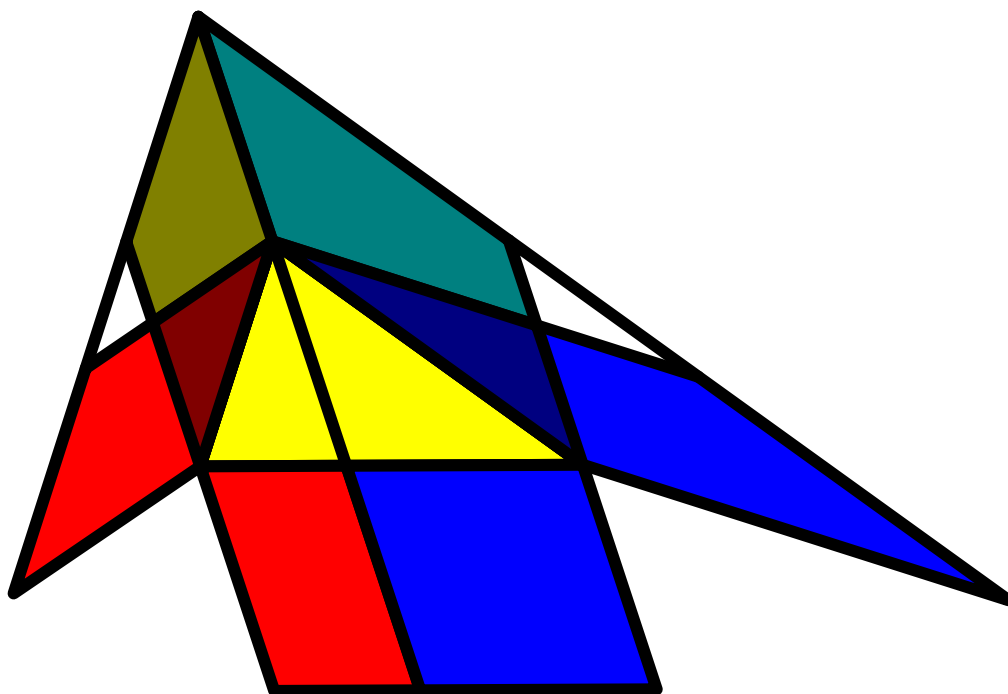


Παμφίλου



Ἐλασσον Γεωμετρικόν

19 Ιουλίου 2011

Κεφάλαιο 7

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

7.1 Αξιώματα για τον χώρο

Γιά την μελέτη σχημάτων του χώρου χρειαζόμαστε την αόριστη έννοια του **Επιπέδου** και μερικά συμπληρωματικά αξιώματα αυτών που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Αξιώματα που περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες των επιπέδων αλλά και των ευθειών του χώρου.

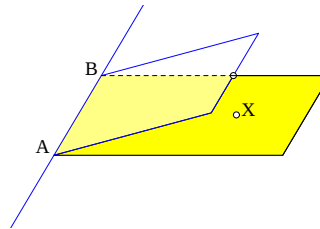
Αξίωμα 7.1.1 Τρία σημεία μη κείμενα επ' ευθείας ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο. Κάθε επίπεδο ϵ περιέχει άπειρα σημεία και υπάρχουν επίσης άπειρα σημεία μη περιεχόμενα στο επίπεδο ϵ .

Αξίωμα 7.1.2 Αν μία ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με ένα επίπεδο ϵ τότε περιέχεται στο επίπεδο ϵ .

Αξίωμα 7.1.3 Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο τότε έχουν και ολόκληρη ευθεία κοινή.

Αξίωμα 7.1.4 Κάθε επίπεδο ϵ χωρίζει τον χώρο σε δύο μέρη που δεν έχουν κοινά σημεία και ονομάζονται **Ημίχωροι**. Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του σε διαφορετικούς ημίχωρους τέμνει το επίπεδο σε ένα ακριβώς σημείο. Ένα ευθύγραμμο τμήμα, που έχει και τα δύο άκρα του στον ίδιο ημίχωρο, δεν τέμνει το επίπεδο.

Τα επίπεδα παίζουν στο χώρο τον ρόλο που παίζουν οι ευθείες στο επίπεδο. Στην επιπεδομετρία απομονώνουμε ένα από τα επίπεδα του χώρου και εξετάζουμε τα σχήματα που ορίζονται μέσα σε αυτό το επίπεδο. Στην **Στερεομετρία** εξετάζουμε σχήματα, όπως λ.χ. τον κύβο, που εκτείνονται στον χώρο και δεν περιορίζονται σε κάποιο επίπεδο.

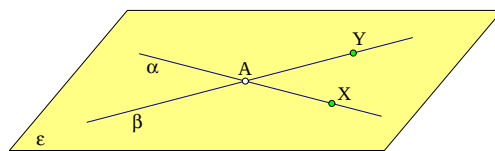


Σχήμα 575: Τεμνόμενα επίπεδα

Πρόταση 7.1.1 Αν δύο διαφορετικά επίπεδα τέμνονται τότε η τομή τους συμπίπτει με μία ευθεία.

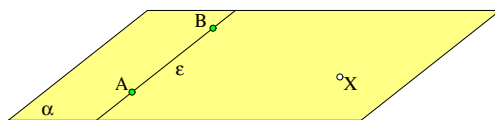
Απόδειξη: Κατά το τελευταίο αξίωμα η τομή τους θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μία ευθεία AB. Δεν μπορεί όμως να περιλαμβάνει σημεία εκτός της AB. Τούτο διότι δύο σημεία της ευθείας λ.χ. τα A, B και ένα σημείο X εκτός αυτής ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο. Άρα αν το X ανήκε και στα δύο επίπεδα τότε αυτά, κατά το πρώτο αξίωμα, θα έπρεπε να ταυτίζονται, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.1.2 Δύο διαφορετικές τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα και μοναδικό επίπεδο που τις περιέχει.



Σχήμα 576: Επίπεδο δύο τεμνομένων ευθειών

Απόδειξη: Θεώρησε το σημείο τομής A δύο ευθειών α και β . Πάρε επίσης δύο σημεία X και Y , το πρώτο στην α και το δεύτερο στην β . Κατά το πρώτο αξίωμα ορίζεται ένα ακριβώς επίπεδο ε που περιέχει τα τρία σημεία A , X και Y . Κατά το δεύτερο αξίωμα το επίπεδο θα περιέχει και τις δύο ευθείες, ο.ε.δ.



Σχήμα 577: Επίπεδο ευθείας και σημείου

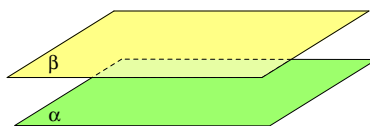
Πρόταση 7.1.3 Μία ευθεία ε και σημείο X εκτός αυτής ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο που τα περιέχει

Απόδειξη: Θεώρησε δύο σημεία A και B της ε . Το επίπεδο α που περιέχει τα τρία σημεία A, B και X περιέχει και όλη την ευθεία ε (Αξίωμα 7.1.2). Κάθε επίπεδο που περιέχει την ε και το X θα περιέχει και τα A, B και X , άρα θα ταυτίζεται με το α (Αξίωμα 7.1.1), ο.ε.δ.

Πρόταση 7.1.4 Αν δύο ευθείες ε και ζ περιέχονται σε επίπεδο, τότε το επίπεδο αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Η ίδια με την προηγούμενη, παίρνοντας δύο σημεία A, B στην ε και ένα X στην ζ κτλ. ο.ε.δ.

Παράλληλα επίπεδα ονομάζονται δύο επίπεδα που δεν τέμνονται. Μία ευθεία λέγεται **Παράλληλη** προς το επίπεδο όταν δεν το τέμνει. Ένα επίπεδο λέγεται **παράλληλο**

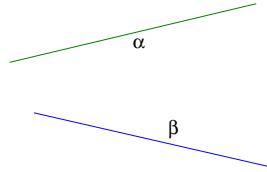


Σχήμα 578: Παράλληλα επίπεδα

προς ευθεία όταν δεν την τέμνει. Δύο ευθείες λέγονται **Παράλληλες** (στον χώρο) όταν (1) περιέχονται σε ένα επίπεδο α και (2) είναι παράλληλες ευθείες αυτού του επιπέδου. **Ασύμβατες ευθείες** λέγονται δύο ευθείες α και β που δεν τέμνονται και δεν είναι και παράλληλες (δεν περιέχονται σε ένα επίπεδο).

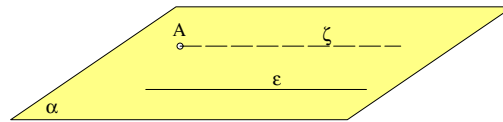
Ξεκαθαρίζω πρώτα ένα λεπτό σημείο με δύο ευθείες παράλληλες στο χώρο, διότι ο ορισμός των παραλλήλων του χώρου και του επιπέδου έχουν μία μικρή διαφορά. Ενώ στο

επίπεδο δύο παράλληλες ορίζονται ως δύο μη-τεμνόμενες ευθείες, στον χώρο αυτή η ιδιότητα δεν αρκεί, όπως φαίνεται με δύο ασύμβατες ευθείες, οι οποίες να μην τέμνονται, δεν είναι όμως και παράλληλες. Οι παράλληλες στον χώρο περιέχονται εξ υποθέσεως στο ίδιο επίπεδο και ο ορισμός τους ως παραλλήλων του χώρου ανάγεται στον ορισμό ως παραλλήλων του επιπέδου που τις περιέχει.



Σχήμα 579: Ασύμβατες ευθείες

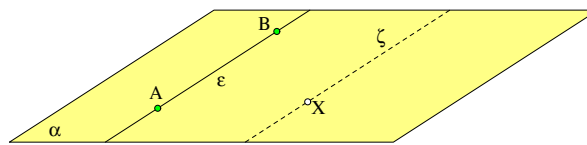
Πρόταση 7.1.5 Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία και μόνον ευθεία ζ παράλληλος της ε .



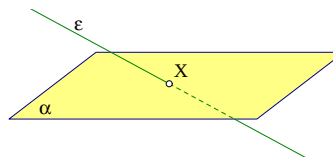
Σχήμα 580: Μοναδικότητα παραλλήλου στον χώρο

Απόδειξη: Στο επίπεδο α που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A θεωρήσε την μοναδική παράλληλο ζ προς την ε (Αξίωμα παραλληλίας 1.15.1). Κάθε άλλο επίπεδο που περιέχει την ε και το A θα ταυτίζεται με το α , συνεπώς η παράλληλος από το A προς την ε θα είναι μοναδική, ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.1.1 Γιά κάθε σημείο X εκτός ευθείας ε το επίπεδο που περιέχει το X και την ε περιέχει και την παράλληλο ζ της ε από το X .



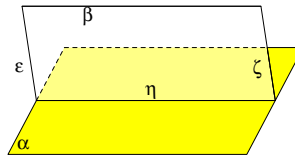
Σχήμα 581: Επίπεδο δύο παραλλήλων ευθειών



Σχήμα 582: Ευθεία τέμνουσα επίπεδο

Πρόταση 7.1.6 Αν ευθεία ε δεν είναι παράλληλη προς το επίπεδο α και δεν περιέχεται σε αυτό τότε το τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο.

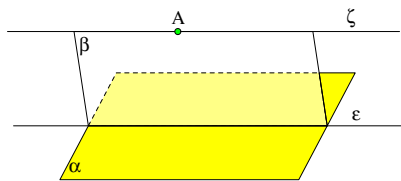
Απόδειξη: Προφανώς πρέπει η ε να τέμνει το α . Διαφορετικά θα ήταν παράλληλη προς αυτό. Επίσης αν το έτεμνε σε περισσότερα από ένα σημεία τότε, κατά το δεύτερο αξίωμα θα περιήχετο στο α , αντίθετα με την υπόθεση. Άρα η ε τέμνει το α σε ένα ακριβώς σημείο, ο.ε.δ.



Σχήμα 583: Ευθείες παράλληλες τέμνουσες επίπεδο

Πρόταση 7.1.7 Αν ευθεία ε τέμνει επίπεδο α σε ένα σημείο τότε και κάθε παράλληλος ζ προς αυτήν θα τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.

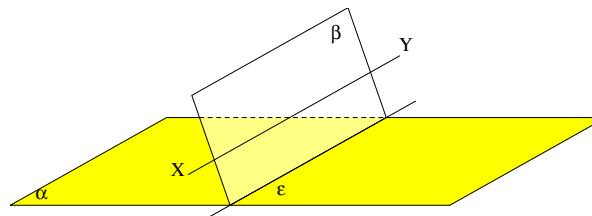
Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο β που περιέχει τις παράλληλες ε και ζ . Αυτό θα τέμνει το επίπεδο α κατά ευθεία η . Στο επίπεδο β οι ε και ζ είναι παράλληλες και η ε τέμνει την η . Άρα και η ζ θα τέμνει την η σε ένα σημείο (Πόρισμα 1.15.1) που είναι και σημείο του α , ο.ε.δ.



Σχήμα 584: Κατασκευή παραλλήλου ευθείας προς επίπεδο

Κατασκευή 7.1.1 Από σημείο A εκτός επιπέδου α φέρε παράλληλο ευθεία ζ προς το επίπεδο α .

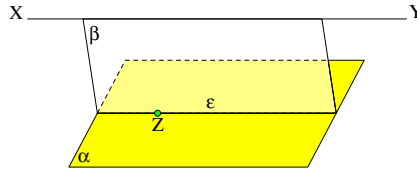
Κατασκευή: Θεώρησε τυχούσα ευθεία ε του επιπέδου α και όρισε το επίπεδο β που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο A . Στο επίπεδο αυτό φέρε την παράλληλο ζ της ε από το A . Η ζ δεν μπορεί να τέμνει το α , διότι αν το έτεμνε, τότε το κοινό σημείο Σ της ζ με το α θα ήταν και σημείο της ε που είναι άτοπο, ο.ε.κ.



Σχήμα 585: Επίπεδο διά ευθείας τέμνον παράλληλο επίπεδο

Πρόταση 7.1.8 Αν επίπεδο β διέρχεται από ευθεία XY και τέμνει επίπεδο α προς το οποίο η XY είναι παράλληλος, τότε η τομή ε των α και β είναι ευθεία παράλληλος της XY .

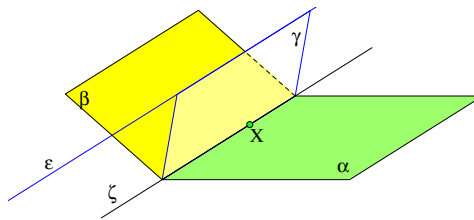
Απόδειξη: Αν η ε δεν ήταν παράλληλος αλλά έτεμνε την XY σε σημείο Σ , τότε το Σ θα ήταν και στην XY και στο α , άρα η XY δεν θα ήταν παράλληλος προς το α , αντίθετα με την υπόθεση. Το άτοπο αυτό δείχνει ότι η ε είναι παράλληλος της XY , ο.ε.δ.



Σχήμα 586: Ευθεία παράλληλη προς επίπεδο

Πρόταση 7.1.9 Μία ευθεία XY είναι παράλληλος προς επίπεδο α τότε και μόνον, όταν το α περιέχει ευθεία ε παράλληλο της XY .

Απόδειξη: Αν η XY είναι παράλληλος προς το επίπεδο α , θεωρήσε σημείο Z του α και το επίπεδο β που περιέχει την XY και το Z . Κατά την προηγούμενη πρόταση το β θα τέμνει το α κατά ευθεία παράλληλο της XY . Αντίστροφα, έστω ότι η XY είναι παράλληλος προς ευθεία ε του επιπέδου α και έστω ότι η XY τέμνει το επίπεδο α σε σημείο Σ . Κατά τον ορισμό οι ευθείες XY και ε περιέχονται σε επίπεδο β και η ε συμπίπτει με την τομή των α και β . Επίσης το Σ θα περιέχεται στην τομή των α και β , άρα θα είναι σημείο της ε . Τούτο όμως είναι άτοπο, διότι η ε υπετέθει παράλληλος της XY . Άρα η XY δεν μπορεί να τέμνει το α , ο.ε.δ.



Σχήμα 587: Τομή επιπέδων παραλλήλων προς ευθεία

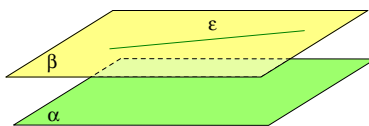
Πρόταση 7.1.10 Δύο τεμνόμενα επίπεδα παράλληλα προς ευθεία ε τέμνονται κατά ευθεία ζ παράλληλο της ε .

Απόδειξη: Έστω ότι τα επίπεδα α και β είναι παράλληλα προς την ευθεία ε και τέμνονται κατά ευθεία ζ . Έστω X σημείο της ζ . Κατά την Πρόταση 7.1.8 το επίπεδο γ που ορίζεται από την ε και το X θα τέμνει το α και το β κατά ευθείες παράλληλες της ε και διερχόμενες από το X . Αυτό συνεπάγεται ότι οι δύο αυτές ευθείες θα συμπίπτουν και θα συμπίπτουν επίσης με την τομή των α και β , ο.ε.δ.

Άσκηση 7.1.1 Έστω ότι τα επίπεδα α και β διέρχονται από την ευθεία ε που είναι παράλληλη προς επίπεδο ζ . Έστω επίσης ότι τα α και β τέμνουν το επίπεδο ζ . Δείξε οι τομές τους είναι δύο παράλληλες ευθείες του ζ .

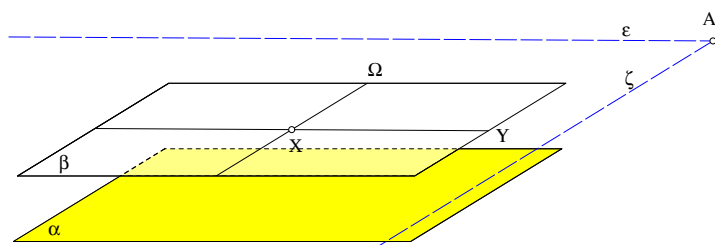
7.2 Παράλληλα επίπεδα

Πρόταση 7.2.1 Αν δύο επίπεδα α και β είναι παράλληλα τότε κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη προς το άλλο επίπεδο.



Σχήμα 588: Ευθεία παράλληλη σε επίπεδο

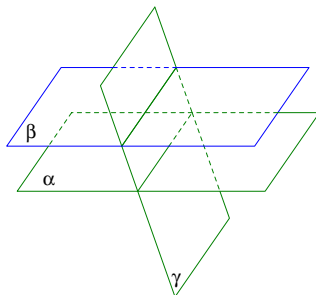
Απόδειξη: Αν η ευθεία ϵ του α έτεμνε το β σε σημείο X , τότε τα α και β θα είχαν το X κοινό σημείο, αντίθετα με την υπόθεση. Άρα η ϵ δεν μπορεί να τέμνει το β , ο.ε.δ.



Σχήμα 589: Επίπεδο δύο παραλλήλων προς επίπεδο

Πρόταση 7.2.2 Το επίπεδο β δύο τεμνομένων ευθειών που είναι παράλληλες προς επίπεδο α είναι παράλληλο του α .

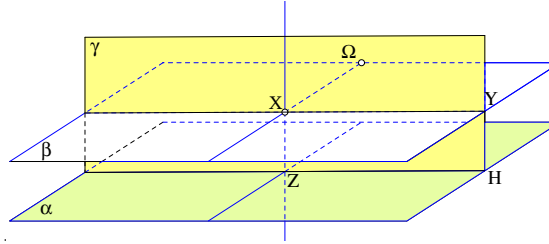
Απόδειξη: Έστω ότι το επίπεδο β των τεμνομένων ευθειών XY και $X\Omega$ τέμνει το επίπεδο α κατά ευθεία η . Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Προς τούτο θεωρήσε σημείο A εκτός των δύο επιπέδων και φέρε από το A την παράλληλη ϵ προς την XY και την παράλληλη ζ προς την $X\Omega$. Επειδή η ϵ είναι παράλληλη προς την XY δεν τέμνει ούτε το β ούτε το α («Πρόταση 7.1.7»), (Πρόταση 7.1.9». Άρα, κατά την Πρόταση 7.1.10 η τομή η των α και β θα είναι παράλληλη προς την ϵ . Ανάλογα και για την ζ δείχνουμε ότι θα είναι παράλληλη προς την η . Από το A λοιπόν θα έχουμε δύο παράλληλες προς την ζ , που είναι άτοπο και δείχνει ότι τα α και β δεν τέμνονται, ο.ε.δ.



