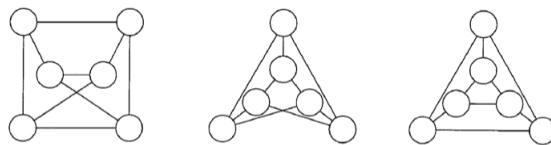
- (7) Ένας γράφος n κορυφών λέγεται *επισημασμένος (labeled)* αν το σύνολο των κορυφών του είναι το $[n]$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν περισσότεροι από 6600 μη ισομορφικοί επισημασμένοι γράφοι 8 κορυφών.

Λύση: Σύμφωνα με την Άσκηση 2, το πλήθος των απλών γράφων με σύνολο κορυφών το $[8]$ είναι $2^{\binom{8}{2}} = 2^{28} = 268435456$. Επιπλέον, το σύνολο των διατάξεων του $[8]$ είναι $8! = 40320$, που σημαίνει ότι κάθε επισημασμένος γράφος 8 κορυφών μπορεί να είναι ισομορφικός προς άλλους 40320, το πολύ, γράφους. Επομένως, η Αρχή του Περιστεριώνα συνεπάγεται ότι το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας των ισομορφικών γράφων είναι τουλάχιστον ίσο προς $268435456/40320 = 6657.625$.

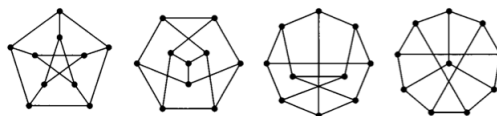
- (8) Έστω p ένας διαμερισμός του m σε n μέρη (τιμήματα). Λέμε ότι ο διαμερισμός p είναι *γραφικός*, αν υπάρχει ένας απλός γράφος G με n κορυφές και m ακμές, του οποίου η διατεταγμένη ακολουθία βαθμών είναι ο διαμερισμός p . Αποδείξτε ότι ο διαμερισμός $p = (4, 4, 3, 2, 1)$ δεν είναι γραφικός.

Λύση: Έστω ότι υπάρχει ένας γράφος G με ακολουθία βαθμών $(4, 4, 3, 2, 1)$. Προφανώς, αυτός ο γράφος θα έχει 5 κορυφές και $\frac{1}{2}(4 + 4 + 3 + 2 + 1) = \frac{1}{2}14 = 7$ ακμές. Αλλά οι 2 κορυφές του γράφου, που έχουν βαθμό 4 η κάθε μία, θα πρέπει να συνδέονται με όλες τις (υπόλοιπες) κορυφές. Συνεπώς, κάθε κορυφή θα πρέπει να έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2, πράγμα, άτοπο, αφού στην ακολουθία βαθμών περιέχεται ο βαθμός 1.

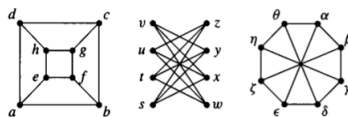
- (9) Βρείτε τα ζεύγη των ισομορφικών γράφων μεταξύ των παρακάτω:



- (10) Βρείτε τα ζεύγη των ισομορφικών γράφων με τον γράφο Petersen (ο πρώτος αριστερά):

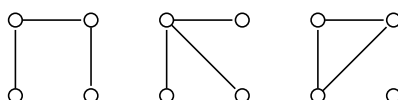


- (11) Βρείτε τα ζεύγη των ισομορφικών γράφων μεταξύ των παρακάτω:



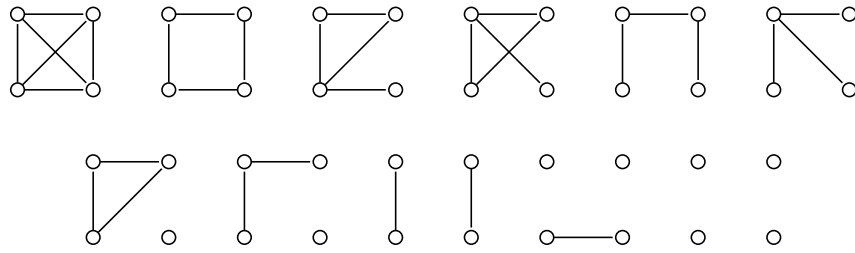
- (12) Έστω $N(n, m)$ το πλήθος των μη ισομορφικών (μεταξύ τους) γράφων n κορυφών και m ακμών. Υπολογίστε το $N(4, 3)$.