Σχήμα 590: Επίπεδο τέμνον παράλληλα επίπεδα

Πρόταση 7.2.3 Επίπεδο γ που τέμνει δύο παράλληλα επίπεδα α και β , τα τέμνει κατά ευθείες παράλληλες.

Απόδειξη: Οι δύο ευθείες -τομές του γ με το α και β δεν μπορεί να τέμνονται, διότι τότε θα ετέμνοντο και τα επίπεδα. Επίσης περιέχονται στο επίπεδο γ , άρα, κατά τον ορισμό είναι παράλληλες, ο.ε.δ.



Σχήμα 591: Επίπεδο από σημείο παράλληλο προς άλλο

Πρόταση 7.2.4 Από σημείο X εκτός επιπέδου α άγεται ένα και μόνον επίπεδο β παράλληλο προς το α .

Απόδειξη: Από την Πρόταση 7.2.2 συνάγεται ότι υπάρχει ένα επίπεδο β διά του X παράλληλο προς το α . Το επίπεδο αυτό είναι μοναδικό. Πράγματι, αν υπήρχε και δεύτερο επίπεδο β' διά του X τότε τα β και β' θα ετέμνοντο κατά ευθεία η διερχόμενη διά του X , την οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε διαφορετική της XY . Πάρε τότε σημείο Z στο α και θεωρήσε το επίπεδο γ που περιέχει τα X , Y και Z . Αυτό τέμνει το επίπεδο β κατά την XY , το β' κατά μία ευθεία XY' (δεν σχεδιάζεται στο σχήμα) και το α κατά ευθεία ZH . Λόγω της παραλληλίας των επιπέδων οι ευθείες XY και XY' θα είναι δύο διαφορετικές παράλληλες από το σημείο X προς την ευθεία ZH του επιπέδου γ (Πρόταση 7.2.3). Αυτό είναι άτοπο και δείχνει την μοναδικότητα του παραλλήλου προς το α επιπέδου β από το X , ο.ε.δ.

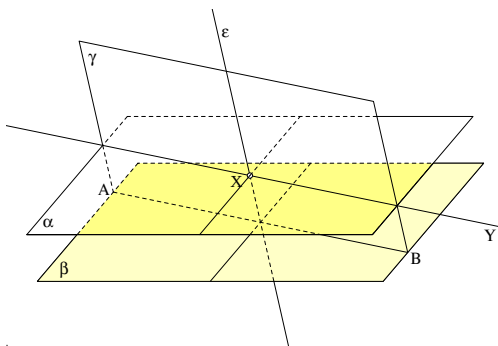
Πόρισμα 7.2.1 Επίπεδο γ που τέμνει επίπεδο β θα τέμνει και κάθε επίπεδο α παράλληλο του β .

Απόδειξη: Έστω ότι το επίπεδο γ τέμνει το β αλλά όχι το παράλληλο αυτού α . Τότε από ένα σημείο X της τομής των β και γ άγονται δύο διαφορετικά επίπεδα παράλληλα του α : το β και το γ , πράγμα άτοπο κατά την Πρόταση 7.2.4. Άρα αν το γ τέμνει το β θα πρέπει να τέμνει και το α , ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.2.2 Γιά κάθε ευθεία ϵ παράλληλο του επιπέδου β υπάρχει ένα ακριβώς επίπεδο α που περιέχει την ϵ και είναι παράλληλο του β .

Απόδειξη: Απο σημείο X της ϵ φέρε μία παράλληλο ζ προς το β διαφορετική της ϵ . Κατά την Πρόταση 7.2.2 το επίπεδο α των ϵ και ζ είναι παράλληλο προς το β . Κατά την Πρόταση 7.2.4 το α είναι μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.2.5 Εάν ευθεία ϵ τέμνει επίπεδο α τότε θα τέμνει και κάθε επίπεδο β παράλληλο του α .

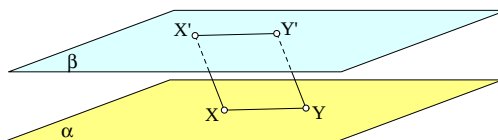


Σχήμα 592: Ευθεία τέμνουσα παράλληλα επίπεδα

Απόδειξη: Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο α στο σημείο X αλλά δεν τέμνει το παράλληλό του β . Φέρε τυχόν επίπεδο γ περιέχον την ε και τέμνον το α κατά την ευθεία XY . Επειδή τα επίπεδα α, β είναι παράλληλα και το γ τέμνει το α θα τέμνει και το β (Πόρισμα 7.2.1) και μάλιστα κατά παράλληλες ευθείες XY και AB (Πρόταση 7.2.3). Συνάγεται ότι στο επίπεδο γ έχουμε από το σημείο X δύο παράλληλες προς την AB : την XY και την ε , για την οποία υποθέσαμε ότι δεν τέμνει το β , άρα και την AB . Το άτοπο αυτό δείχνει ότι αν η ε τέμνει το α τότε πρέπει να τέμνει και το β , ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.2.3 Εάν ευθεία ε είναι παράλληλη προς επίπεδο α τότε θα είναι και παράλληλη προς κάθε επίπεδο β παράλληλο του α .

Πόρισμα 7.2.4 Από σημείο X εκτός επιπέδου β άγονται άπειρες ευθείες παράλληλες προς το επίπεδο β . Όλες αυτές οι ευθείες περιέχονται στο μοναδικό επίπεδο α που διέρχεται από το X και είναι παράλληλο του β .



Σχήμα 593: Παράλληλες μεταξύ παραλλήλων

Πρόταση 7.2.6 Παράλληλα επίπεδα αποτέμνουν επί παραλλήλων ευθειών ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

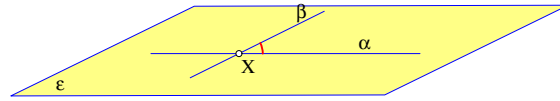
Απόδειξη: Έστω ότι τα παράλληλα επίπεδα α και β αποτέμνουν επί παραλλήλων ευθειών τα τμήματα XX' και YY' . Τότε το $XX'Y'Y$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα τα XX' και YY' είναι ίσα, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.2.7 Αν το επίπεδο β είναι παράλληλο του α και το επίπεδο γ είναι παράλληλο του β , τότε το επίπεδο γ είναι και παράλληλο του α .

Απόδειξη: Αν τα α και γ δεν ήταν παράλληλα τότε από την τομή τους, που είναι ευθεία ε μη τέμνουσα το β , άρα παράλληλη προς αυτό, θα είχαμε δύο διαφορετικά επίπεδα παράλληλα προς το β , που είναι άτοπο (Πόρισμα 7.2.2). Συνεπώς τα α και γ πρέπει να είναι παράλληλα, ο.ε.δ.

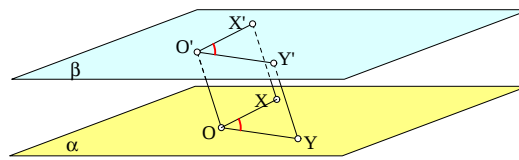
7.3 Γωνίες στον χώρο

Γωνίες στον χώρο μετράμε με τον τρόπο που τις μετράμε και στο επίπεδο. Δύο διαφορετικές και τεμνόμενες ευθείες α και β ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο ε (Πρόταση 7.1.2) και σε αυτό



Σχήμα 594: Γωνία στον χώρο

το επίπεδο μετράμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες με τον ίδιο τρόπο που το κάνουμε για τις γωνίες του επιπέδου (Παράγραφος 1.4).

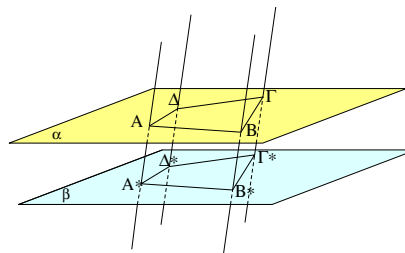


Σχήμα 595: Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Πρόταση 7.3.1 Γωνίες με παράλληλες και ομόρροπες πλευρές είναι ίσες.

Απόδειξη: Έστω ότι οι δύο γωνίες XOY και $X'O'Y'$ έχουν αντίστοιχες πλευρές παράλληλες. Τότε περιέχονται σε διαφορετικά ή ταυτιζόμενα επίπεδα. Αν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, τότε κατά το Πόρισμα 1.15.10 σχηματίζουν ίσες γωνίες. Αν περιέχονται σε διαφορετικά επίπεδα τότε τα επίπεδα αυτά είναι παράλληλα (Πρόταση 7.2.2). Σε αυτήν την περίπτωση όρισε επί των πλευρών τους τα σημεία έτσι ώστε $|OX| = |O'X'|$ και $|OY| = |O'Y'|$. Τότε τα $OXX'O'$ και $OYY'O'$ είναι παραλληλόγραμμα και συνεπώς οι XX' και YY' είναι παράλληλες, άρα και το $XY Y'X'$ είναι παραλληλόγραμμα. Συνάγεται ότι τα τρίγωνα OXY και $O'X'Y'$ έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές, άρα είναι ίσα και συνεπώς οι γωνίες τους στα O και O' είναι ίσες, ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.3.1 Έστω δύο επίπεδα XOO' και YOO' τεμνόμενα κατά την ευθεία OO' . Δύο παράλληλα επίπεδα α και β που τέμνουν την OO' τέμνουν τα επίπεδα XOO' και YOO' κατά γωνίες ίσες ($|XOY| = |X'O'Y'|$ στο σχήμα-595).



Σχήμα 596: Ίσα πολύγωνα οριζόμενα από παράλληλη δέσμη

Πόρισμα 7.3.2 Έστω $AB\Gamma\Delta\ldots$ πολύγωνο στο επίπεδο α και παράλληλη δέσμη ευθειών διερχομένων διά των κορυφών του. Η δέσμη αυτή ορίζει σε κάθε επίπεδο β , παράλληλο του α , πολύγωνο $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*\ldots$ ίσο προς το $AB\Gamma\Delta\ldots$.

Απόδειξη: Κατά την Πρόταση 7.2.6 τα ABB^*A^* , $B\Gamma\Gamma^*B^*$, ... είναι όλα παραλληλόγραμμα, συνεπώς τα πολύγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες $|AB| = |A^*B^*|$, $|B\Gamma| = |B^*\Gamma^*|$, Κατά την Πρόταση 7.3.1 τα πολύγωνα έχουν αντίστοιχες γωνίες επίσης ίσες, ο.ε.δ.

Σχόλιο Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι η έννοια της γωνίας στο χώρο γενικεύεται και για ασύμβατες ευθείες, οι οποίες, εξ ορισμού, δεν είναι παράλληλες αλλά και δεν τέμνονται.

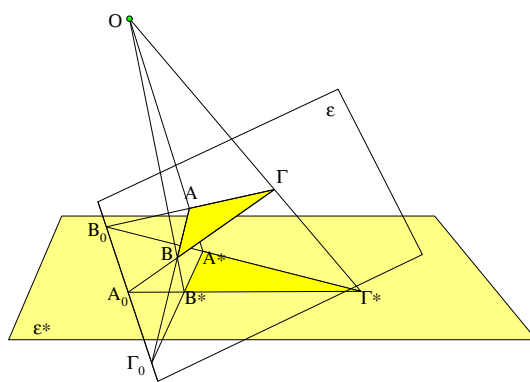
Άσκηση 7.3.1 Δείξε ότι αν οι ευθείες κ και λ είναι παράλληλες και περιέχονται αντίστοιχα στα τεμνόμενα επίπεδα α και β , τότε είναι και παράλληλες προς την ευθεία η της τομής των δύο επιπέδων.

Άσκηση 7.3.2 Δείξε ότι αν τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο και τέμνουν μιά τέταρτη σε διαφορετικά σημεία της, τότε και οι τέσσερις ευθείες είναι στο ίδιο επίπεδο.

Άσκηση 7.3.3 Δείξε ότι ένας κύκλος περιεχόμενος σε επίπεδο α και επίπεδο β , διαφορετικό του α , έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άσκηση 7.3.4 Δείξε ότι δύο κύκλοι περιεχόμενοι σε δύο διαφορετικά επίπεδα α και β έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άσκηση 7.3.5 Δείξε ότι αν οι αντίστοιχες πλευρές των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ τέμνονται, τότε οι ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ ή διέρχονται από κοινό σημείο O ή είναι παράλληλες.

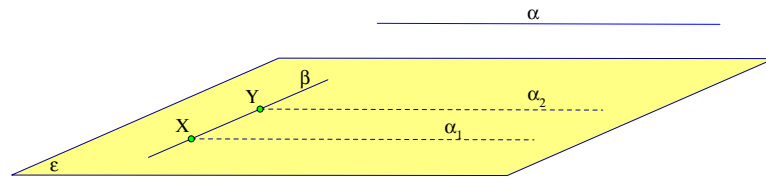


Σχήμα 597: Desargues στο χώρο

Υπόδειξη: Τα σημεία τομής A_0, B_0, Γ_0 των αντιστοίχων πλευρών των τριγώνων περιέχονται στην ευθεία που είναι η τομή των επιπέδων ϵ και ϵ^* των τριγώνων. Έστω ότι οι AA^* και BB^* τέμνονται στο O . Το O περιέχεται τότε στο επίπεδο των BB^* και $\Gamma\Gamma^*$, καθώς και στο επίπεδο των AA^* και $\Gamma\Gamma^*$. Άρα θα περιέχεται και στην τομή αυτών των δύο επιπέδων, που είναι η $\Gamma\Gamma^*$. Ανάλογη είναι η απόδειξη και στην περίπτωση της παραλληλίας των AA^* και BB^* .

7.4 Ασύμβατες ευθείες

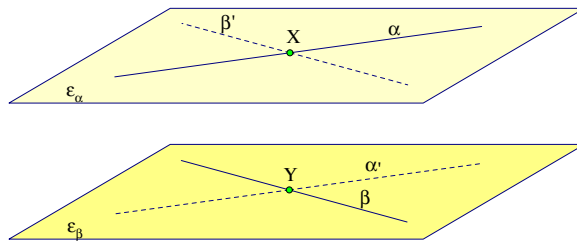
Όπως ήδη αναφέρθηκε (Παράγραφος 7.1) ασύμβατες λέγονται δύο ευθείες του χώρου για τις οποίες δεν υπάρχει επίπεδο στο οποίο να περιέχονται και οι δύο.



Σχήμα 598: Επίπεδο διά της β παράλληλο της ασυμβάτου α προς την β

Πρόταση 7.4.1 Αν α και β είναι ασύμβατες ευθείες, τότε υπάρχει ένα ακριβώς επίπεδο ε_β περιέχον την β και παράλληλο της α.

Απόδειξη: Από σημείο X της β φέρε παράλληλη α_1 της α. Το επίπεδο ε_β που περιέχει τις β και α_1 είναι παράλληλο της α (Πρόταση 7.1.9). Αν υπήρχε και άλλο επίπεδο ε περιέχον την α και παράλληλο της β, τότε η τομή τους, που είναι η ευθεία α, θα ήταν παράλληλη της β (Πρόταση 7.1.10), όπερ άτοπο, ο.ε.δ.



Σχήμα 599: Τα επίπεδα δύο ασυμβάτων ευθειών

Πρόταση 7.4.2 Δοθέντων ασυμβάτων ευθειών α και β υπάρχουν δύο ακριβώς παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ έτσι ώστε το πρώτο να περιέχει την α και το δεύτερο την β.

Απόδειξη: Θεώρησε τα επίπεδα ε_α και ε_β που ορίζονται στην προηγούμενη πρόταση. Αυτά είναι παράλληλα, διότι αν ετέμοντο, τότε η τομή τους θα ήταν και παράλληλη της α και παράλληλη της β (Πρόταση 7.1.8), που είναι άτοπο. Η προηγούμενη πρόταση δείχνει επίσης ότι δεν υπάρχει άλλο ζεύγος παραλλήλων επιπέδων ε' και ε'' περιέχον αντίστοιχα τις α και β. Διότι αν υπήρχε, και ήταν λ.χ. το ε' διαφορετικό του ε_α , τότε θα είχαμε δύο επίπεδα διά της α παράλληλα της β, όπερ άτοπο, ο.ε.δ.

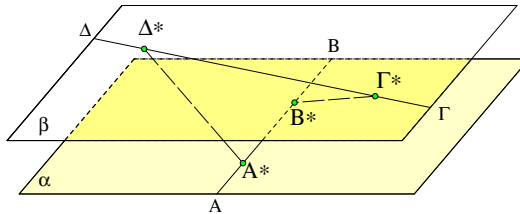
Η τελευταία πρόταση δείχνει την χαρακτηριστική ιδιότητα δύο ασυμβάτων ευθειών. Είναι απλά δύο ευθείες που περιέχονται σε δύο παράλληλα επίπεδα (επομένως δεν τέμνονται) αλλά δεν είναι παράλληλες. Η γωνία της ευθείας α και της παράλληλης β' της β από τυχόν σημείο X της α, όπως ορίσθηκε στην Πρόταση 7.4.1 είναι ανεξάρτητη της θέσης του σημείου X. Κατά την Πρόταση 7.3.1 είναι επίσης ίση με την γωνία των ευθειών β και α', όπου α' παράλληλη της α από τυχόν σημείο Y της β. Η γωνία αυτή λέγεται **Γωνία των ασυμβάτων**. Στην περίπτωση που η γωνία αυτή είναι ορθή οι δύο ευθείες α και β λέγονται **Ασύμβατα κάθετες**.

Άσκηση 7.4.1 Δείξε ότι, αν οι ευθείες a και b είναι ασύμβατα κάθετες και οι a' και b' είναι παράλληλες αντίστοιχα των a και b , τότε και οι a' και b' είναι ή κάθετες (εάν τέμνονται) ή ασύμβατα κάθετες.

Άσκηση 7.4.2 Δείξε ότι δεν υπάρχουν περισσότερες από τρεις ευθείες του χώρου που είναι ανά δύο ασύμβατα κάθετες.

Άσκηση 7.4.3 Έστω a και b ασύμβατες και $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ τα παράλληλα επίπεδα που τις περιέχουν. Δείξε ότι για κάθε σημείο X εκτός αυτών των επιπέδων υπάρχει μία ακριβώς ευθεία διά του X που τέμνει και τις δύο ασύμβατες.

Άσκηση 7.4.4 Δίδονται τρεις ευθείες στο χώρο a, b και γ , που είναι, ανά δύο, ασύμβατες. Δείξε ότι υπάρχουν άπειρες διαφορετικές ευθείες δ που τέμνουν ταυτόχρονα και τις τρεις δοθείσες ευθείες.



Σχήμα 600: Ασύμβατες από σημεία επί ασυμβάτων

Άσκηση 7.4.5 Δίδονται τα διαφορετικά σημεία A^*, B^* στην ευθεία AB και Γ^*, Δ^* στην ασύμβατο $\Gamma\Delta$ της AB . Δείξε ότι και οι ευθείες $A^*\Delta^*$ και Γ^*B^* είναι ασύμβατες.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι οι ευθείες $A^*\Delta^*$ και Γ^*B^* δεν τέμνονται (1) και δεν είναι παράλληλες (2). (1) Αν ετέμνοντο, τότε το σημείο τομής, πες X , θα ήταν και στο επίπεδο $B^*\Gamma^*\Delta^*$ και στο $A^*\Gamma^*\Delta^*$ που τέμνονται κατά την ευθεία $\Gamma^*\Delta^*$, άρα το X θα ήταν επί της $\Gamma^*\Delta^*$. Ανάλογα προκύπτει ότι το X θα ήταν και επί της A^*B^* , πράγμα άτοπον. (2) Αν οι $A^*\Delta^*$ και $B^*\Gamma^*$ ήταν παράλληλες, τότε θα υπήρχε επίπεδο ε , το οποίο θα περιείχε και τις δύο. Τότε όμως το ε θα περιείχε και τις ευθείες A^*B^* και $\Gamma^*\Delta^*$, πράγμα επίσης άτοπον.

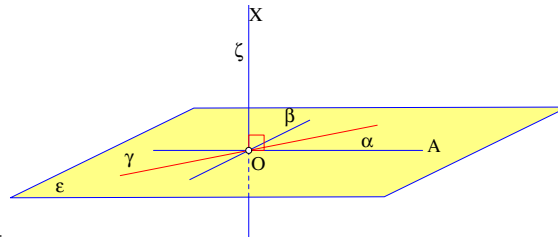
Το σχήμα $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*$ της προηγούμενης άσκησης λέγεται **Στρεβλό Τετράπλευρο** και προφανώς είναι η γενίκευση του επιπέδου τετραπλεύρου στον χώρο. Μία ιδιότητα κοινή με τα επίπεδα τετράπλευρα, που αποδεικνύεται και με τον ίδιο τρόπο (Πρόταση 2.7.2) είναι αυτή της επόμενης άσκησης.

Άσκηση 7.4.6 Τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 7.4.7 Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα απέναντι πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου τέμνονται στο μέσον τους.

7.5 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

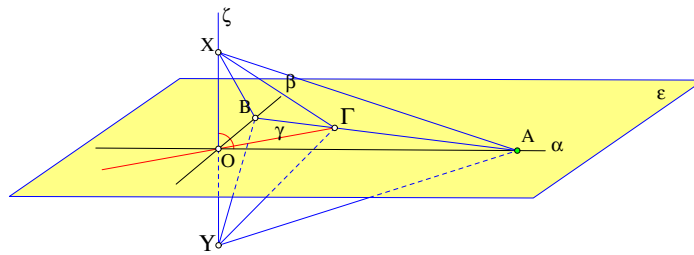
Μία ευθεία ζ λέγεται **Κάθετη στο επίπεδο** ε , όταν η ζ τέμνει το ε σε ένα σημείο O και είναι κάθετη σε δύο διαφορετικές ευθείες α και β του ε που διέρχονται από το O . Λέμε τότε επίσης ότι το επίπεδο ε είναι κάθετο στην ευθεία ζ . Την εικόνα της καθετότητας ευθείας και



Σχήμα 601: Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

επιπέδου συμπληρώνουν οι επόμενες προτάσεις που δείχνουν ότι ένα επίπεδο κάθετο σε μία ευθεία OX παράγεται από μία ευθεία OA που περιστρέφεται περί τον άξονα OX παραμένοντας συνεχώς κάθετη προς αυτόν.

Πρόταση 7.5.1 Ευθεία XY τέμνουσα επίπεδο ε στο σημείο O και κάθετη σε αυτό είναι και κάθετη σε κάθε ευθεία του ε που διέρχεται από το O .



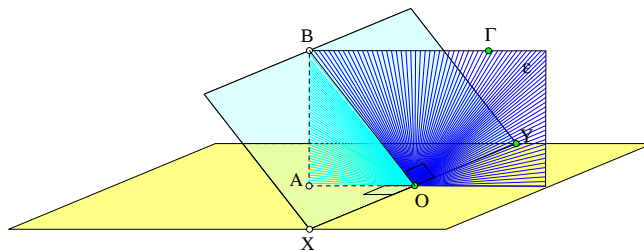
Σχήμα 602: Καθετότητα της XY προς όλες τις ευθείες OG

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία ζ είναι κάθετη στις διερχόμενες διά του O ευθείες α και β του επιπέδου ε . Έστω επίσης γ τυχούσα ευθεία διά του O , διαφορετική των α και β . Θα δείξουμε ότι η XY είναι κάθετη και προς την γ . Προς τούτο παίρνουμε τυχόν σημείο Γ της γ και φέρνουμε βοηθητική ευθεία του ε διά του Γ , που τέμνει τις α και β στα σημεία A και B . Ας πάρουμε επίσης τα X, Y επί της ζ να ισαπέχουν από το O . Τότε τα τρίγωνα XOA, YOA είναι ορθογώνια με ίσες κάθετες πλευρές, άρα ίσα και συνεπώς οι AX και AY θα είναι ίσες. Ανάλογα δείχνουμε και ότι οι BX και BY είναι ίσες. Τούτο συνεπάγεται ότι τα τρίγωνα ABX και ABY είναι ίσα (ΠΠΠ-κριτήριο). Συνεπώς και τα τρίγωνα BGX και BGY θα είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο), άρα οι GX και GY θα είναι ίσες, το τρίγωνο XGY θα είναι ισοσκελές και επειδή το O είναι το μέσον της XY , η GO θα είναι κάθετος της XY , ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.5.1 Αν το επίπεδο ε είναι κάθετο στην XY στο σημείο O , τότε κάθε ευθεία OA κάθετη στην XY στο σημείο O περιέχεται στο επίπεδο ε .

Απόδειξη: Αν η ευθεία OA είναι κάθετη στην XY στο σημείο O , αυτό σημαίνει ότι στο επίπεδο ζ που περιέχει την XY και την OA οι δύο αυτές ευθείες είναι κάθετες. Αν η OA

δεν περιήχεται στο επίπεδο ε , τότε το επίπεδο ζ θα έτεμνε το ε κατά ευθεία OA' , κατά την προηγούμενη πρόταση, επίσης κάθετο στην XY άρα στο επίπεδο ζ θα είχαμε δύο καθέτους προς την XY από το O . Το άτοπο αυτό δείχνει ότι η OA περιέχεται στο ε , ο.ε.δ.

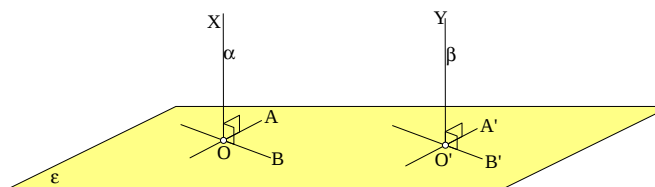


Σχήμα 603: Μεσοκάθετο επίπεδο του XY

Πρόταση 7.5.2 Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου A τα οποία ισαπέχουν από δύο σημεία X και Y είναι ένα επίπεδο ε κάθετο στο μέσον O του ευθυγράμμου τμήματος XY .

Απόδειξη: Θεώρησε τυχόν επίπεδο περιέχον το XY και την μεσοκάθετο (Πόρισμα 1.9.1) OA σε αυτό το επίπεδο. Ανάλογα όρισε και την μεσοκάθετο OB του XY για ένα δεύτερο επίπεδο περιέχον το XY . Οι δύο ευθείες OA και OB ορίζουν ένα επίπεδο ε , το οποίο κατά την Πρόταση 7.5.1 θα έχει όλες τις ευθείες του OG τις διερχόμενες διά του O κάθετες στο XY , άρα συμπίπτουσες με τις μεσοκαθέτους των αντιστοίχων επιπέδων που περιέχουν το XY και το Γ . Το επίπεδο ε λοιπόν που ορίζεται από τις OA και OB περιέχεται στον γεωμετρικό τόπο. Αντίστροφα, αν ένα σημείο Γ περιέχεται στον τόπο, τότε η OG θα είναι κάθετος στην XY στο O και κατά το Πόρισμα 7.5.1 θα περιέχεται στο ε , άρα το Γ θα περιέχεται στο επίπεδο ε . Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του ότι το ε ταυτίζεται με τον αναφερόμενο γεωμετρικό τόπο, ο.ε.δ.

Το επίπεδο που ορίζεται από την προηγούμενη πρόταση ονομάζεται **Μεσοκάθετο επίπεδο** του ευθυγράμμου τμήματος XY .

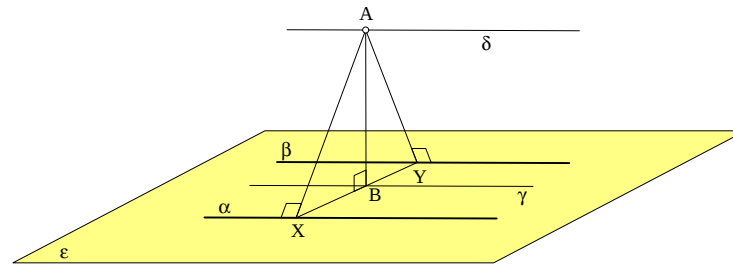


Σχήμα 604: Κάθετες στο ε είναι παράλληλες

Πρόταση 7.5.3 Αν ευθεία α είναι κάθετος σε επίπεδο ε τότε και κάθε παράλληλος ευθεία β της α θα είναι κάθετος στο ε . Και αντίστροφα, δύο ευθείες α και β κάθετες στο επίπεδο ε είναι παράλληλες.

Απόδειξη: Έστω ότι η κάθετος $\alpha = XO$ τέμνει το ε στο σημείο O και OA , OB είναι δύο ευθείες του ε προς τις οποίες η α είναι κάθετος (κατά τον ορισμό). Έστω τώρα O' το σημείο τομής της παραλλήλου $\beta = YO'$ της α με το ε . Από το O' φέρε τις $O'A'$, $O'B'$ αντίστοιχα

παράλληλες προς τις OA και OB . Κατά την Πρόταση 7.3.1 οι γωνίες XOA και YOA' είναι ίσες και οι γωνίες XOB και $XO'B'$ είναι επίσης ίσες. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\beta = YO'$ είναι κάθετη στις OA' και OB' , άρα, κατά τον ορισμό, κάθετη στο επίπεδο ϵ . Αντίστροφα, αν οι α και β είναι κάθετες στο ϵ αλλά η β δεν είναι παράλληλη προς την α , τότε φέρε από το O' την παράλληλο α' προς την α . Κατά το πρώτο μέρος της απόδειξης η α' θα είναι κάθετος στο επίπεδο ϵ , άρα το επίπεδο των α' και β θα τέμνει το ϵ κατά μία ευθεία γ η οποία θα είναι κάθετος και στην α' και στην β , πράγμα άτοπο. Το άτοπο δείχνει ότι η β πρέπει να είναι παράλληλος της α , ο.ε.δ.



Σχήμα 605: Κατασκευή καθέτου από σημείο

Κατασκευή 7.5.1 Να κατασκευασθεί η κάθετος προς επίπεδο ϵ από σημείο A εκτός αυτού.

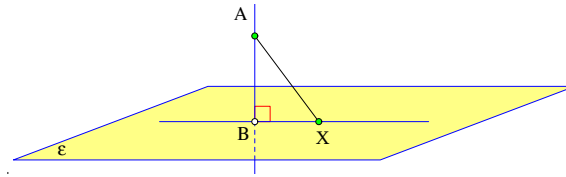
Κατασκευή: Θεώρησε δύο παράλληλες ευθείες α και β στο επίπεδο ϵ και στα αντίστοιχα επίπεδα που ορίζονται από τις α , β και το σημείο A φέρε τις κάθετες AX και AY στις α και β από το A . Σχημάτισε το τρίγωνο AXY και φέρε το ύψος του AB προς την XY . Η AB είναι η ζητούμενη κάθετος από το A προς το επίπεδο ϵ . Για να το δείξουμε αρκεί να βρούμε δύο ευθείες του ϵ κάθετες στην AB στο B . Προφανώς μία είναι η XY . Η άλλη είναι η παράλληλος γ των α και β από το B . Το ότι και αυτή είναι κάθετος στην AB φαίνεται ως εξής. Έστω δ η παράλληλος των α και β από το A . Η δ είναι κάθετος στην AX και στην AY , άρα είναι κάθετος στο επίπεδό τους. Η γ είναι παράλληλος της δ , άρα και αυτή κάθετος στο επίπεδο AXY (Πρόταση 7.5.3). Κατά την Πρόταση 7.5.1 η ευθεία γ θα είναι και κάθετος στην BA , άρα και η AB θα είναι κάθετος στην γ , ο.ε.δ.

Πρόταση 7.5.4 Από σημείο A εκτός επιπέδου ϵ άγεται μία και μόνον κάθετος προς αυτό.

Απόδειξη: Η προηγούμενη κατασκευή δείχνει ότι υπάρχει μία κάθετος από το A . Αν υπήρχε και δεύτερη AB' , τότε το τρίγωνο ABB' θα είχε στα B και B' ορθές γωνίες, άρα το άθροισμα των γωνιών του θα ήταν μεγαλύτερο του π . Το άτοπο αυτό δείχνει ότι δεν μπορεί να υπάρχει δεύτερη κάθετος AB' από το A , ο.ε.δ.

Γιά κάθε σημείο A εκτός του επιπέδου ϵ , το αντίστοιχο σημείο B , στο οποίο η κάθετος από το A τέμνει το ϵ , λέγεται **Προβολή του σημείου A στο επίπεδο ϵ** . Γιά κάθε σημείο A του επιπέδου ϵ θεωρούμε ότι η προβολή του στο ϵ ταυτίζεται με το ίδιο το σημείο. Γενικότερα, το σύνολο των προβολών X' των σημείων X ενός σχήματος Σ του χώρου σε επίπεδο ϵ είναι ένα σχήμα Σ' του επιπέδου ϵ που λέγεται **Προβολή του σχήματος Σ στο επίπεδο**. Το μήκος $|AB|$ της καθέτου από το σημείο A μέχρι την προβολή του B στο επίπεδο ϵ λέγεται **Απόσταση του σημείου A από το επίπεδο ϵ** .

Άσκηση 7.5.1 Δείξε ότι η προβολή ευθείας a του χώρου σε επίπεδο ε είναι ευθεία a' του ε και ο λόγος τριών σημείων της a ισούται με τον λόγο των προβολών τους επί της a' .



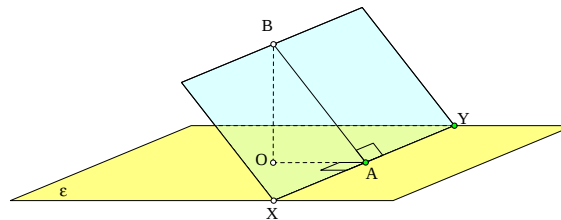
Σχήμα 606: Απόσταση σημείου από επίπεδο

Πρόταση 7.5.5 Η απόσταση $|AB|$ του σημείου A από το επίπεδο ε είναι μικρότερη από την απόσταση $|AX|$ για κάθε σημείο X του επιπέδου ε διαφορετικό από την προβολή B του A στο επίπεδο.

Απόδειξη: Για κάθε τέτοιο σημείο X το ABX είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές AB , BX και υποτείνουσα την AX , άρα $|AX| > |AB|$, ο.ε.δ.

Αν ε και ε' είναι παράλληλα επίπεδα τότε η απόσταση $|AB|$ ενός σημείου A του ε από το ε' δεν εξαρτάται από την θέση του A στο ε (Πρόταση 7.2.6) και λέγεται **Απόσταση των δύο επιπέδων ε και ε'** . Παρόμοια αν η ευθεία a είναι παράλληλος του επιπέδου ε και A είναι σημείο της ευθείας a , η απόσταση $|AB|$ δεν εξαρτάται της θέσης του A στην a και λέγεται **Απόσταση της παράλληλης ευθείας από το επίπεδο**. Δοθέντων δύο ασυμβάτων ευθειών η απόσταση των παραλλήλων επιπέδων που τις περιέχουν (Πρόταση 7.4.2) λέγεται **Απόσταση των ασυμβάτων ευθειών**.

Κατασκευή 7.5.2 Να κατασκευασθεί η κάθετος προς επίπεδο ε από σημείο O εντός αυτού.

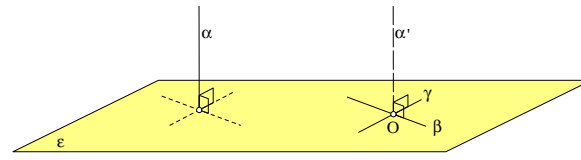


Σχήμα 607: Κατασκευή καθέτου από σημείο O επιπέδου

Κατασκευή: Θεώρησε τυχούσα ευθεία XY του ε μη περιέχουσα το O . Από το O φέρε κάθετο OA στην ευθεία XY . Θεώρησε κατόπιν τυχόν επίπεδο διερχόμενο διά της XY και στο επίπεδο αυτό φέρε την AB επίσης κάθετο στην XY . Εάν η γωνία OAB είναι ορθή στρέψε το επίπεδο περί την XY ώστε να γίνει οξεία. Στο επίπεδο των σημείων OAB φέρε την κάθετο OB στην OA από το σημείο O αυτής. Αυτή είναι η ζητούμενη κάθετος. Τούτο διότι εκ κατασκευής η OB είναι κάθετη στην OA αλλά και στην XY . Άρα η OB είναι κάθετος σε δύο ευθείες του επιπέδου ε , άρα και κάθετος σε αυτό, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.5.6 Από σημείο O εντός επιπέδου ε άγεται μία και μόνον κάθετος προς αυτό.

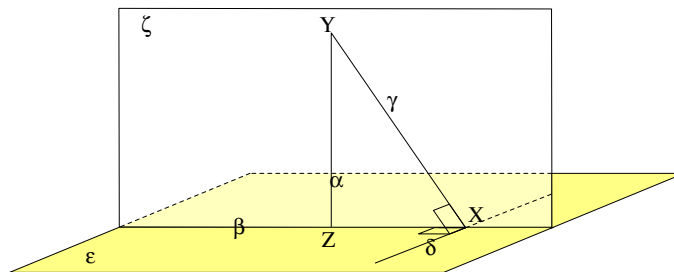
Απόδειξη: Η προηγούμενη κατασκευή ορίζει μία κάθετο OB από το O . Αν υπήρχε και δεύτερη OB' τότε το επίπεδο $OB'B'$ θα έτεμνε το ε κατά ευθεία α περιέχουσα το O και από το οποίο θα είχαμε δύο καθέτους προς την α περιεχόμενες στο επίπεδο $OB'B'$. Αυτό είναι άτοπο και δείχνει ότι υπάρχει μία μόνον κάθετος από το O , ο.ε.δ.



Σχήμα 608: Καθετότητα της α προς ασύμβατες β, γ

Πρόταση 7.5.7 Η ευθεία α είναι κάθετη στο επίπεδο ε τότε και μόνο τότε, όταν είναι κάθετη ή ασύμβατα κάθετη σε δύο μη παράλληλες ευθείες β και γ του επιπέδου ε .

Απόδειξη: Εάν η α είναι κάθετη στο ε , τότε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το ίχνος της (Πρόταση 7.5.1) και επομένως ασύμβατα κάθετη προς κάθε ευθεία β του επιπέδου ε , αφού κάθε τέτοια είναι παράλληλη προς μία που διέρχεται από το ίχνος της. Αντίστροφα, αν η α είναι κάθετη ή ασύμβατα κάθετη σε δύο τεμνόμενες στο O ευθείες β, γ του επιπέδου ε , τότε η παράλληλη της α' από το O θα είναι κάθετη στις β, γ άρα κάθετη και στο επίπεδό τους ε . Συνεπώς και η παράλληλη α της α' θα είναι επίσης κάθετη στο επίπεδο ε (Πρόταση 7.5.3), ο.ε.δ.



Σχήμα 609: Θεώρημα τριών καθέτων

Πρόταση 7.5.8 (Θεώρημα τριών καθέτων) Τρεις ευθείες α, β, γ σχηματίζουν τρίγωνο XYZ και μία τέταρτη δ διέρχεται από την κορυφή X του τριγώνου. Τότε

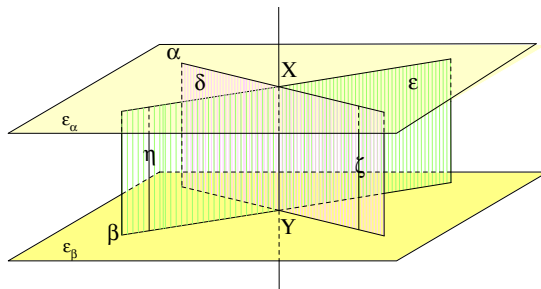
- (1) Αν η α είναι κάθετη στο επίπεδο των β, δ και η δ , κάθετη στην β , τότε η δ είναι κάθετη και στην γ .
- (2) Αν η α είναι κάθετη στο επίπεδο των β, δ και η γ είναι κάθετη στην δ , τότε και η β είναι κάθετη στην δ .
- (3) Αν η δ είναι κάθετη στο επίπεδο των β, γ και η α είναι κάθετη στην β , τότε η α είναι κάθετη και στο επίπεδο των β, δ .

Απόδειξη: Και οι τρεις προτάσεις είναι συνέπειες της προηγούμενης πρότασης.

(1): Αν η α είναι κάθετη στο επίπεδο ε των β, δ και η δ κάθετη στην β , τότε η δ είναι κάθετη στην β και ασύμβατα κάθετη στην α , συνεπώς η δ είναι κάθετη στο επίπεδο των α, β , άρα και σε κάθε ευθεία του που διέρχεται από το X , όπως η γ .

(2): Αν η α είναι κάθετη στο επίπεδο των β, δ και η γ κάθετη στην δ , τότε η δ είναι κάθετη στην γ και ασύμβατα κάθετη στην α , άρα και στο επίπεδό τους καθώς και σε κάθε ευθεία του επιπέδου τους που διέρχεται από το X , όπως η β .