Λύση: Είναι οι εξής 3 γράφοι:



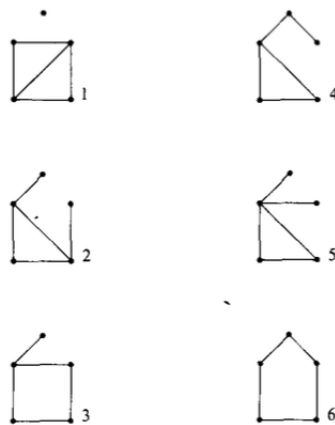
- (13) Υπολογίστε το πλήθος όλων των μη ισομορφικών (μεταξύ τους) γράφων 4 κορυφών.

Λύση: Είναι οι εξής 11 γράφοι:



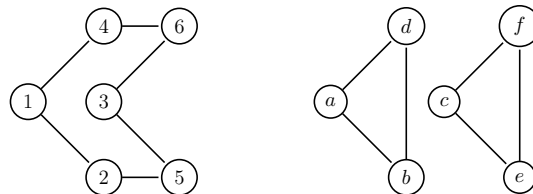
- (14) Βρείτε πόσοι είναι και σχεδιάστε όλους τους μη ισομορφικούς γράφους με 5 κορυφές και 5 ακμές.

Λύση:

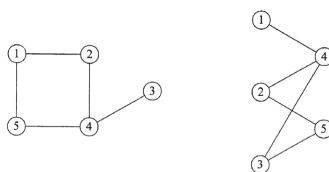


- (15) Βρείτε δυο γράφους του ίδιου πλήθους κορυφών και των ίδιων βαθμών κορυφών, οι οποίοι δεν είναι ισομορφικοί.

Λύση: Οι εξής 2 γράφοι, ο πρώτος με κορυφές $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και ο δεύτερος με κορυφές $\{a, b, c, d, e, f\}$:



- (16) Βρείτε τους πίνακες γειτνίασης A και B των δυο παρακάτω γράφων και τον πίνακα μετάθεσης P , που είναι τέτοιος ώστε $BP = PA$:



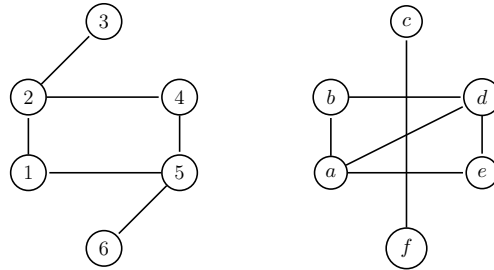
- (17) Δείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρξει κανένας απλός γράφος 12 κορυφών και 28 ακμών, των οποίων όλοι οι βαθμοί κορυφών παίρνουν τις τιμές 3 ή 4. Δείξτε το ίδιο για τις τιμές βαθμών κορυφών 3 ή 6.

Λύση: Επειδή σε έναν γράφο το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού είναι άρτιο, για βαθμούς 3 ή 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις για τα ζεύγη κορυφών με βαθμό 3 και με βαθμό 4: $(0, 12), (2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4), (10, 2), (12, 0)$, στα οποία αντιστοιχούν τα εξής πλήθη ακμών: $48/2 = 24, 46/2 = 23, 44/2 = 22, 42/2 = 21, 40/2 = 20, 38/2 = 19, 36/2 = 18$, αλλά

σε καμιά περίπτωση δεν σχηματίζονται οι 28 ακμές που έχει ο γράφος. Παρόμοια, για βαθμούς 3 ή 6, αντιστοιχούν τα εξής πλήθη ακμών: $72/2 = 36, 66/2 = 33, 60/2 = 30, 54/2 = 27, 48/2 = 24, 42/2 = 21, 36/2 = 18$, αλλά και πάλι σε καμιά περίπτωση δεν σχηματίζονται οι 28 ακμές που έχει ο γράφος.

- (18) Βρείτε δυο μη ισομορφικούς γράφους 6 κορυφών και ακολουθίας βαθμών κορυφών $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$.

Λύση: Οι εξής 2 γράφοι, ο πρώτος με κορυφές $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και ο δεύτερος με κορυφές $\{a, b, c, d, e, f\}$:



- (19) Έστω G απλός γράφος με 9 κορυφές και τουλάχιστον 14 ακμές. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή του G με βαθμό τουλάχιστον 4.