(3): Αν η δ είναι κάθετη στο επίπεδο των β, γ και η α είναι κάθετη στην β , τότε η α είναι κάθετη στην β και ασύμβατα κάθετη στην δ , άρα και στο επίπεδό τους, ο.ε.δ.



Σχήμα 610: Κοινή κάθετος δύο ασυμβάτων ευθειών

Πρόταση 7.5.9 Υπάρχει μία ακριβώς ευθεία XY ταυτόχρονα κάθετη σε δύο ασύμβατες ευθείες α και β .

Απόδειξη: Θεώρησε τα δύο παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ που περιέχουν αντίστοιχα τις ασύμβατες α και β (Πρόταση 7.4.2). Επίσης από τυχόν σημείο της α φέρε κάθετο ζ προς αυτά τα επίπεδα και από τυχόν σημείο της β φέρε κάθετο η προς αυτά τα επίπεδα. Σχηματίζονται δύο νέα επίπεδα, το δ που περιέχει την α και ζ και το ε που περιέχει την β και η . Τα δύο αυτά επίπεδα είναι παράλληλα προς μία ευθεία κάθετη στα δύο επίπεδα (Πρόταση 7.1.9), άρα και η τομή τους θ θα είναι παράλληλη της καθέτου στα δύο επίπεδα (Πρόταση 7.1.10), επομένως και αυτή κάθετη στα δύο επίπεδα. Η θ συναντά την ευθεία α σε σημείο X , διότι η παράλληλός της ζ την συναντά εξ υποθέσεως. Παρόμοια η θ συναντά και την β σε σημείο Y , άρα η θ ταυτίζεται με την XY . Η XY είναι μοναδική ταυτόχρονα κάθετος και στην α και στην β . Τούτο, διότι αν υπήρχε και δεύτερη XY' κάθετος στις α και β , τότε η XY' θα ήταν κάθετος και στα παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$, συνεπώς θα ήταν παράλληλος της XY (Πρόταση 7.5.3). Αυτό θα είχε όμως ως συνέπεια η α , που περιέχει τα X, X' και η β , που περιέχει τα Y, Y' να ήταν στο ίδιο επίπεδο, πράγμα άτοπον, ο.ε.δ.

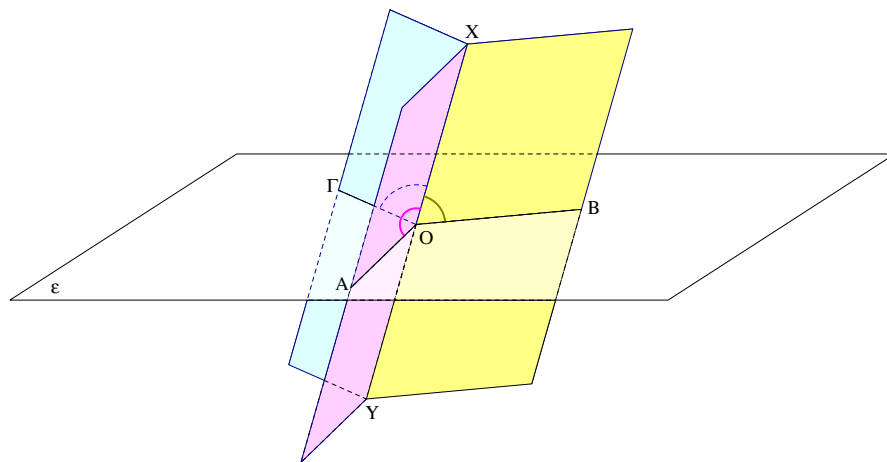
Η ευθεία XY , που εξασφαλίζεται από την προηγούμενη πρόταση, ονομάζεται **Κοινή κάθετος των ασυμβάτων** α και β .

Άσκηση 7.5.2 Δείξε ότι τα μεσοκάθετα επίπεδα των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται κατά ευθεία διερχόμενη από το περίκεντρο O του τριγώνου και κάθετη στο επίπεδο αυτού. Δείξε επίσης ότι για κάθε σημείο X αυτής της ευθείας και κάθε σημείο Σ του περικύκλου κ το μήκος $X\Sigma$ είναι σταθερό όταν το Σ μεταβάλλεται στον κ .

Υπόδειξη: Έστω OX τη τομή των μεσοκαθέτων επιπέδων των τμημάτων AB και $B\Gamma$. Κάθε σημείο X αυτής της ευθείας θα έχει $|XA| = |XB|$, ως ανήκον στο μεσοκάθετο του AB και $|XB| = |X\Gamma|$ ως ανήκον στο μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Από τις δύο συνάγεται $|XA| = |X\Gamma|$, άρα το X είναι στο μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Η OX είναι ασύμβατα κάθετη στις AB και $B\Gamma$, άρα (Άσκηση 7.5.7) κάθετη στο ε . Αυτό δείχνει το πρώτο μέρος της άσκησης. Για το δεύτερο θεώρησε σημείο Σ του περικύκλου κ και το τρίγωνο $XO\Sigma$. Αυτό είναι ορθογώνιο στο O και ίσο με το $XO\Gamma$, ως έχον αντίστοιχα ίσες καθέτους με αυτό, άρα $|X\Sigma| = |X\Gamma|$.

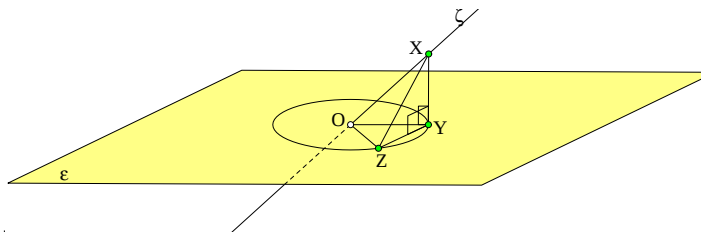
7.6 Γωνία ευθείας και επιπέδου

Στον χώρο εμφανίζεται μία νέα δυνατότητα: η **Γωνία ευθείας και επιπέδου**. Μία ευθεία XY που τέμνει επίπεδο ε στο σημείο O ορίζει διάφορες γωνίες μέσω των επιπέδων που περιέχουν την XY . Πράγματι, κάθε σημείο A του επιπέδου ε ορίζει το επίπεδο που περιέχει την XY και το A . Αυτό τέμνει το ε κατά ευθεία OA και συνεπώς ορίζει μία γωνία XOA . Από όλες τις γωνίες που δημιουργούνται κατ' αυτόν τον τρόπο υπάρχει μία που είναι η ελάχιστη δυνατή. Η γωνία αυτή ονομάζεται γωνία της ευθείας XY και του επιπέδου ε . Την ύπαρξη αυτής της γωνίας εξασφαλίζει η επόμενη πρόταση.



Σχήμα 613: Γωνία ευθείας XY και επιπέδου ε

Πρόταση 7.6.1 Έστω ευθεία ζ τέμνουσα το επίπεδο ε σε ένα σημείο και μή-κάθετος προς αυτό. Έστω X τυχόν σημείο της ευθείας ζ διαφορετικό της τομής O της ζ με το ε . Γιά κάθε επίπεδο XOZ περιέχον την ζ θεώρησε την γωνία XOZ που σχηματίζεται από την ζ και την τομή OZ αυτού του επιπέδου με το ε . Από όλες αυτές τις γωνίες η ελάχιστη είναι η XOY , όπου Y η προβολή του X στο επίπεδο ε .



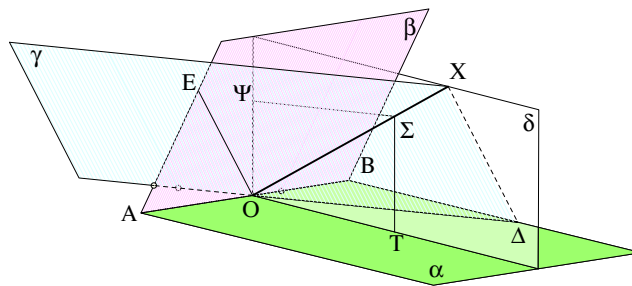
Σχήμα 614: Ορισμός γωνίας ευθείας και επιπέδου

Απόδειξη: Θεώρησε τον κύκλο του ε με κέντρο O και ακτίνα OY . Κάθε επίπεδο που περιέχει την ζ τέμνει το επίπεδο κατά μία ευθεία OZ διερχόμενη διά του O και ορίζει δύο σημεία επί του κύκλου. Έστω Z ένα εξ αυτών. Το τρίγωνο XYZ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα XZ μεγαλύτερη της καθέτου XY . Συνεπώς τα τρίγωνα XOZ και XOY έχουν τις πλευρές τους τις προσκείμενες στην κορυφή τους O αντίστοιχα ίσες και την απέναντι πλευρά XZ

μεγαλύτερη της απέναντι πλευράς XY . Από το Πόρισμα 1.10.10 έπεται ότι η γωνία XOZ θα είναι μεγαλύτερη της XOY , ο.ε.δ.

Σχόλιο Κατ' αυτόν τον ορισμό της γωνίας ευθείας και επιπέδου θα πρέπει μία ευθεία που σχηματίζει ορθή γωνία με το επίπεδο να συμπίπτει με μία κάθετο στο επίπεδο, με την έννοια που δώσαμε στην Παράγραφο 7.5. Το ότι αυτό συμβαίνει προκύπτει από την παρατήρηση ότι εάν η γωνία XOZ είναι ελάχιστη, τότε η παραπληρωματική της είναι μέγιστη, μεταξύ όλων των γωνιών που προκύπτουν στρέφοντας την OZ περί το O στο επίπεδο ε (σχήμα 614). Έτσι, αν το ελάχιστο αυτό είναι μία ορθή, τότε θα συμπίπτει με το μέγιστο και συνεπώς όλες οι γωνίες XOZ θα είναι ορθές.

Άσκηση 7.6.1 Δείξε ότι δύο παράλληλες ευθείες σχηματίζουν τις ίδιες γωνίες με επίπεδο ε .



Σχήμα 615: Ελάχιστη γωνία μεταξύ δύο επιπέδων

Άσκηση 7.6.2 Δύο επίπεδα α και β τέμνονται κατά την ευθεία AB . Ευθεία OX είναι κάθετη στην AB στο σημείο της O και περιέχεται ανάμεσα στα δύο επίπεδα. Έστω δ το επίπεδο που διέρχεται από το O και είναι κάθετο στην AB . Δείξε ότι κάθε άλλο επίπεδο γ , που περιέχει την OX , τέμνει τα α και β κατά γωνία ΔOE , που είναι μεγαλύτερη της γωνίας $TO\Psi$ κατά την οποία τέμνει το επίπεδο δ τα α και β .

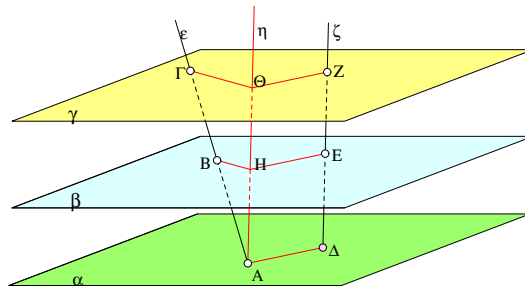
Υπόδειξη: Κατ' αρχήν το επίπεδο δ , ως κάθετο στην AB στο O , θα περιέχει και κάθε ευθεία κάθετη στην AB στο O , άρα και την OX . Επίσης, για τυχόν σημείο Σ της OX , το δ θα περιέχει τις ευθείες ΣT και $\Sigma\Psi$, όπου T και Ψ οι προβολές του Σ στα α και β αντιστοίχως. Από την προηγούμενη πρόταση, η γωνία ΣOT είναι μικρότερη της ΣOD . Το ίδιο και η γωνία $\Sigma O\Psi$ είναι μικρότερη της ΣOE , άρα και

$$|\angle TO\Psi| = |\angle \Sigma OT| + |\angle \Sigma O\Psi| < |\angle \Sigma OD| + |\angle \Sigma OE| = |\angle DOE|.$$

Άσκηση 7.6.3 Δείξε ότι n ευθείες του χώρου που τέμνονται ανά δύο, ή διέρχονται όλες από κοινό σημείο ή περιέχονται στο ίδιο επίπεδο.

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα την πρόταση για $n=3$. Κατόπιν χρησιμοποίησε αυτήν την περίπτωση για την απόδειξη της γενικής πρότασης.

7.7 Θεώρημα του Θαλή στο χώρο



Σχήμα 616: Ευθείες τεμνόμενες υπό παραλλήλων επιπέδων

Πρόταση 7.7.1 Παράλληλα επίπεδα αποτέμνουν από τέμνουσες αυτά ευθείες τμήματα ανάλογα.

Απόδειξη: Έστω ότι οι ευθείες ϵ και ζ τέμνουν τα επίπεδα α, β, γ στα σημεία αντίστοιχα (A, B, Γ) και (Δ, E, Z) . Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|\Delta E|}{|EZ|}.$$

Προς τούτο θεωρήσε ευθεία η παράλληλο της ζ από το σημείο A και τέμνουσα τα επίπεδα β και γ αντίστοιχα στα σημεία H και Θ . Κατά την Πρόταση 7.2.6

$$|\Delta E| = |AH|, |EZ| = |H\Theta| \Rightarrow \frac{|\Delta E|}{|EZ|} = \frac{|AH|}{|H\Theta|}.$$

Κατά την του Θαλή εφαρμοζόμενη στο επίπεδο των ευθειών (ϵ, η) (Πρόταση 3.8.1) έχουμε

$$\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|AH|}{|H\Theta|}.$$

Τούτη συνδυαζόμενη με την προηγούμενη οδηγεί στην απόδειξη.

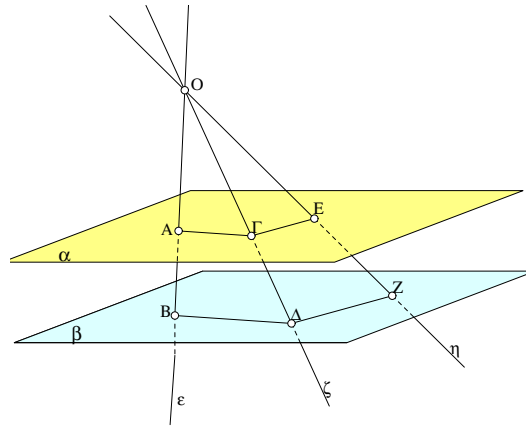
Πρόταση 7.7.2 Ευθύγραμμα τμήματα οριζόμενα από σημειακή δέσμη σε παράλληλα επίπεδα είναι ανάλογα.

Απόδειξη: Έστω ότι οι ευθείες ϵ, ζ και η , διερχόμενες διά του σημείου O τέμνουν τα επίπεδα α και β αντίστοιχα στα σημεία (A, Γ, E) και (B, Δ, Z) . Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{|A\Gamma|}{|\Gamma E|} = \frac{|B\Delta|}{|\Delta Z|}.$$

Κατά το Πόρισμα 3.7.3 εφαρμοζόμενο στο επίπεδο των ευθειών (ϵ, ζ) έχουμε ότι

$$\frac{|A\Gamma|}{|B\Delta|} = \frac{|O\Gamma|}{|O\Delta|}.$$



Σχήμα 617: Σημειακή δέσμη και παράλληλα επίπεδα

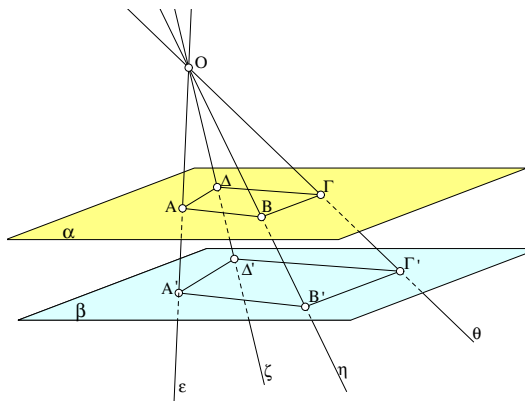
Επίσης εφαρμόζοντας το ίδιο πόρισμα στο επίπεδο των ευθειών (ζ,η) έχουμε ότι

$$\frac{|OG|}{|OD|} = \frac{|GE|}{|DZ|}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις παίρνουμε την ζητούμενη, ο.ε.δ.

Σχόλιο Η προηγούμενη πρόταση δείχνει ότι το θεώρημα του Θαλή στην μορφή της Πρότασης 3.8.2 που ισχύει για σημειακές δέσμες του επιπέδου επεκτείνεται και σε σημειακές δέσμες ευθειών στο χώρο.

Πόρισμα 7.7.1 Έστω $AB\Gamma\Delta\ldots$ πολύγωνο στο επίπεδο α και σημείο O εκτός του επιπέδου. Σε κάθε επίπεδο β παράλληλο του α η σημειακή δέσμη ευθειών διά του O ορίζει πολύγωνο $A'B'\Gamma'\Delta'\ldots$ όμοιο του $AB\Gamma\Delta\ldots$.

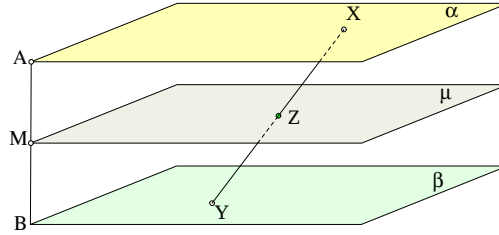


Σχήμα 618: Όμοια πολύγωνα σε παράλληλα επίπεδα

Απόδειξη: Το πόρισμα λέει ότι οι ευθείες $OA, OB, OG\ldots$ που ενώνουν το σημείο O με τις κορυφές του πολυγώνου ορίζουν σε παράλληλο επίπεδο β του α πολύγωνο $A'B'\Gamma'\ldots$ όμοιο του $AB\Gamma\Delta\ldots$. Η ομοιότητα εδώ σημαίνει, όπως και στην περίπτωση δύο πολυγώνων του ίδιου επιπέδου (Παράγραφος 3.10), ότι οι πλευρές των δύο πολυγώνων είναι ανάλογες

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'\Gamma'|}{|B\Gamma|} = \frac{|G'\Delta'|}{|G\Delta|} = \ldots \kappa,$$

όπου κ σταθερά, και οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες. Η ισότητα των λόγων προκύπτει από την ομοιότητα των ζευγών τριγώνων $(\text{ΟΑ}'\text{Β}', \text{ΟΑΒ})$, $(\text{ΟΒ}'\Gamma', \text{ΟΒ}\Gamma)$, $(\text{Ο}\Gamma'\Delta', \text{Ο}\Gamma\Delta)$, ... που με την σειρά της προκύπτει από την προηγούμενη απόδειξη. Η ισότητα των γωνιών προκύπτει από το γεγονός ότι οι οι πλευρές των αντιστοίχων γωνιών, όπως η $\text{Α}'\text{Β}'\Gamma'$ και $\text{ΑΒ}\Gamma$ είναι παράλληλες (Πρόταση 7.3.1), ο.ε.δ.



Σχήμα 619: Μεσοπαράλληλο επίπεδο των επιπέδων α και β

Πρόταση 7.7.3 Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M ευθυγράμμων τμημάτων XY που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλα επίπεδα α και β , είναι επίπεδο μ που ισαπέχει από τα α και β .

Απόδειξη: Θεώρησε ένα τμήμα AB με άκρα στα α και β και μέσον M . Από το M φέρε το παράλληλο επίπεδο μ προς τα α, β . Κατά την Πρόταση 7.7.1 και κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα XY θα έχει σημείο τομής Z με το μ έτσι ώστε $\frac{|ZX|}{|ZY|} = \frac{|MA|}{|MB|} = 1$. Άρα το Z θα είναι το μέσον του XY . Συνεπώς κάθε σημείο του μ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο. Γιά το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε σημείο του τόπου περιέχεται στο μ , θεωρήσε τυχόν τμήμα XY και το μέσον του Z και φέρε από το Z παράλληλο επίπεδο προς τα α και β . Και πάλι κατά την Πρόταση 7.7.1 αυτό θα τέμνει το AB στο μέσον του, άρα θα ταυτίζεται με το μ , ο.ε.δ.