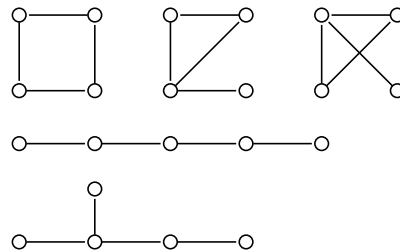
Λύση: Έστω $d_1, d_2, \dots, d_9$ οι βαθμοί των κορυφών και e ο αριθμός των ακμών του G . Αφού

$$\sum_{i=1}^9 d_i = 2e \geq 28,$$

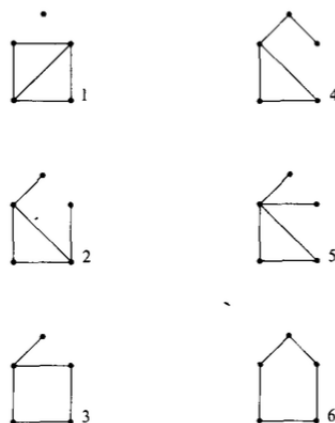
έπεται ότι κάποιο d_i θα πρέπει να είναι ≥ 4 , διότι αλλιώς αν όλα τα d_i ήταν το πολύ 3, τότε το άθροισμά τους θα ήταν το πολύ 27, που είναι άτοπο.

- (20) Βρείτε πόσοι μη ισομορφικοί συνδεδεμένοι γράφοι υπάρχουν με (1) 4 ακμές και (2) με 5 ακμές και σχεδιάστε τους.

Λύση: (1) Είναι οι εξής 5 γράφοι:

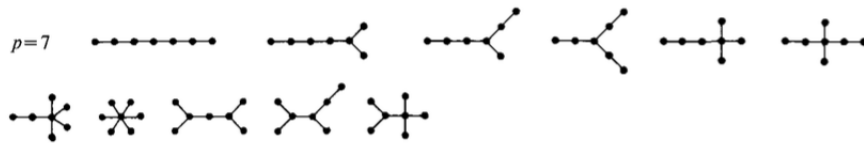


(2) Είναι οι εξής 6 γράφοι:

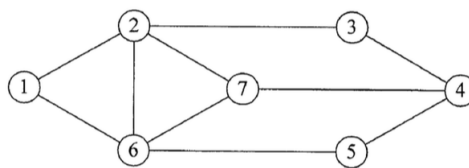


(21) Βρείτε πόσα είναι και σχεδιάστε όλα τα μη ισομορφικά δένδρα με 7 κορυφές.

Λύση:

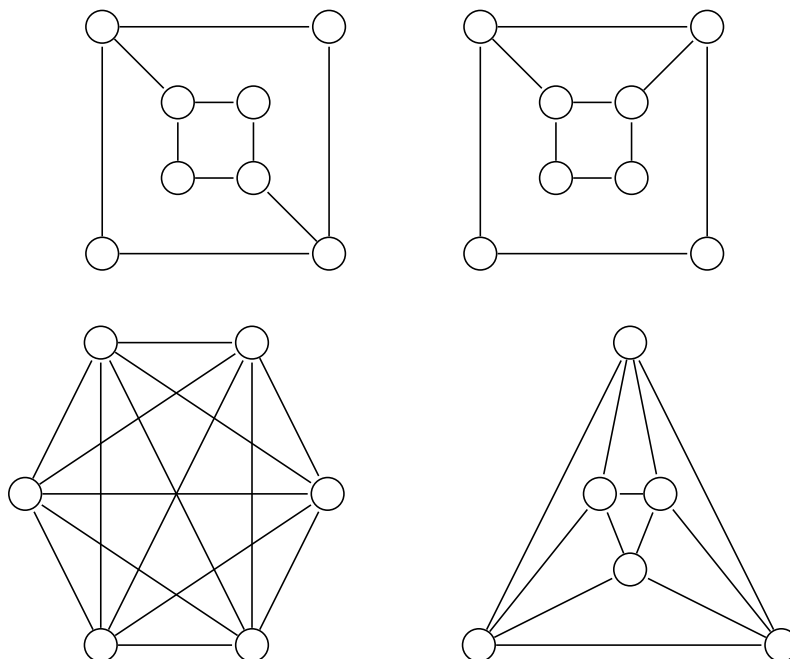


(22) Ένα υποσύνολο S κορυφών ενός γράφου λέγεται *κυρίαρχο σύνολο* αν κάθε άλλη κορυφή του γράφου (εκτός των κορυφών του S) είναι γειτονική με (τουλάχιστον) μια κορυφή του S . Ένα κυρίαρχο σύνολο λέγεται *ελάχιστο κυρίαρχο σύνολο* αν έχει το μικρότερο πλήθος κορυφών από όλα τα κυρίαρχα σύνολα του γράφου. Βρείτε τα ελάχιστα κυρίαρχα σύνολα του παρακάτω γράφου:



Λύση: $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{6, 4\}$, $\{6, 3\}$.

(23) Εξετάστε αν τα 2 παρακάτω ζεύγη γράφων είναι ισομορφικά:

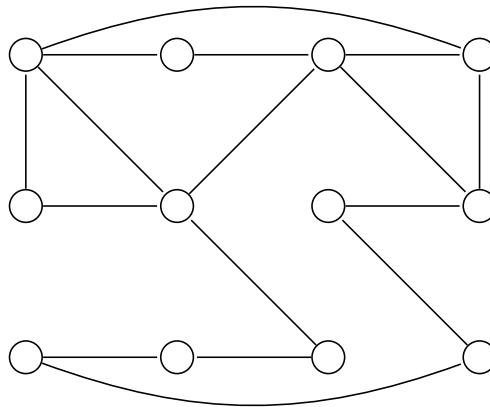


Λύση: Τα δυο πρώτα είναι, τα δυο επόμενα δεν είναι.

(24) Ένα δένδρο λέγεται *δυαδικό* αν έχει μοναδική κορυφή βαθμού 2 (η ρίζα του δένδρου), ενώ κάθε άλλη κορυφή, που δεν είναι φύλλο, έχει βαθμό 3. Δείξτε ότι σε ένα δυαδικό δένδρο n κορυφών το πλήθος των φύλλων είναι $\frac{1}{2}(n+1)$.

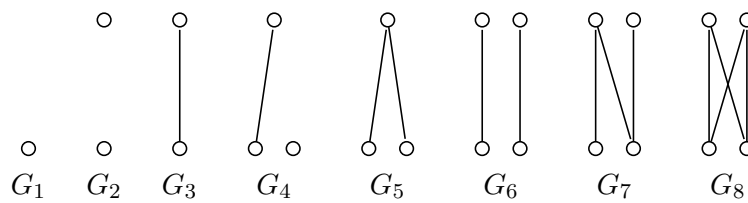
Λύση: Έστω k το πλήθος των φύλλων του δένδρου αυτού. Τότε το άθροισμα των βαθμών των n κορυφών είναι $k + 2 + 3(n - k - 1) = 3n - 2k - 1$. Αλλά, από το Θεώρημα της Χειραψίας, το άθροισμα των βαθμών του δένδρου αυτού είναι $2(n - 1)$, καθώς $n - 1$ είναι το πλήθος των ακμών του. Επομένως, βρίσκουμε $k = \frac{1}{2}(n + 1)$.

- (25) Εξετάστε αν ο παρακάτω γράφος είναι Euler ή Hamilton και αν είναι βρείτε τον γύρο Euler ή τον κύκλο Hamilton:



- (26) Βρείτε όλους τους διμερείς γράφους που έχουν και τους συμπληρωματικούς τους γράφους επίσης διμερείς.

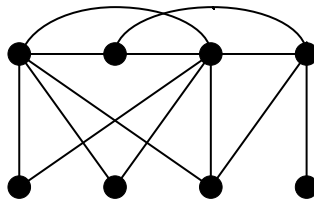
Λύση: Είναι οι εξής 8 γράφοι:



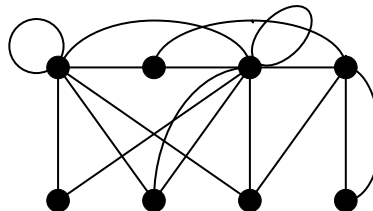
Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

Ορισμοί – Βασικές Έννοιες – Βαθμοί Κορυφών

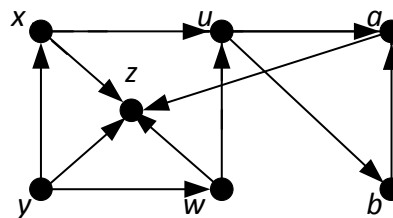
- 1) Στο παρακάτω γράφημα βρείτε:
 - i) Το $\delta(G)$
 - ii) Το $\Delta(G)$
 - iii) Την ακολουθία των βαθμών κορυφών του γραφήματος
 - iv) Τον μέσο βαθμό των κορυφών



- 2) Στο γράφημα του ερωτήματος 1 επιβεβαιώστε την ισχύ του Λήμματος της Χειραψίας.
- 3) Επαναλάβετε τα ερωτήματα 1 και 2 για το παρακάτω γράφημα.