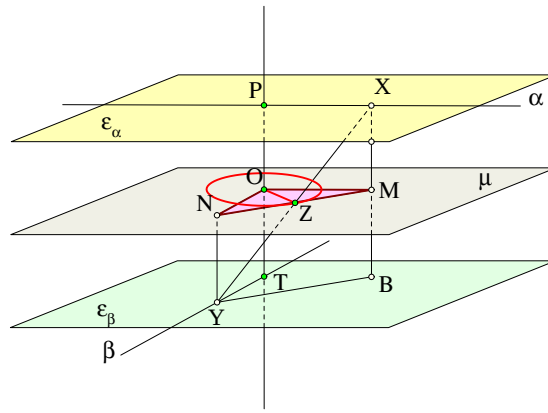
Το επίπεδο που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση λέγεται **Μεσοπαράλληλο επίπεδο** των α και β .

Άσκηση 7.7.1 Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M ευθυγράμμων τμημάτων XY που έχουν τα άκρα τους επί δύο ασυμβάτων ευθειών α και β είναι ένα επίπεδο ε παράλληλο και ισαπέχον από τις α και β .

Υπόδειξη: Θεώρησε τα δύο παράλληλα επίπεδα η, ζ που περιέχουν αντίστοιχα τις α και β (Πρόταση 7.4.2). Δείξε ότι ο ζητούμενος τόπος είναι το μεσοπαράλληλο επίπεδο των η και ζ .

Άσκηση 7.7.2 Ευθύγραμμο τμήμα XY σταθερού μήκους έχει τα άκρα του επί δύο ασύμβατα καθέτων ευθειών α και β . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του Z .

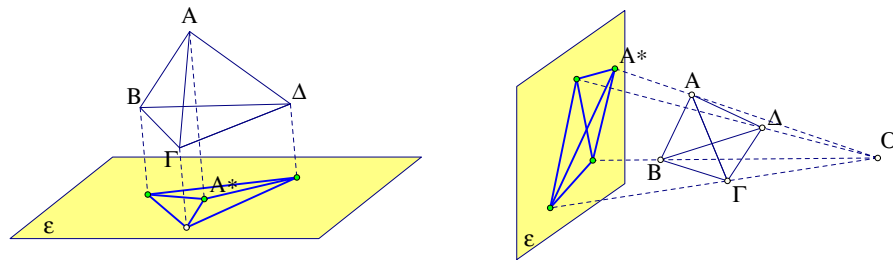
Υπόδειξη: Θεώρησε τα δύο παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$, που περιέχουν αντίστοιχα τις α και β (Πρόταση 7.4.2). Πρόβαλε το X στο επίπεδο ε_β στο σημείο B . Παρόλο που τα X, Y μεταβάλλονται το ορθογώνιο τρίγωνο $XB\Upsilon$ παραμένει ίσο εαυτώ, αφού η υποτείνουσα XY είναι σταθερού μήκους και το $|XB|$ ισούται με την απόσταση των επιπέδων. Επομένως το ΥB είναι σταθερού μήκους, περ λ . Άρα και η προβολή του MN στο μεσοπαράλληλο επίπεδο μ των $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ είναι του ιδίου σταθερού μήκους λ . Αν PT είναι η κοινή κάθετος των δύο



Σχήμα 620: Γεωμετρικός τόπος με ασύμβατες

ασυμβάτων και O το σημείο που αυτή συναντά το μ , το τρίγωνο ONM είναι ορθογώνιο στο O . Επί πλέον το Z είναι το μέσον της MN , αφού το $XYMN$ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του XY και MN διχοτομούνται στο Z . Άρα η OZ είναι και η διάμεσός του ορθογωνίου προς την υποτείνουσα και συνεπώς είναι μήκους $\lambda/2$. Άρα το Z περιέχεται στον κύκλο κ με κέντρο O και ακτίνα $\lambda/2$.

Αντίστροφα, αν Z σημείο του κύκλου κ , τότε οι προβολές του N' , M' επί των ON και OM αντίστοιχα, ορίζουν την κατεύθυνση $N'M'$ και της παράλληλής της MN , αφού τα M' και N' είναι τα μέσα των OM και ON αντιστοίχως. Επομένως η MN κατασκευάζεται φέρνοντας παράλληλη της $M'N'$ από το Z . Η ευθεία MN και η παράλληλη της PT από το Z ορίζουν επίπεδο ν διερχόμενο από το Z , το οποίο τέμνει τις α και β σε δύο σημεία X και Y αντίστοιχα. Μία διαδικασία αντίστροφης από αυτήν του πρώτου μέρους της απόδειξης δείχνει ότι τα X, Z και Y είναι συγγραμμικά και το Z είναι το μέσον της XY .



Σχήμα 621: Παράλληλη και προοπτική προβολή

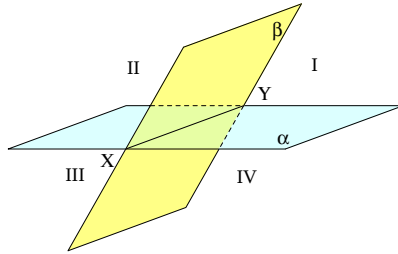
Οι δέσμες παραλλήλων ευθειών στο χώρο και οι δέσμες ευθειών που διέρχονται από σταθερό σημείο O του χώρου δίνουν την δυνατότητα να προβάλλουμε ένα σχήμα Σ του χώρου σε ένα σχήμα Σ' ενός σταθερού επιπέδου ϵ . Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μία σταθερή ευθεία ζ και σε κάθε σημείο A του Σ αντιστοιχούμε την τομή A^* της παραλλήλου της ζ από το A με το ϵ . Την διαδικασία αυτή ονομάζουμε **Παράλληλη προβολή** του Σ στο ϵ κατά την κατεύθυνση της ζ . Στην δεύτερη περίπτωση αντιστοιχούμε στο X την τομή της OA με το ϵ . Την διαδικασία αυτή ονομάζουμε **Κεντρική προβολή** (ή και προοπτική προβολή) από το O στο επίπεδο ϵ . Η διαδικασία αυτή υλοποιείται στην φωτογράφιση, κατά την οποία ένα σχήμα του χώρου προβάλλεται στο φωτογραφικό φιλμ (επίπεδο ϵ).

Κεφάλαιο 8

Στερεά

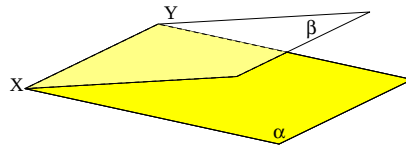
8.1 Διέδρες γωνίες

Δύο επίπεδα που τέμνονται χωρίζουν τον χώρο σε τέσσερα **Τεταρτημόρια** και ορίζουν στον χώρο σχήματα ανάλογα των γωνιών που ορίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου. Δύο από τα ημιεπίπεδα των α και β ορίζουν μία κυρτή **Διέδρου γωνία** καθώς και μία μη-



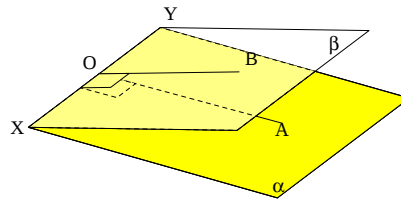
Σχήμα 622: Τεταρτημόρια οριζόμενα από δύο τεμνόμενα επίπεδα

κυρτή. Η ευθεία XY λέγεται **Ακμή της διέδρου**. Τα ημιεπίπεδα των α και β λέγονται **Έδρες της διέδρου γωνίας**.



Σχήμα 623: Διέδρος γωνία

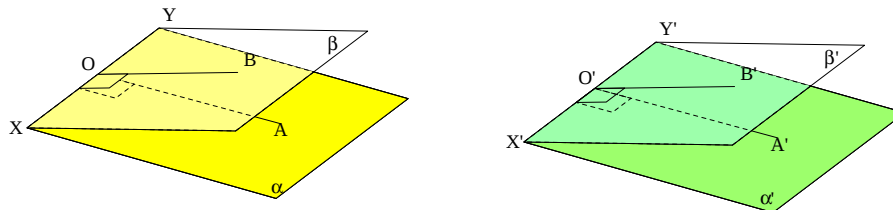
Στην έννοια της διέδρου αντιστοιχεί αυτή της γωνίας του επιπέδου. Αυτό τονίζεται και με τον επόμενο ορισμό που δίδει τον τρόπο που μετράμε το μέγεθος μιάς διέδρου. Το **Μέτρο**



Σχήμα 624: Διέδρος γωνία

διέδρου γωνίας ορίζεται φέρνοντας ένα επίπεδο κάθετο στην ακμή. Το επίπεδο αυτό τέμνει τις έδρες κατά ευθείες OA και OB και ως μέτρο της διέδρου ορίζουμε το μέτρο της γωνίας AOB . Έτσι η κυρτή διέδρος αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία AOB με μέτρο μικρότερο του π (σε ακτίνια) και η μη-κυρτή διέδρος αντιστοιχεί στην μη-κυρτή γωνία AOB με μέτρο μεγαλύτερο του π . Πρέπει να σημειώσουμε ότι το μέτρο της διέδρου δεν εξαρτάται από την θέση του O στην ακμή XY αυτής. Αν φέρουμε το κάθετο στην XY επίπεδο σε ένα άλλο σημείο O' της ακμής, τότε η αντίστοιχη γωνία που θα σχηματισθεί $A'O'B'$ θα έχει τις πλευρές της παράλληλες και ομόρροπες προς αυτές της AOB , συνεπώς οι δύο γωνίες θα είναι ίσες (Πρόταση 7.3.1). Δύο διέδρες γωνίες τις λέμε **Ίσες** όταν έχουν το ίδιο μέτρο. Γενικότερα, μεταφέροντας τις έννοιες των επιπέδων γωνιών στις διέδρους μιλάμε για **Ορθή διέδρου**,

Αμβλεία διέδρο, Οξεία διέδρο, Συμπληρωματική διέδρο, Παραπληρωματική διέδρο, Κατά κορυφήν διέδρο κτλ. Ισχύουν επίσης ιδιότητες ανάλογες με αυτές των γωνιών. Αρκεί να ανατρέξουμε στις ιδιότητες των γωνιών και να αντικαταστήσουμε σε αυτές την φράση *πλευρά γωνίας* με την φράση *έδρα διέδρου*. Η επόμενη πρόταση δίνει ένα παράδειγμα αυτών των αναλογιών.



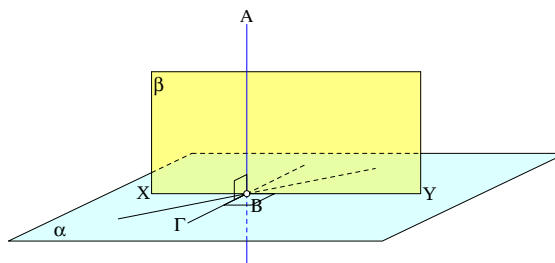
Σχήμα 625: Ίσες διέδρες γωνίες

Πρόταση 8.1.1 Διέδρες γωνίες των οποίων οι αντίστοιχες έδρες είναι παράλληλα επίπεδα είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη: Έστω ότι οι έδρες α' , β' της μιάς διέδρου είναι παράλληλα επίπεδα αντίστοιχα προς τις έδρες α , β της άλλης. Τότε οι ακμές τους είναι παράλληλες. Αυτό συνάγεται προεκτείνοντας μία έδρα λ.χ. την β' έως ότου τμήσει την α κατά ευθεία ε . Κατά την Πρόταση 7.2.3 η ε και η XY θα είναι παράλληλες ως αποτεμνόμενες από τα παράλληλα επίπεδα β και β' μέσω του α . Παρόμοια και οι ε και $X'Y'$ θα είναι όμοιες ως αποτεμνόμενες από τα παράλληλα επίπεδα α και α' μέσω της β' . Συνεπώς οι ακμές XY και $X'Y'$ θα είναι παράλληλες ευθείες. Επομένως ένα επίπεδο γ κάθετο στην ακμή XY που ορίζει την γωνία AOB της μιάς διέδρου θα είναι και κάθετο στην ακμή $X'Y'$ της άλλης διέδρου (Πρόταση 7.5.3) και θα ορίζει την γωνία $A'O'B'$ της άλλης διέδρου. Λόγω της παραλληλίας των επιπέδων οι γωνίες AOB και $A'O'B'$ θα έχουν πλευρές παράλληλες, άρα θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές (Πόρισμα 1.15.10), ο.ε.δ.

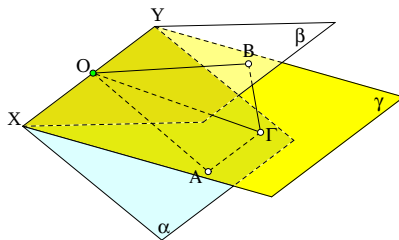
Δύο επίπεδα που σχηματίζουν μία ορθή διέδρο τα λέμε **Κάθετα επίπεδα**.

Πρόταση 8.1.2 Αν μία ευθεία AB είναι κάθετος στο επίπεδο α , τότε κάθε άλλο επίπεδο β που περιέχει την AB θα είναι κάθετο στο επίπεδο α .



Σχήμα 626: Κάθετα επίπεδα

Απόδειξη: Η AB είναι κάθετος σε κάθε ευθεία του α που διέρχεται από το B (Πρόταση 7.5.1), άρα θα είναι κάθετος και στην ευθεία $B\Gamma$ που είναι ορθογώνια προς την τομή XY των επιπέδων και περιέχεται στο α . Αυτό δείχνει ότι η γωνία της διέδρου των α και β είναι ορθή, ο.ε.δ.

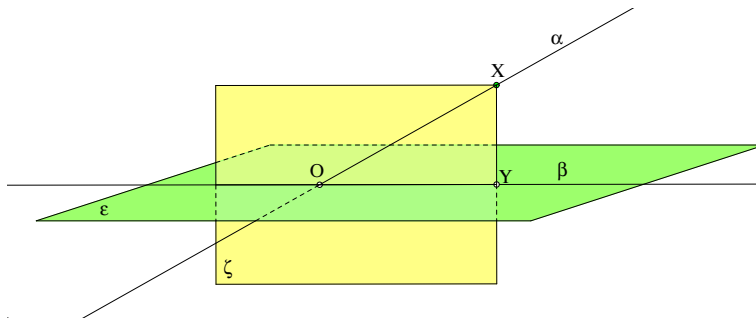


Σχήμα 627: Διχοτόμο επίπεδο διέδρου

Πρόταση 8.1.3 *Γιά δύο επίπεδα α και β τεμνόμενα κατά την ευθεία XY , τα σημεία του χώρου Γ που ισαπέχουν από τα επίπεδα ευρίσκονται επί δύο άλλων επιπέδων γ , δ διερχομένων διά της XY και σχηματιζόντων ίσες διέδρες με τα α και β και είναι κάθετα μεταξύ τους.*

Απόδειξη: Έστω σημείο Γ ισαπέχον από τα επίπεδα α και β . Φέρε τις κάθετες ΓA και ΓB σε αυτά. Το επίπεδο $AB\Gamma$ είναι κάθετο στην XY διότι η XY , ως ευθεία του επιπέδου β είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και ως ευθεία του επιπέδου α είναι κάθετη στην $A\Gamma$. Έπεται ότι η γωνία AOB , όπου O το σημείο τομής της XY με το επίπεδο $AB\Gamma$, είναι η γωνία της διέδρου των α και β που περιέχει το Γ . Επίσης τα ορθογώνια τρίγωνα $O\Gamma A$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα, ως έχοντα την υποτείνουσα $O\Gamma$ κοινή και τις καθέτους ΓA και ΓB ίσες εξ υποθέσεως. Συνάγεται ότι το επίπεδο γ που περιέχει το Γ και την ευθεία XY σχηματίζει ίσες γωνίες με τα επίπεδα α και β . Ανάλογα δείχνουμε ότι αν το Γ είναι σε ένα από τα άλλα τεταρτημόρια που ορίζουν τα δύο επίπεδα περιέχεται είτε στο γ είτε στο επίπεδο δ που σχηματίζει ορθή γωνία με το γ , ο.ε.δ.

Στην προηγούμενη πρόταση βλέπουμε πάλι μιά ιδιότητα γωνιών του επιπέδου (Άσκηση 1.15.6) να μεταφέρεται στις διέδρες γωνίες. Τα επίπεδα που ορίζονται από την προηγούμενη πρόταση λέγονται **Διχοτομούντα επίπεδα της διέδρου**.



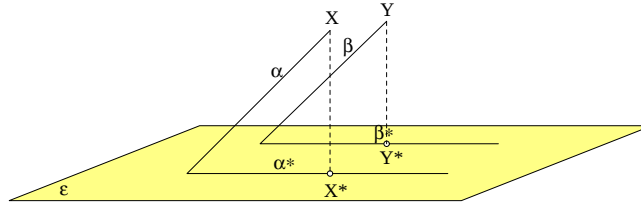
Σχήμα 628: Επίπεδο διερχόμενο από ευθεία κάθετο σε άλλο

Πρόταση 8.1.4 *Δοθείσης ευθείας α και επιπέδου ϵ υπάρχει ένα ακριβώς επίπεδο ζ περιέχον την ευθεία α και κάθετο στο ϵ .*

Απόδειξη: Φέρε από τυχόν σημείο X της α την κάθετο XY στο ϵ . Το επίπεδο ζ που περιέχει την α και την XY είναι κάθετο στο ϵ (Πρόταση 8.1.2). Κάθε άλλο επίπεδο ζ' που περιέχει την α και είναι κάθετο στο ϵ , θα τέμνει το ϵ κατά ευθεία β . Φέρε από το X την κάθετο XY^* στην β στο επίπεδο ζ' . Η XY^* θα είναι και κάθετος στο ϵ διότι εκτός της ευθείας β θα είναι και κάθετος σε μία ορθογώνιά της και περιεχόμενη στο α , λόγω της υποθέσεως ότι τα ζ' και ϵ τέμνονται κάθετα. Συνεπώς η XY^* θα συμπίπτει με την προηγούμενη XY και το ζ' θα

περιέχει την α και την XY , άρα θα ταυτίζεται με το ζ , ο.ε.δ.

Η ευθεία β που ορίζεται από την προηγούμενη πρόταση, ως τομή του μοναδικού επιπέδου ζ που περιέχει την ευθεία α και τέμνει κάθετα το επίπεδο ε , λέγεται **Προβολή της ευθείας α στο επίπεδο ε** .

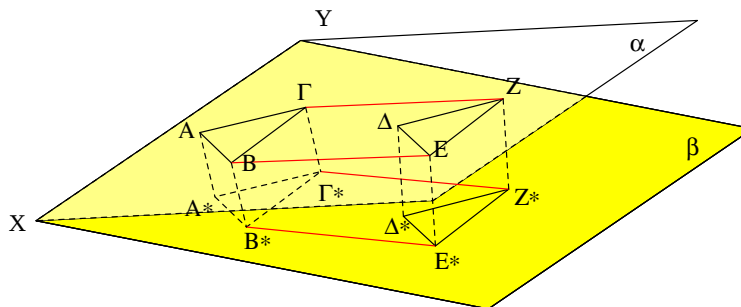


Σχήμα 629: Προβολή παραλλήλων σε παράλληλες

Πρόταση 8.1.5 Οι προβολές α^* , β^* δύο παραλλήλων ευθειών α και β στο επίπεδο ε ή ταυτίζονται ή είναι δύο σημεία ή είναι παράλληλες ευθείες του ε .

Απόδειξη: Αν οι α , β είναι κάθετες στο ε , τότε οι προβολές τους είναι δύο σημεία: τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν το ε . Αν το ε είναι κάθετο στο επίπεδό τους, αλλά όχι κάθετο στις α , β , τότε οι ευθείες προβάλλονται στην ίδια ευθεία του ε . Στην περίπτωση που δεν συμβαίνουν τα παραπάνω, παίρνοντας ένα σημείο X στην α και ένα Y στην β και προβάλλοντάς τα στο ε , ορίζουμε τα κάθετα στο ε επίπεδα που περιέχουν τις προβολές α^* και β^* των δύο ευθειών. Τα δύο αυτά επίπεδα, ως περιέχοντα δύο ζεύγη παραλλήλων ευθειών είναι παράλληλα (Πρόταση 7.2.2) άρα οι α^* , β^* κατά τις οποίες τέμνουν την ε θα είναι παράλληλες (Πρόταση 7.2.3), ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.1.1 Η προβολή ενός παραλληλογράμμου του επιπέδου ε σε ένα άλλο επίπεδο ζ που δεν είναι κάθετο στο ε είναι ένα παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 630: Προβολή ίσων τριγώνων σε ίσα

Πόρισμα 8.1.2 Δύο τμήματα $AB\Gamma$ και ΔEZ περιεχόμενα σε επίπεδο α που είναι ίσα και με παράλληλες πλευρές προβάλλονται σε επίπεδο β , μη-κάθετο στο α , σε δύο τμήματα $A^*B^*\Gamma^*$ και $\Delta^*E^*Z^*$ που είναι επίσης ίσα και με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα αφού το παραλληλόγραμμο λ.χ. $BΓΖΕ$ που ορίζεται από δύο ίσες και παράλληλες πλευρές των τριγώνων στο α θα προβάλλεται σε παραλληλόγραμμο $B^*Γ^*Ζ^*Ε^*$ ορίζοντας ίσες και παράλληλες πλευρές $B^*Γ^*$ και $Ε^*Ζ^*$, ο.ε.δ.