- 4) Υπολογίστε τους έσω και έξω-βαθμούς των κορυφών του παρακάτω κατευθυντικού γραφήματος. Στην συνέχεια επιβεβαιώστε την ισχύ του Λήμματος της Χειραψίας για κατευθυντικά γραφήματα.



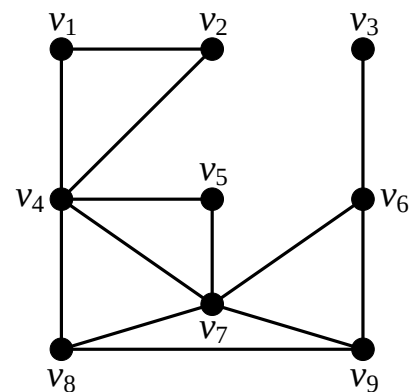
- 5) Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γραφικές. Αν είναι σχεδιάστε το αντίστοιχο απλό γράφημα. Αν όχι, αποδείξτε το.
 - i) (5,5,4,3,2,2,2,1)
 - ii) (5,5,4,4,2,2,1,1)

iii) (5,5,5,3,2,2,1,1)

iv) (5,5,5,4,2,1,1,1)

6) Για το γράφημα G του σχήματος να βρείτε:

- Ένα συνεκτικό υπογράφημα με 6 κορυφές που δεν έχει κύκλους.
- Το επαγόμενο υπογράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.



7) Υπάρχουν απλά γραφήματα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά;

- Γράφημα 6 κορυφών, εκ των οποίων 3 έχουν βαθμό 3 και 3 έχουν βαθμό 4.
- Γράφημα 7 κορυφών, εκ των οποίων 1 έχει βαθμό 1, 3 έχουν βαθμό 3, 1 έχει βαθμό 4, και 2 έχουν βαθμό 6.

8) Για το γράφημα G του ερωτήματος 6, βρείτε τα γραφήματα (i) $G - v_4v_5$, (ii) $G - v_7$, (iii) $G \cdot v_8v_7$.

9) Σε μια τάξη 9 φοιτητών, κάθε φοιτητής συμπαθεί 3 άλλους. Πείτε αν είναι δυνατόν κάθε φοιτητής να συμπαθιέται από τους 3 φοιτητές τους οποίους συμπαθεί.

Υπόδειξη: Σκεφτείτε ένα κατάλληλο γράφημα το οποίο αν ήταν εφικτό να υπάρχει θα μοντελοποιούσε την παραπάνω κατάσταση.

10) Δείξτε ότι ένα απλό γράφημα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές ίδιου βαθμού. Ισχύει το ίδιο σε γράφημα με παράλληλες ακμές αλλά όχι ανακυκλώσεις;

11) Δίνεται ένα γράφημα G το οποίο έχει προέλθει από την αφαίρεση μιας κορυφής από ένα κανονικό γράφημα H με τουλάχιστον 3 κορυφές και με παράλληλες ακμές (ίσως) αλλά όχι ανακυκλώσεις. Πώς θα μπορούσατε να ανακατασκευάσετε το H από το G ;

12) Ο υπερκύβος Q_n διάστασης n είναι ένα γράφημα που κάθε κορυφή του έχει μία ετικέτα n δυαδικών ψηφίων και το οποίο κατασκευάζεται αναδρομικά ως εξής:

- i) Για $n=0$ είναι μία κορυφή και η ετικέτα του είναι κενή.
- ii) Για $n>1$ ο υπερκύβος Q_n διάστασης n κατασκευάζεται από δύο αντίγραφα του κύβου Q_{n-1} διάστασης $n-1$ με τον εξής τρόπο: ενώνουμε τις κορυφές με ίδια ετικέτα από κάθε αντίγραφο και δίνουμε σε κάθε κορυφή του κύβου διάστασης n μία ετικέτα που προκύπτει από την ετικέτα $n-1$ ψηφίων που είχε με ένα επιπλέον «0» στην αρχή αν ανήκε στο πρώτο αντίγραφο Q_{n-1} και «1» αν ανήκε στο δεύτερο αντίγραφο.

α) Σχεδιάστε τους υπερκύβους Q_n για $0 \leq n \leq 4$.

β) Υπολογίστε το πλήθος των κορυφών του υπερκύβου Q_n .

γ) Δείξτε ότι το Q_n είναι κανονικό γράφημα και υπολογίστε τον βαθμό κάθε κορυφής

δ) Υπολογίστε το πλήθος των ακμών του Q_n .

ε) Δείξτε ότι η ετικέτα κάθε κορυφής διαφέρει σε ένα μόνο ψηφίο από την ετικέτα κάθε γειτονικής κορυφής.

13) Θεωρούμε απλό μη κατευθυντικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές, και για κάθε κορυφή u , συμβολίζουμε με $d(u)$ τον βαθμό της u στο G , και με G_u το γράφημα που προκύπτει από το G αν αφαιρέσουμε την u και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή.

- i) Να δείξετε ότι αν το G δεν περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3), τότε υπάρχουν κορυφές u, v με $\deg(u) + \deg(v) \leq n$.
- ii) Να δείξετε ότι αν το G έχει περισσότερες από $n^2 / 4$ ακμές και δεν περιέχει τρίγωνο, τότε υπάρχει κορυφή u τέτοια ώστε το G_u να περιέχει περισσότερες από $(n-1)^2 / 4$ ακμές.

Υπόδειξη: Ισχύει ότι για κάθε φυσικό m , αν $m > n^2 / 4$, τότε και $m - n/2 > (n-1)^2 / 4$. Μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε, αφού βέβαια πρώτα το αποδείξετε! Ξεχωρίστε περιπτώσεις όπου το n είναι άρτιο ή περιττό.

iii) Χρησιμοποιώντας το (ii) και μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυντικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και περισσότερες από $n^2 / 4$ ακμές περιέχει τρίγωνο.

14) Σε ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα G 10 κορυφών βάζουμε αυθαίρετη κατεύθυνση στις ακμές του (στην ορολογία της θεωρίας γραφημάτων αυτό λέγεται *προσανατολισμός του G*), έτσι ώστε να

προκύψει ένα κατευθυντικό γράφημα G' . Δείξτε ότι δεν μπορούν όλοι οι έξω-βαθμοί των κορυφών του G' να είναι διαφορετικοί.

- 15) Ένα πρωτάθλημα (tournament) n κορυφών είναι ένα κατευθυντικό γράφημα n κορυφών με ακριβώς μία (κατευθυντική) ακμή μεταξύ κάθε ζευγαριού κορυφών. (Ο όρος οφείλεται στο ότι μοντελοποιεί τα αποτελέσματα ενός πρωταθλήματος στο οποίο συμμετέχουν οι n ομάδες, κάθε ομάδα παίζει έναν αγώνα με κάθε άλλη και η φορά της ακμής δείχνει την νικήτρια ομάδα, π.χ. η ομάδα από όπου ξεκινά η ακμή νίκησε την ομάδα όπου καταλήγει.) Δείξτε ότι υπάρχει ένα πρωτάθλημα n κορυφών όπου ο έσω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον έξω βαθμό της αν-ν το n είναι περιττό.
- 16) Δείξτε ότι είναι δυνατόν ένα πρωτάθλημα να μην έχει καθαρό νικητή, δηλαδή να υπάρχουν περισσότερες της μίας κορυφής με μέγιστο έξω-βαθμό. (Σχεδιάστε ένα πρωτάθλημα 5 κορυφών με αυτή την ιδιότητα, σαν αντιπαράδειγμα.)
- 17) Δείξτε ότι ένα πρωτάθλημα αν και μπορεί να μην έχει πάντα νικητή (προηγούμενη άσκηση) έχει πάντα έναν «Βασιλιά», δηλαδή μια κορυφή x που για κάθε άλλη y είτε νίκησε η x την y είτε νίκησε η x μια κορυφή z που νίκησε την y . Δηλαδή σε όρους γραφημάτων υπάρχει πάντα μια κορυφή x που για κάθε άλλη y είτε υπάρχει η ακμή $x \rightarrow y$ είτε υπάρχει μια κορυφή z έτσι ώστε να υπάρχουν οι ακμές $x \rightarrow z$ και $z \rightarrow y$.