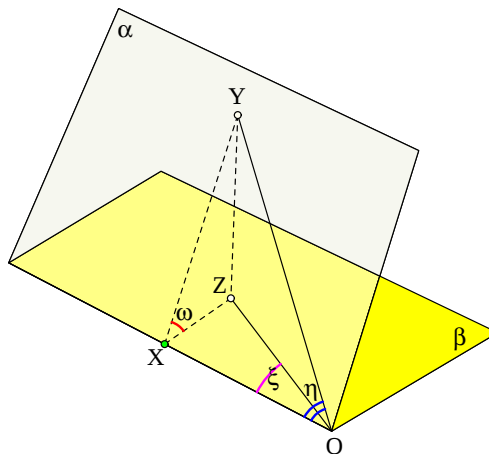
Πόρισμα 8.1.3 Δύο πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ... ΠΡΣΤ...$ περιεχόμενα σε επίπεδο α που είναι ίσα και με παράλληλες πλευρές προβάλλονται σε επίπεδο β , μη-κάθετο στο α , σε δύο πολύγωνα $Α^*Β^*Γ^*Δ^*... και Π^*Ρ^*Σ^*Τ^*...$ που είναι επίσης ίσα και με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα διαιρώντας τα δύο πολύγωνα σε τρίγωνα και προβάλλοντας, ο.ε.δ.

Άσκηση 8.1.1 Δείξε ότι η προβολή M^* του μέσου M ευθυγράμμου τμήματος $ΑΒ$ σε επίπεδο ε είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $Α^*Β^*$, όπου $Α^*$ και $Β^*$ οι προβολές των A και B στο επίπεδο.

Άσκηση 8.1.2 Εάν $Α^*Β^*Γ^*$ είναι η προβολή τριγώνου $ΑΒΓ$ στο επίπεδο ε , δείξε ότι η προβολή του κέντρου βάρους του $ΑΒΓ$ είναι το κέντρο βάρους του $Α^*Β^*Γ^*$.

Άσκηση 8.1.3 Εάν $Α^*Β^*Γ^*$ είναι η προβολή τριγώνου $ΑΒΓ$ στο επίπεδο ε , δείξε ότι η προβολή του κέντρου βάρους του $ΑΒΓ$ είναι το κέντρο βάρους του $Α^*Β^*Γ^*$.



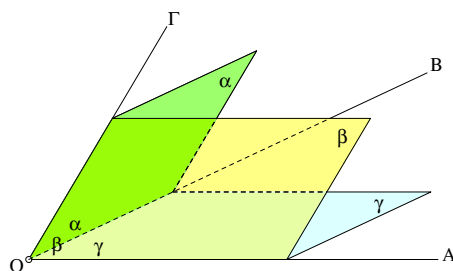
Σχήμα 631: Προβολή γωνίας

Άσκηση 8.1.4 Έστω $ΟΧ$ η ακμή της διέδρου και ω η γωνία των εδρών της α και β . Φέρε ευθεία $ΟΥ$ στο επίπεδο α και έστω $ΟΖ$ η προβολή της στο επίπεδο β . Δείξε ότι η γωνία $\eta = |\angle XOY|$ και η προβολή της στο β : $\xi = |\angle XOZ|$ ικανοποιούν την $\varepsilon\varphi(\xi) = \varepsilon\varphi(\eta) \sin(\omega)$.

Άσκηση 8.1.5 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του χώρου που απέχουν δοθείσα απόσταση δ από τις έδρες μιάς διέδρου γωνίας.

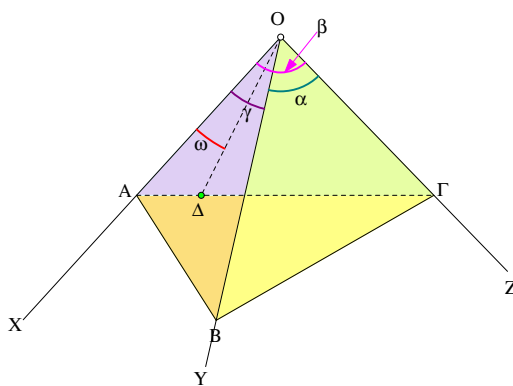
8.2 Τρίεδρες γωνίες

Τρεις ημιευθείες OA , OB , OG διερχόμενες από κοινό σημείο O και μη περιεχόμενες σε ένα επίπεδο ορίζουν, ανά δύο, επίπεδα και δημιουργούν ένα στερεό σχήμα που χωρίζει τον χώρο σε δύο μέρη. Από τα δύο αυτά μέρη το ένα είναι κυρτό (δηλαδή με κάθε ζεύγος σημείων X , Y που περιέχονται σε αυτό το μέρος και ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα XY περιέχεται στο ίδιο μέρος) και το άλλο είναι μη-κυρτό. Επιλέγοντας ένα εξ αυτών των μερών, συνήθως το κυρτό, ορίζεται μια **Τρίεδρος γωνία**. Το μέρος του χώρου που επιλέγεται λέγεται **Εσωτερικό της τριέδρου**. Οι ημιευθείες που ορίζουν την τριέδρο λέγονται **Ακμές** της τριέδρου και οι γωνίες $\alpha = \angle BOG$, $\beta = \angle GOA$, $\gamma = \angle AOB$ που σχηματίζονται μεταξύ αυτών λέγονται **Έδρες** της τριέδρου. Συχνά ονομάζουμε έδρες και τα επίπεδα στα οποία περιέχονται αυτές οι γωνίες. Οι



Σχήμα 632: Τρίεδρος γωνία

διέδρες γωνίες με ακμές τις ευθείες OA , OB και OG , λέγονται **Διέδρες της τριέδρου** και συμβολίζονται αντίστοιχα με $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Συχνά με το ίδιο γράμμα συμβολίζουμε και το μέτρο της γωνίας. Έτσι στις διάφορες προτάσεις παρακάτω τα α, β και γ μπορεί να συμβολίζουν τις έδρες ή και τα μέτρα των εδρών της τριέδρου. Ανάλογα τα $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ μπορεί να συμβολίζουν τις διέδρες ή και τα μέτρα αυτών, που λαμβάνονται μετρώντας τις γωνίες που αποτεμνουν οι διέδρες αυτές σε επίπεδα κάθετα στις ακμές τους. Δύο τρίεδρες $OAB\Gamma$ και $OA'B'\Gamma'$ λέγονται **Ίσες** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.



Σχήμα 633: Ανισότητες εδρών

Πρόταση 8.2.1 Σε κάθε τριέδρο $OAB\Gamma$ το άθροισμα δύο εδρών της είναι μεγαλύτερο της τρίτης.

Απόδειξη: Υπόθεσε ότι η $\beta = \angle XOZ$ είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις έδρες $\alpha = \angle YOZ$, $\beta = \angle XOZ$, $\gamma = \angle ZOX$. Θα δείξουμε ότι $\beta < \alpha + \gamma$. Πάρε Β και Γ επί των ακμών ΟΥ και ΟΖ αυθαίρετα. Κατόπιν σχημάτισε στο επίπεδο ΧΟΖ το τρίγωνο ΔΟΓ έτσι ώστε να είναι ίσο με το ΒΟΓ και προέκτεινε την ΔΓ μέχρι το σημείο τομής Α της με την τρίτη ακμή. Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΑΔΟ έχουν την ΑΟ κοινή και τις ΒΟ και ΔΟ ίσες. Επίσης από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|ΑΓ| = |ΑΔ| + |ΔΓ| < |ΑΒ| + |ΒΓ|.$$

Όμως $|\Delta \Gamma| = |B\Gamma| \Rightarrow |A\Delta| < |AB|$. Από το Πόρισμα 1.10.10 η γωνία

$$\omega = |\angle AOD| < |\angle AOB| \Leftrightarrow |\angle AOG| - |\angle BOG| < |\angle AOB|,$$

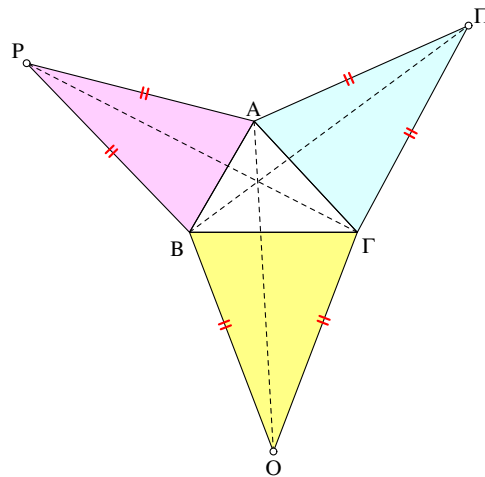
ο.ε.δ.

Πρόταση 8.2.2 Σε κάθε τριέδρου ΟΑΒΓ το άθροισμα των εδρών της είναι μικρότερο του 2π .

Απόδειξη: Θεώρησε τυχόντα σημεία Α, Β και Γ επί των ακμών αντίστοιχα ΟΧ, ΟΥ και ΟΖ της τριέδρου (σχήμα 633). Σχηματίζονται άλλες τρεις τριέδρου με κορυφές στα σημεία Α, Β και Γ. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση στις τρεις αυτές τριέδρους έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= (\pi - \angle OB\Gamma - \angle O\Gamma B) + (\pi - \angle OAG - \angle OGA) + (\pi - \angle OAB - \angle OBA) \\ &= 3\pi - (\angle OB\Gamma + \angle OBA) - (\angle O\Gamma B + \angle OGA) - (\angle OAG + \angle OAB) \\ &< 3\pi - (\angle AB\Gamma + \angle B\Gamma A + \angle GAB) \\ &= 3\pi - \pi = 2\pi, \end{aligned}$$

ο.ε.δ.



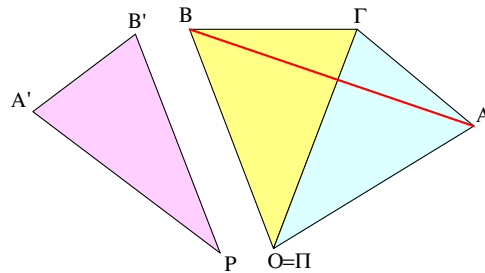
Σχήμα 634: Ανάπτυγμα τριέδρου

Παίρνοντας ίσα ευθύγραμμα τμήματα $|OA| = |OB| = |OG| = \delta$ επί των ακμών αντίστοιχα ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ σχηματίζουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο μαζί με το μήκος δ , περιγράφει πλήρως την τριέδρου και μάλιστα με την βοήθεια ενός επιπέδου σχήματος που λέγεται **Ανάπτυγμα τριέδρου**. Το σχήμα αυτό προκύπτει κόβοντας την τριέδρου κατά μήκος των

ακμών της και περιστρέφοντας τα ισοσκελή τρίγωνα περί τις βάσεις τους, που είναι οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, έως ότου τα επίπεδά των ισοσκελών συμπίσουν με αυτό του $AB\Gamma$. Το σχήμα (634) που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή τριέδρου από χαρτί. Αρκεί να περιστρέψουμε, αντίστροφα προς την προηγούμενη φορά, τα ισοσκελή τρίγωνα περί τις βάσεις τους, έως ότου οι τρεις κορυφές τους συμπίσουν στο ίδιο σημείο του χώρου O , που ορίζει τότε την κορυφή της τριέδρου. Οι επόμενες δύο προτάσεις δείχνουν ότι οι ανισότητες των δύο προηγούμενων προτάσεων είναι και ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι μιά τέτοια διαδικασία οδηγεί πάντοτε σε τριέδρο.

Λήμμα 8.2.1 *Δοθέντων τριών ισοσκελών τριγώνων με ίσα σκέλη, των οποίων οι κορυφές λαμβανόμενες ανά δύο έχουν άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο της τρίτης, μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο, του οποίου οι πλευρές να συμπίουν με τις βάσεις των ισοσκελών.*

Απόδειξη: Έστω ότι τα τρία τρίγωνα με ίσα σκέλη είναι τα $OB\Gamma$, $\Pi\Gamma A$ και $PA'B'$. Τοποθετούμε δύο εξ αυτών λ.χ. τα δύο πρώτα έτσι ώστε οι γωνίες στις κορυφές τους να γίνουν εφεξής. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι



Σχήμα 635: Τριεδρική ανισότητα

$$|B\Gamma| + |\Gamma A| > |BA|.$$

Τα τρίγωνα PAB και $OA'B'$ είναι ισοσκελή με το ίδιο μήκος σκέλους και εξ υποθέσεως έχουμε ότι οι γωνίες τους ικανοποιούν την

$$|A'PB'| < |BO\Pi|.$$

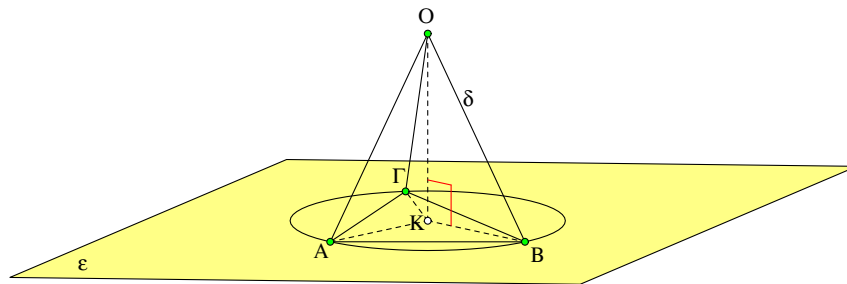
Από την Πρόταση 1.10.5 συνάγεται ότι

$$|A'B'| < |AB| < |B\Gamma| + |\Gamma A|,$$

συνεπώς ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα και κατασκευάζεται τρίγωνο με πλευρές τις βάσεις των ισοσκελών (Πρόταση 2.3), ο.ε.δ.

Πρόταση 8.2.3 *Γιά κάθε τριάδα γωνιών α, β και γ με $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ και τέτοια ώστε η μεγαλύτερη εξ αυτών να είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων, υπάρχει τριέδρος με έδρες τις τρεις αυτές γωνίες.*

Απόδειξη: Κατασκεύασε ισοσκελή τρίγωνα με γωνία στην κορυφή αντίστοιχα α, β και γ και τα σκέλη τους όλα ίσα με αυθαίρετο θετικό αριθμό δ . Οι υποθέσεις για τις γωνίες συνεπάγονται, κατά το προηγούμενο λήμμα, ότι οι βάσεις αυτών των ισοσκελών αποτελούν

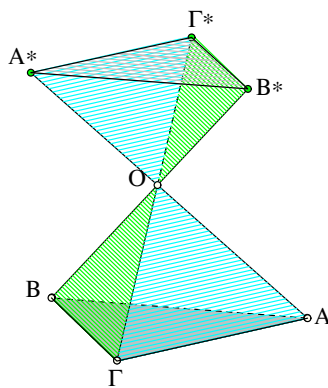


Σχήμα 636: Κατασκευή τριέδρου

πλευρές τριγώνου ΒΓΑ. Θεώρησε τον περιγεγραμμένο κύκλο αυτού του τριγώνου και φέρε την κάθετο στο κέντρο του Κ. Επί της κάθετου δε πάρε ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ μήκους

$$\kappa = |KO| = \sqrt{\delta^2 - \rho^2},$$

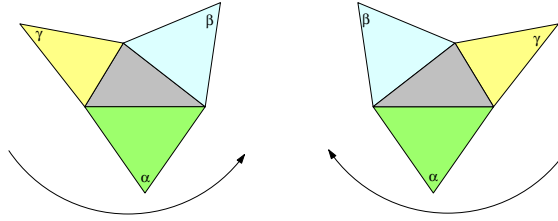
όπου ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Από το πυθαγόρειο θεώρημα συνάγεται ότι οι $|OA| = |OB| = |OG| = \delta$ και τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ έχουν τα ίδια μήκη σκελών και τις βάσεις αντίστοιχα ίσες με αυτές των αρχικών ισοσκελών τριγώνων, άρα είναι ίσα με αυτά και στο Ο σχηματίζεται τριέδρος με τις δοθείσες γωνίες. Το ότι το σημείο Ο είναι εκτός του επιπέδου ε του τριγώνου ΑΒΓ εξασφαλίζει η υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$, από την οποία προκύπτει ότι $\delta > \rho$. Πράγματι αν το Ο συνέπιπτε με το Κ, δηλαδή ήταν $\delta = \rho$, τότε θα είχαμε $\alpha + \beta + \gamma = |AKB| + |BKT| + |ΓΚΑ| = 2\pi$ αντίθετα με την υπόθεση. Επίσης αν ήταν $\delta < \rho$, τότε η γωνία ΑΟΒ θα ήταν στο επίπεδο ε του τριγώνου ΑΒΓ και μικρότερη της ΑΚΒ, διότι το ισοσκελές ΑΟΒ θα ήταν εντός του ισοσκελούς ΑΚΒ (Πρόταση 1.10.2). Το ανάλογο θα ίσχυε και για τις άλλες γωνίες ΒΟΓ και ΓΟΑ. Συνεπώς το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma = |BOΓ| + |ΓΟΒ| + |ΑΟΓ| < |BKT| + |ΓΚΑ| + |AKB| = 2\pi$, πάλι αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.



Σχήμα 637: Κατά κορυφήν τριέδρες

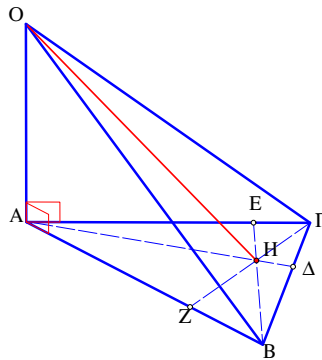
Σχόλιο Η τελευταία πρόταση συνεπάγεται ότι μία τριέδρος γωνία καθορίζεται πλήρως από τις έδρες της. Δεν θα προχωρήσω στις λεπτομέρειες της απόδειξης αυτής της ιδιότητας. Θα σημειώσω ωστόσο ότι η ισότητα τριέδρων, όπως την ορίσαμε, δεν είναι στο χώρο ταυτόσημη με την δυνατότητα τοποθέτησης της μιάς τριέδρου πάνω στην άλλη, ώστε να συμπίσουν. Εάν γίνεται το τελευταίο, τότε βέβαια οι τριέδρες είναι ίσες. Η ισότητά μας όμως περιλαμβάνει

και άλλη μία περίπτωση που δεν είναι δυνατή η ταύτιση. Αυτή είναι η περίπτωση των *κατά κορυφήν* τριέδρων. Εδώ (σχήμα-637) οι δύο τριέδρες $OAB\Gamma$ και $OA^*B^*\Gamma^*$ έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες. Ωστόσο δεν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν η μία πάνω στην άλλη ώστε να συμπίσουν. Τούτο διότι διαφέρουν οι προσανατολισμοί τους. Οι δύο τριέδρες προκύπτουν από τρία ισοσκελή μέσω της προηγούμενης πρότασης αλλά τοποθετημένα έτσι ώστε τα βασικά τρίγωνα να έχουν διαφορετικό προσανατολισμό.



Σχήμα 638: Αντίθετος προσανατολισμός τριέδρων

Πρόταση 8.2.4 Για κάθε τριέδρο, τα τρία επίπεδα που διέρχονται από μία ακμή και είναι κάθετα στην απέναντι της ακμής έδρα τέμνονται κατά ευθεία.



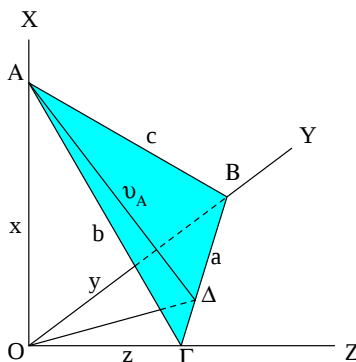
Σχήμα 639: Ύψη τριέδρου

Απόδειξη: ([Gla20, σ. 69]) Θεώρησε ένα επίπεδο κάθετο σε μία ακμή της τριέδρου, λ.χ. την OA , που τέμνει την τριέδρο κατά το τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεώρησε και τα ύψη AD , BE και ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$. Τα ύψη αυτά τέμνονται στο ορθόκεντρο H του τριγώνου και η ευθεία OH συμπίπτει με την αναφερόμενη τομή των τριών επιπέδων. Πράγματι, η BE είναι κάθετη στην $A\Gamma$ και ασύμβατα κάθετη στην OA , άρα και κάθετη στο επίπεδό τους που είναι η έδρα OAG (Πρόταση 7.5.7). Άρα το επίπεδο OBE είναι το διερχόμενο από την ακμή OB και κάθετο στην απέναντι έδρα OAG . Παρόμοια το επίπεδο OGZ είναι το διερχόμενο από την ακμή OG και κάθετο στην απέναντι έδρα OAB . Τέλος, η $B\Gamma$ είναι κάθετη στην AD και ασύμβατα κάθετη στην OA , άρα είναι κάθετη στο επίπεδό τους OAH και συνεπώς το επίπεδο BGO που διέρχεται από την $B\Gamma$ είναι και αυτό κάθετο στο OAH (Πρόταση 8.1.2), ο.ε.δ.

Άσκηση 8.2.1 Δείξε ότι τα τρία διχοτομούντα επίπεδα των διέδρων μιάς τριέδρου τέμνονται κατά ευθεία ε , τα σημεία της οποίας ισαπέχουν από τις έδρες της τριέδρου.

Άσκηση 8.2.2 Δίδεται τρισορθογώνια τριέδρος $OXYZ$ (και οι τρεις έδρες της ορθές) και σημεία A, B, Γ στις ακμές της OX , OY και OZ αντίστοιχα, δείξε ότι γιά τα εμβαδά των τριγώνων ισχύει

$$\epsilon(OA\Gamma)^2 + \epsilon(OBA)^2 + \epsilon(O\Gamma B)^2 = \epsilon(AB\Gamma)^2.$$



Σχήμα 640: Είδος Πυθαγορείου θεωρήματος γιά εμβαδά

Υπόδειξη: ([Fou05, σ. 102], [M52, σελ. 967]) Με τους συμβολισμούς του σχήματος 640:

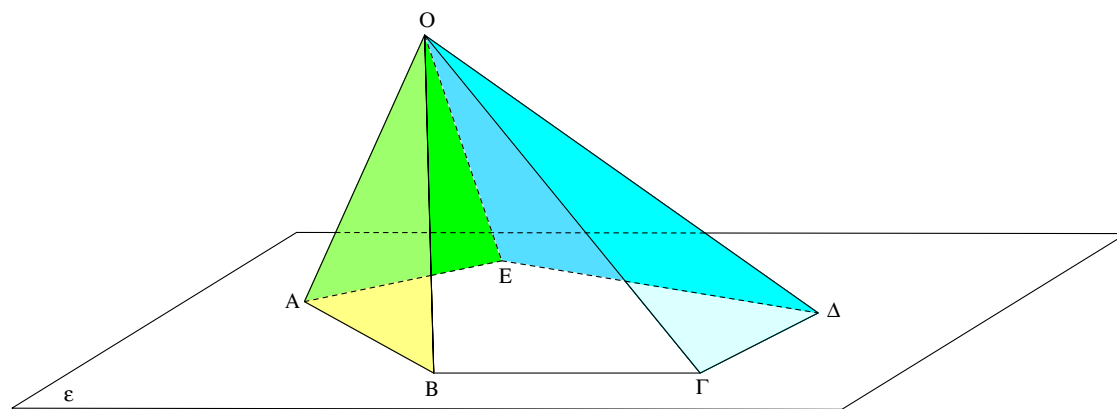
$$\begin{aligned} 4\epsilon(AB\Gamma)^2 &= a^2 \cdot v_A^2 \\ &= a^2 \cdot (x^2 + |O\Delta|^2) \\ &= a^2 \cdot |O\Delta|^2 + (y^2 + z^2) \cdot x^2 \\ &= 4\epsilon(OB\Gamma)^2 + (y^2 \cdot x^2) + (z^2 \cdot x^2) \\ &= 4\epsilon(OB\Gamma)^2 + 4\epsilon(OAB)^2 + 4\epsilon(OA\Gamma)^2. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το ότι και η $O\Delta$ είναι κάθετος στην $B\Gamma$ (ύψος του τριγώνου $OB\Gamma$), διότι η $B\Gamma$ είναι κάθετος στο ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$ και ασύμβατα κάθετος στην OA , άρα (ασύμβατα) κάθετος και σε κάθε ευθεία του επιπέδου OAD , ο.ε.δ.

Άσκηση 8.2.3 Η μία διέδρος τριέδρου στερεάς γωνίας είναι ορθή και οι προσκείμενες έδρες είναι οξείες μέτρου α και β . Να υπολογισθεί η τρίτη έδρα της τριέδρου.

8.3 Πυραμίδες, πολυεδρικές γωνίες

Δοθέντος πολυγώνου $ΑΒΓΔ...$ περιεχομένου σε επίπεδο ϵ και σημείου $Ο$ εκτός του επιπέδου αυτού, ονομάζουμε **Πυραμίδα** το στερεό σχήμα που δημιουργείται ενώνοντας το σημείο $Ο$ με τις κορυφές του πολυγώνου. Οι πλευρές του πολυγώνου καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $ΟΑ$, $ΟΒ$, ... λέγονται **Ακμές της πυραμίδας**. Οι ακμές $ΟΑ$, $ΟΒ$, ... λέγονται συχνά και **Παράπλευρες ακμές** της πυραμίδας. Το πολύγωνο, λέγεται **Βάση της πυραμίδας**. Όταν το πολύγωνο είναι κυρτό η πυραμίδα λέγεται **Κυρτή πυραμίδα**. Συχνά με τον όρο **βάση πυραμίδας** εννοούμε και το επίπεδο ϵ που περιέχει το πολύγωνο. Στα



Σχήμα 641: Πυραμίδα

επόμενα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με κυρτές πυραμίδες. Το σημείο $Ο$ λέγεται **Κορυφή της πυραμίδας**, οι γωνίες $ΑΟΒ$, $ΒΟΓ$, $ΓΟΔ$, ... λέγονται **Παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας και οι τριέδρες γωνίες που σχηματίζονται στις κορυφές του πολυγώνου λέγονται **Τριέδρες της πυραμίδας**.

Στο σημείο $Ο$ (κορυφή της πυραμίδας) ορίζεται κάτι ανάλογο της τριέδρου, που ονομάζεται **Πολυεδρική γωνία** ή **Στερεά γωνία**. Οι γωνίες $ΑΟΒ$, $ΒΟΓ$, ... (και τα επίπεδα που τις περιέχουν) λέγονται **Έδρες της πολυεδρικής γωνίας** και οι ημιευθείες που τις ορίζουν λέγονται **Ακμές της πολυεδρικής γωνίας**. Η πολυεδρική γωνία λέγεται **Κυρτή** όταν το αντίστοιχο πολύγωνο που προκύπτει από επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της είναι κυρτό. Δύο πολυεδρικές $ΟΑΒΓ...$, $Ο^*Α^*Β^*Γ^*...$ γωνίες λέγονται **Ίσες**, αντιστοιχες έδρες τους είναι ίσες και αντιστοιχες διέδρες είναι επίσης ίσες. Οι πυραμίδες δημιουργούνται από μία πολυεδρική γωνία και ένα επίπεδο ϵ που τέμνει όλες τις ακμές της. Κρατώντας σταθερή την πολυεδρική γωνία και μεταβάλλοντας το επίπεδο ϵ δημιουργούμε άπειρες πυραμίδες που έχουν την ίδια πολυεδρική γωνία και οι βάσεις τους είναι τα πολύγωνα που ορίζονται ως τομές της πολυεδρικής γωνίας και του επιπέδου ϵ . Δύο πυραμίδες $ΟΑΒΓ...$ και $Ο^*Α^*Β^*Γ^*...$ λέγονται **Ίσες** όταν οι αντιστοιχες έδρες τους είναι ίσες και οι αντιστοιχες διέδρες τους είναι επίσης ίσες.

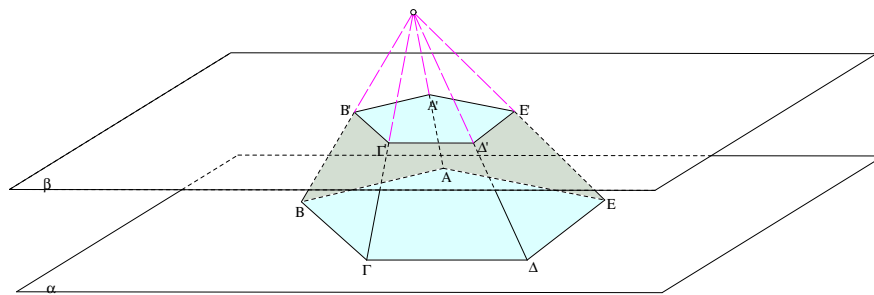
Πρόταση 8.3.1 *Γιά κάθε κυρτή πολυεδρική γωνία το άθροισμα των μέτρων των εδρών της είναι μικρότερο του 2π .*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι στην ουσία η ίδια με αυτήν της Πρότασης 8.2.2. Έστω ότι η κυρτή πολυεδρική γωνία έχει n έδρες. Θεωρούμε ένα επίπεδο τέμνον την πολυεδρική και ορίζον μία πυραμίδα $ΟΑΒΓΔ...$. Τις γωνίες στην κορυφή $Ο$ της πυραμίδας (έδρες) γράφουμε

συναρτήσει των άλλων γωνιών:

$$\begin{aligned}
 |AOB| &= \pi - |BAO| - |ABO|, \\
 |BO\Gamma| &= \pi - |\Gamma BO| - |B\Gamma O|, \\
 |\Gamma O\Delta| &= \pi - |\Delta\Gamma O| - |\Gamma\Delta O|, \\
 &\dots \Rightarrow \\
 |AOB| + |BO\Gamma| + |\Gamma O\Delta| + \dots &= (\pi - |BAO| - |ABO|) + (\pi - |\Gamma BO| - |B\Gamma O|) + \dots, \\
 &= (\pi - |ABO| - |\Gamma BO|) + (\pi - |B\Gamma O| - |\Delta\Gamma O|) + \dots \\
 &< (\pi - |AB\Gamma|) + (\pi - |B\Gamma\Delta|) + \dots \\
 &= \nu \cdot \pi - (|AB\Gamma| + |B\Gamma\Delta| + |\Gamma\Delta E| + \dots) \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.2.1 στις τριέδρους της πυραμίδας. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι το άθροισμα των μέτρων των γωνιών κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι $(\nu - 2)\pi$ (Πρόταση 2.11.1), ο.ε.δ. Το σχήμα που προκύπτει από μιά πολυεδρική γωνία και ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της καθώς και ένα άλλο παράλληλο προς το προηγούμενο επίπεδο λέγεται **Κόλουρη πυραμίδα**.

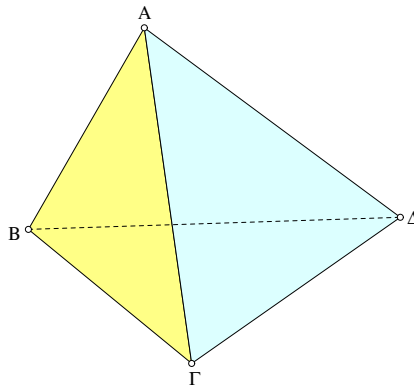


Σχήμα 642: Κόλουρη πυραμίδα

Πρόταση 8.3.2 Σε κάθε κόλουρη πυραμίδα τα πολύγωνα που ορίζονται από τις παράλληλες έδρες της είναι όμοια.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της πρότασης του Θαλή στο χώρο (Πόρισμα 7.7.1), ο.ε.δ.

8.4 Τετράεδρα



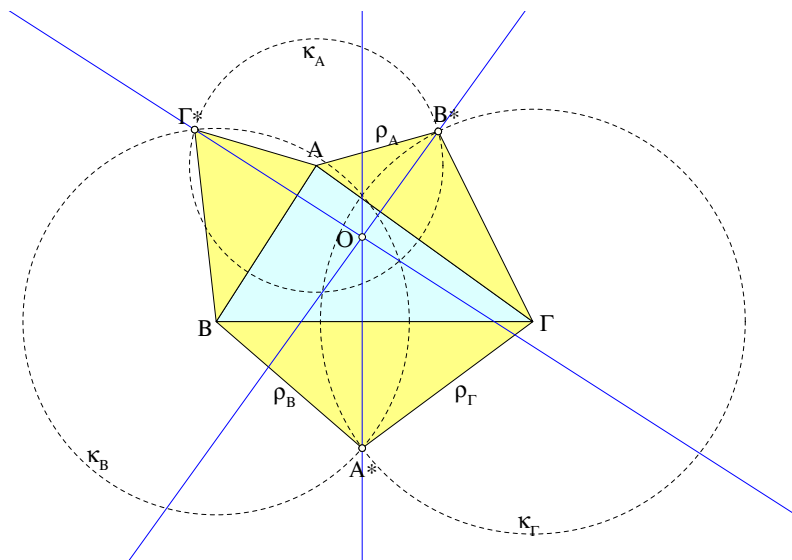
Σχήμα 643: Τετράεδρο

Τις πυραμίδες με τριγωνικές βάσεις ονομάζουμε **Τετράεδρα**. Το τετράεδρο στον χώρο είναι το ανάλογο του τριγώνου στο επίπεδο. Κάθε τετράδα σημείων μη-περιεχομένων σε ένα επίπεδο ορίζει ένα τετράεδρο που έχει τα σημεία αυτά ως κορυφές.

Πρόταση 8.4.1 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία A^*, B^*, Γ^* στο επίπεδό του ε , έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$|A^*B| = |B\Gamma^*|, \quad |\Gamma^*A| = |AB^*|, \quad |B^*\Gamma| = |\Gamma A^*|.$$

Τότε οι κάθετες από τα A^*, B^*, Γ^* αντίστοιχα στις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ συντρέχουν σε σημείο O . Επίσης αν τα τρίγωνα $A^*B\Gamma, AB^*\Gamma, AB\Gamma^*$ περιστραφούν αντιστοίχως περί τις $B\Gamma, \Gamma A, AB$ έως ότου οι κορυφές τους A^*, B^*, Γ^* βρεθούν στην κάθετο η του ε στο σημείο O , τότε τα A^*, B^*, Γ^* θα συμπέσουν με σημείο Δ της ζ και θα σχηματισθεί τετράεδρο.



Σχήμα 644: Τετράεδρου κατασκευή

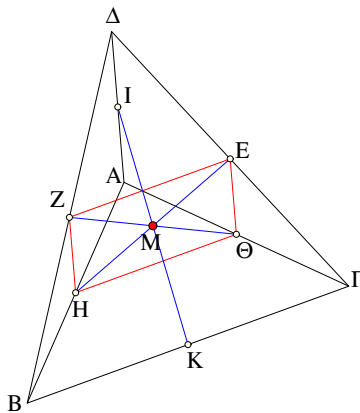
Απόδειξη: Στο σχήμα 644 το επίπεδο ε είναι αυτό του χαρτιού και η ζ είναι η κάθετη στο ε στο σημείο O . Ότι οι ευθείες που αναφέρονται διέρχονται από κοινό σημείο O είναι συνέπεια της Άσκησης 3.4.9. Μία άλλη απόδειξη προκύπτει επίσης από το γεγονός ότι οι τρεις αυτές κάθετες ευθείες συμπίπτουν με τους ριζικούς άξονες των κύκλων $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_\Gamma$ με κέντρα στις κορυφές του τριγώνου και ακτίνες τις πλευρές των άλλων τριγώνων που διέρχονται από αυτές. Το O είναι το ριζικό κέντρο αυτών των κύκλων (Θεώρημα 4.3.1). Η ιδιότητα του ριζικού κέντρου, να έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους τρεις κύκλους, χρησιμεύει στον προσδιορισμό του Δ επί της ευθείας ζ . Ας συμβολίσουμε με $\rho_A, \rho_B, \rho_\Gamma$ τις ακτίνες αυτών των κύκλων. Τότε η ιδιότητα του ριζικού κέντρου συνεπάγεται ότι

$$\rho_A^2 - |OA|^2 = \rho_B^2 - |OB|^2 = \rho_\Gamma^2 - |OG|^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα και μία κάθετο αντίστοιχα τις $(\rho_A, |OA|)$, $(\rho_B, |OB|)$, $(\rho_\Gamma, |OG|)$, έχουν τις άλλες κάθετες ίσες, άρα κατά την στροφή των εξωτερικών τριγώνων περί τις πλευρές του $AB\Gamma$ οι κορυφές θα συμπέσουν σε σημείο Δ της ζ , ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Το τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζεται κατά την προηγούμενη πρόταση θα έχει το O ως προβολή της κορυφής του Δ επί του επιπέδου ε της έδρας $AB\Gamma$, επομένως το $|O\Delta|$ θα είναι το ύψος του τετραπλεύρου από το Δ και αυτό θα εκφράζεται με την δύναμη του O ως προς έναν, οποιονδήποτε, από τους τρεις κύκλους ($|O\Delta|^2 = \rho_A^2 - |OA|^2$).

Σχόλιο-2 Ισχύει και το αντίστροφο της Πρότασης 8.4.1. Εάν δοθεί τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ και προβάλλουμε την κορυφή Δ στο επίπεδο ε του $AB\Gamma$, η προβολή O θα έχει τις ιδιότητες που αναφέρονται στην πρόταση. Έτσι οι κάθετες από το O προς τις πλευρές του $AB\Gamma$ θα περιέχουν τις κορυφές A^*, B^*, Γ^* , που θα προκύψουν όταν κόψουμε τις παράπλευρες έδρες κατά μήκος των ακμών $\Delta A, \Delta B, \Delta \Gamma$ και τις ξεδιπλώσουμε στο επίπεδο ε περιστρέφοντάς τις αντίστοιχα περί τις πλευρές του $AB\Gamma$. Θα δημιουργηθεί τότε επίπεδο σχήμα παρόμοιο του 644.

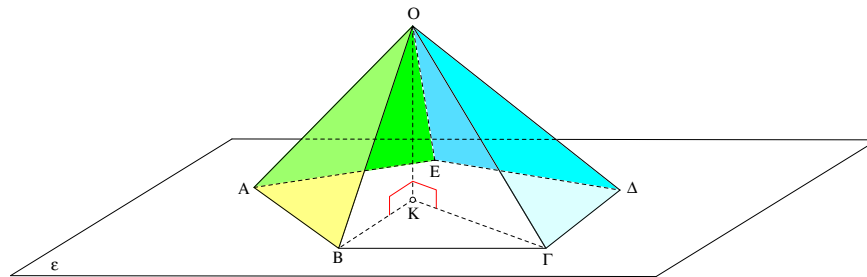


Σχήμα 645: Ενώνοντας τα μέσα απέναντι ακμών

Άσκηση 8.4.1 Δείξε ότι τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι ακμών ενός τετραέδρου διέρχονται από κοινό σημείο M που τα διχοτομεί.

8.5 Κανονικές πυραμίδες

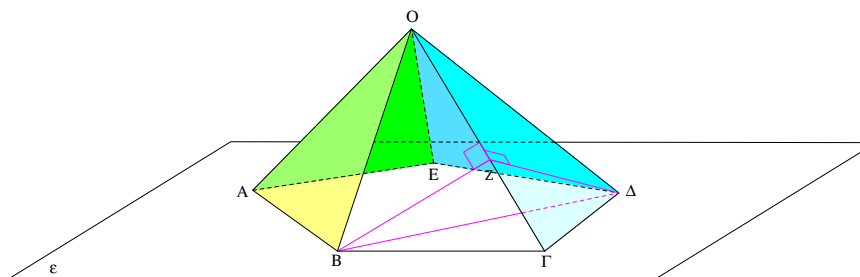
Ονομάζουμε **Κανονική** μία πυραμίδα της οποίας (α:) η βάση είναι ένα κανονικό πολύγωνο και (β:) η ευθεία KO που ενώνει το κέντρο K του κανονικού πολυγώνου με την κορυφή της πυραμίδας είναι κάθετη στο επίπεδο ϵ της βάσης.



Σχήμα 646: Κανονική πυραμίδα

Πρόταση 8.5.1 Σε κάθε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσες και οι παράπλευρες διέδρες είναι ίσες. Και αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες είναι ίσες μεταξύ τους και οι παράπλευρες διέδρες είναι επίσης ίσες μεταξύ τους, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.

Απόδειξη: Κατ' αρχήν τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται από την κάθετο OK στο επίπεδο ϵ της βάσης και τις ακτίνες $KA, KB, KG, \dots$ προς τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου (σχήμα 646) είναι ίσα, ως έχοντα κοινή την κάθετο OK και τις ακτίνες $KA, KB, KG, \dots$ ίσες. Από αυτό έπεται ότι και τα τρίγωνα $OAB, OBG, OGD, \dots$ είναι ισοσκελή και ίσα μεταξύ τους, ως έχοντα αντίστοιχες πλευρές ίσες (ΠΠΠ-κριτήριο). Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει η ισότητα των εδρών στο O . Γιά την ισότητα των παράπλευρων διέδρων χρειαζόμαστε τις γωνίες που σχηματίζονται από επίπεδα κάθετα στις παράπλευρες ακμές. Ένα τέτοιο επίπεδο λ.χ. κάθετο στην ακμή OF προκύπτει φέρνοντας τα ύψη των τριγώνων



Σχήμα 647: Παράπλευρη διέδρος κανονικής πυραμίδας

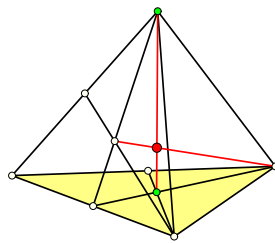
BOF και $FO\Delta$ από τα B και Δ αντίστοιχα. Λόγω της ισότητας αυτών των τριγώνων τα ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο Z της OF και ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ακμή OF (Παράγραφος 7.5). Από τον τρόπο κατασκευής τους όμως όλα τα τρίγωνα όπως το $BZ\Delta$ που κατασκευάζονται με ανάλογο τρόπο και γιά τις άλλες ακμές $OD, OE, \dots$ είναι ίσα μεταξύ τους, άρα και οι γωνίες που αντιστοιχούν στην $BZ\Delta$ είναι ίσες μεταξύ τους. Οι γωνίες αυτές όμως είναι ακριβώς οι γωνίες των διέδρων, οι οποίες επομένως θα είναι ίσες μεταξύ τους. Γιά το αντίστροφο θεωρήσε το ίδιο σχήμα. Από την ισότητα των εδρών συνάγεται η ύπαρξη του

Οι τιμές για $\kappa=7,8,\dots$ κ.τ.λ., λόγω του φθίνοντος της ακολουθίας, θα είναι μικρότερες του 3 και επειδή πρέπει ταυτόχρονα $\nu \geq 3$ και $\nu < \frac{2\kappa}{\kappa-2}$ σε αυτές τις περιπτώσεις δεν θα υπάρχει ν που να τις ικανοποιεί. Το κ λοιπόν μπορεί να έχει μόνο τις τιμές 3, 4 και 5 και για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις τα επιτρεπόμενα $\nu < \frac{2\kappa}{\kappa-2}$ είναι τα αναγραφόμενα στην στήλη κάτω από την αντίστοιχη τιμή του κ , ο.ε.δ.

Σχόλιο Η απλή αυτή πρόταση είναι η αιτία του δραματικού περιορισμού των λεγομένων *κανονικών πολυέδρων* που εξετάζονται στην επόμενη παράγραφο. Η πρόταση λέει ότι αν θέλει κανείς να φτιάξει πολυεδρική γωνία της οποίας οι έδρες να είναι κανονικά πολύγωνα, τότε υπάρχουν 5 και μόνον δυνατότητες:

1. Τριεδρικές γωνίες ($\kappa=3$): Υπάρχουν τρεις και μόνο δυνατότητες κανονικών τριεδρικών γωνιών. Αυτές που έχουν τις τρεις έδρες τους ισόπλευρα τρίγωνα ($\nu=3$), αυτές που έχουν τις τρεις έδρες τους τετράγωνα ($\nu=4$) και αυτές που έχουν τις τρεις έδρες τους κανονικά πεντάγωνα ($\nu=5$).
2. Τετραεδρικές γωνίες ($\kappa=4$): Υπάρχει μία και μόνο κανονική τετραεδρική γωνία, που έχει έδρες ισόπλευρα τρίγωνα ($\nu=3$).
3. Πενταεδρικές γωνίες ($\kappa=5$): Υπάρχει μία και μόνο κανονική πενταεδρική γωνία, που έχει έδρες ισόπλευρα τρίγωνα ($\nu=3$).

Άσκηση 8.5.1 Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο $B\Delta Z$ του σχήματος 648 έκφρασε το συνημίτονο της γωνίας της διέδρου συναρτήσει της γωνίας της έδρας τους, για κάθε μία από τις 5 δυνατές κανονικές πολυεδρικές γωνίες.



Σχήμα 649: Κέντροειδές τετραέδρου

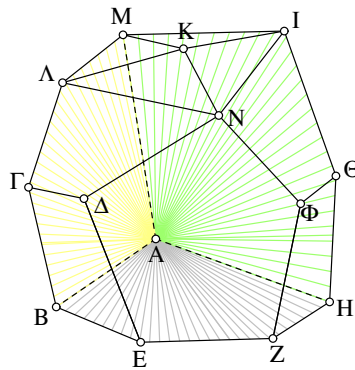
Άσκηση 8.5.2 Δείξε ότι σε κάθε τετραέδρο οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές του με τα κέντρα βάρους των απέναντι αυτών εδρών διέρχονται από κοινό σημείο.

Υπόδειξη: Εφάρμοσε την Άσκηση 5.14.3.

Οι ευθείες της προηγούμενης άσκησης λέγονται **Διάμεσοι** του τετραέδρου. Το σημείο τομής τους λέγεται **Κέντροειδές** του τετραέδρου.

Άσκηση 8.5.3 Δείξε ότι οι ευθείες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών του τετράεδρου διέρχονται από το κέντροειδές του.

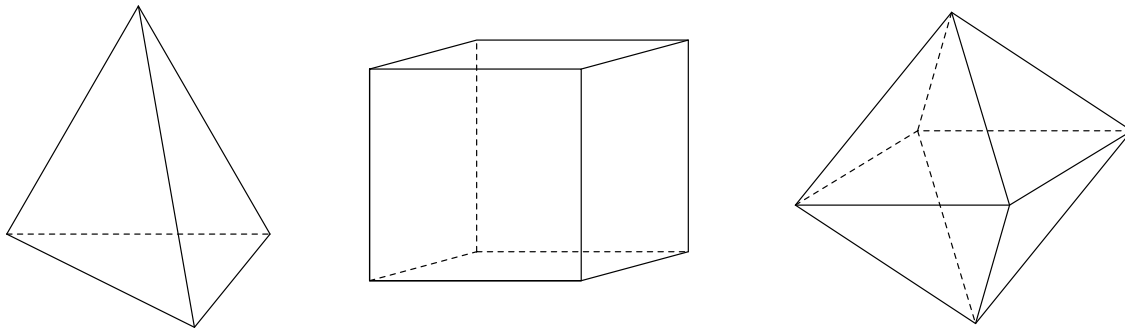
8.6 Πολύεδρα, Πλατωνικά σώματα



Σχήμα 650: Πολύεδρο

Ονομάζουμε **Πολύεδρο** ένα στερεό το οποίο περικλείεται από επίπεδα. Τα επίπεδα που περιορίζουν τον χώρο που καταλαμβάνει το στερεό λέγονται **Έδρες του πολυέδρου**. Οι ευθείες που ορίζονται ως τομές δύο εδρών του πολυέδρου λέγονται **Ακμές του πολυέδρου**. Συχνά ονομάζουμε έδρες και τα πολύγωνα που σχηματίζονται επί μιάς έδρας μέσω των ευθειών-τομών της με τις άλλες. Οι διέδρες γωνίες που σχηματίζονται στις ακμές του πολυέδρου λέγονται **Διέδρες του πολυέδρου**. Οι πολυεδρικές γωνίες που σχηματίζονται από τρεις ή περισσότερες έδρες που διέρχονται από κοινό σημείο λέγονται **Πολυεδρικές γωνίες του πολυέδρου**. Οι κορυφές των πολυεδρικών γωνιών λέγονται **Κορυφές του πολυέδρου**. Ένα πολύεδρο λέγεται **Κυρτό** όταν κάθε έδρα του αφήνει το πολυέδρου από την μιά μεριά του μόνο. Δύο πολύεδρα $AB\Gamma\dots$ και $A^*B^*\Gamma^*\dots$ λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.

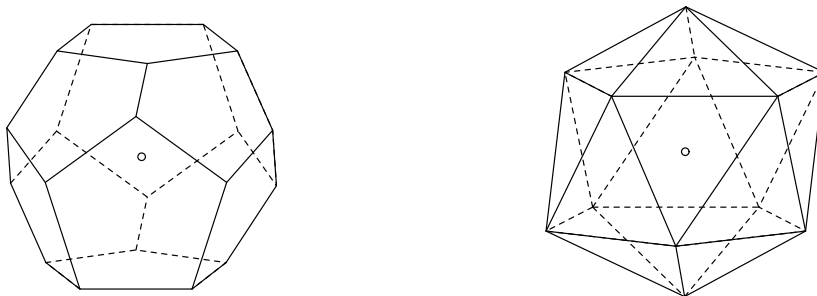
Κυρτά πολύεδρα είναι τα ανάλογα στον χώρο των κυρτών πολυγώνων του επιπέδου. Μιά σημαντική διαφορά από τα πολύγωνα είναι τα πολλά είδη γωνιών που συναντάμε στον χώρο: διέδρες, τριέδρες και γενικότερα πολυεδρικές γωνίες. Η πυραμίδα και η κόλουρη πυραμίδα που συναντήσαμε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο είναι από τα απλούστερα είδη κυρτών πολυέδρων. Άλλα είδη πολυέδρων είναι τα γνωστά: πρίσματα, παραλληλεπίπεδα, τετράεδρα, κύβοι, κτλ. που θα εξετάσουμε παρακάτω.



Σχήμα 651: Κανονικό τετράεδρο, κύβος και κανονικό οκτάεδρο

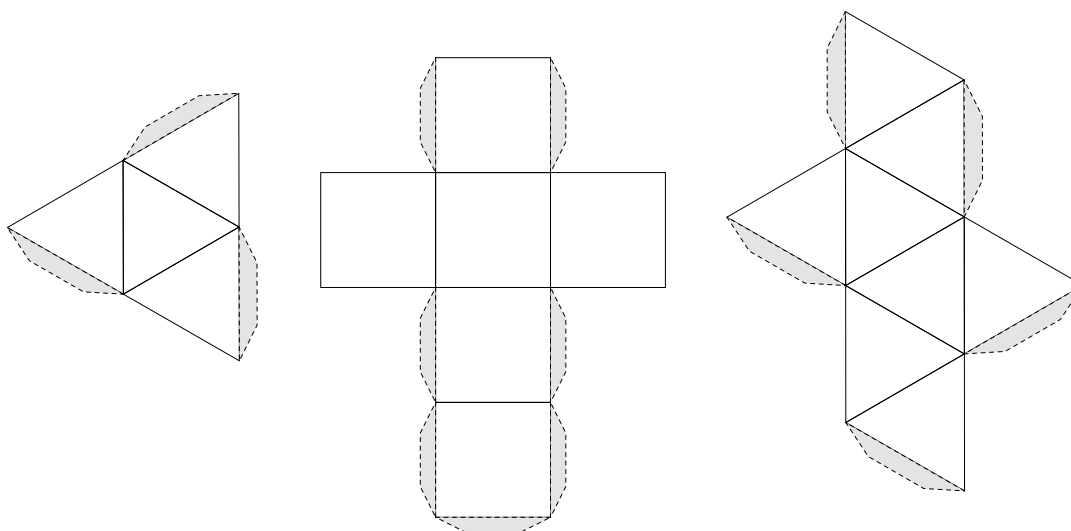
Μιά ιδιαίτερη κατηγορία πολυέδρων είναι τα **Κανονικά πολύεδρα**, τα αντίστοιχα στον χώρο των κανονικών πολυγώνων του επιπέδου. Αυτά ορίζονται ως τα πολύεδρα που έχουν

όλες τις έδρες τους ίσες με ένα κανονικό πολύγωνο και όλες τις διέδρες γωνίες τους ίσες μεταξύ τους. Ενώ στο επίπεδο υπάρχουν άπειρα κανονικά πολύγωνα, στο χώρο, τα αντίστοιχά τους, που είναι τα κανονικά πολυέδρα, υπάρχουν μόνο πέντε. Αυτά είναι τα πέντε **Πλατωνικά σώματα**: Το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος, και τα κανονικά οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο. Τα επόμενα σχήματα δίνουν εικόνες για την κατασκευή αυτών



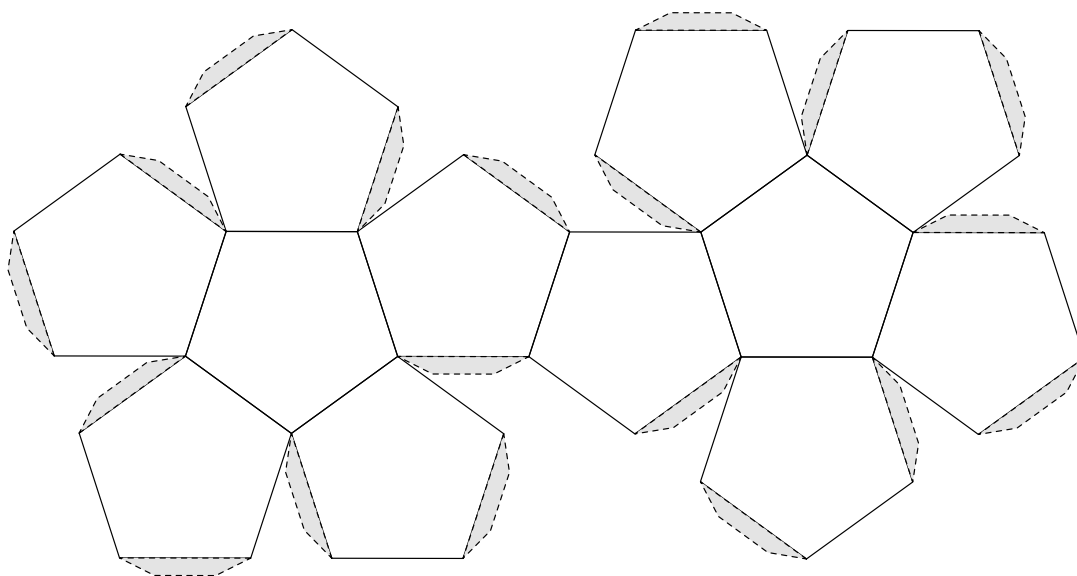
Σχήμα 652: Κανονικό δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο

των πολυέδρων από χαρτί. Αφού σχεδιασθούν τα σχήματα στο επιθυμητό μέγεθος πρέπει να διπλωθούν κατά μήκος των ακμών που είναι κοινές σε δύο από τα πολύγωνα. Οι ακμές που είναι μόνες τους πρέπει να συγκολληθούν κάθε μία με μία αντίστοιχη που έχει ένα βοηθητικό αυτί που θα αληφθεί με κόλλα. Για διευκόλυνση σχεδιάζονται και τα βοηθητικά αυτιά που πρέπει να αλειφθούν με κόλλα.



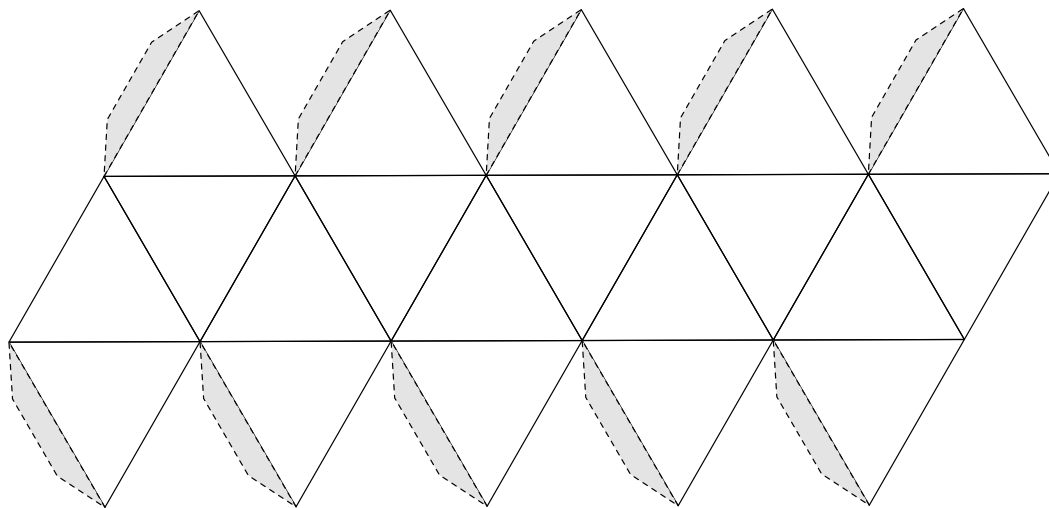
Σχήμα 653: Μοντέλα κανονικού τετράεδρου, κύβου και οκτάεδρου

Ο περιορισμός σε 5 των κανονικών πολυέδρων οφείλεται στον αντίστοιχο περιορισμό για κανονικές πολυεδρικές γωνίες (Πρόταση 8.5.2). Το ότι υπάρχουν αυτά τα πέντε πλατωνικά σώματα είναι σχετικά εύκολο ναδειχθεί. Το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος και το κανονικό οκτάεδρο κατασκευάζονται εύκολα, με την έννοια ότι αν δοθεί ένα ορισμένο μήκος δ , κατασκευάζεται το αντίστοιχο στερεό του οποίου όλες οι ακμές να έχουν μήκος δ . Για το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο η αντίστοιχη κατασκευή είναι πιο σύνθετη, μπορεί ωστόσο να στηριχθεί στα προτεινόμενα μοντέλα.



Σχήμα 654: Μοντέλο κανονικού δωδεκαέδρου

Η απόδειξη του ότι δεν υπάρχουν άλλα από τα 5 είναι και αυτή απλή και μπορεί να στηριχθεί στην προαναφερθείσα Πρόταση 8.5.2. Η απόδειξη θα μπορούσε να σκιαγραφηθεί ως εξής. Στην αρχή κατασκευάζουμε τα πέντε σώματα με μήκος ακμής δ . Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και κάποιο άλλο Σ' με μήκος ακμής δ , τότε μία πολυεδρική γωνία B του Σ' θα πρέπει να συμπίπτει με μία από τις 5 δυνατότητες της προαναφερθείσας πρότασης. Έστω ότι συμπίπτει με την πολυεδρική γωνία A ενός από τα 5 συγκεκριμένα σώματα, πες του Σ . Τότε προσαρμό-

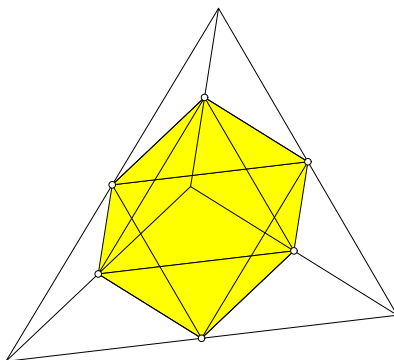


Σχήμα 655: Μοντέλο κανονικού εικοσαέδρου

ζουμε το Σ' πάνω στο Σ , έτσι ώστε η πολυεδρική γωνία B να συμπίπτει με την A . Κατόπιν θα συμπίψουν και οι μη-παράπλευρες διέδροι των A και B λόγω της ισότητας των διεδρών γωνιών (Άσκηση 8.5.1). Προχωράμε κατόπιν επαγωγικά ως προς το πλήθος των εδρών του

Σ για τις οποίες έχουμε αποδείξει την σύμπτωση με αντίστοιχες του Σ' , μέχρι να δείξουμε την σύμπτωση όλων των εδρών του Σ με αντίστοιχες του Σ' .

Αν και η σκιαγράφηση της προηγούμενης απόδειξης μπορεί να συμπληρωθεί σε πλήρη απόδειξη, εν τούτοις δεν κρίνω σκόπιμο, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, να εμβαθύνω στις διάφορες λεπτομέρειες που απαιτούνται και αφορούν στην ισότητα πολυεδρικών γωνιών και την ομοιότητα πολυέδρων.



Σχήμα 656: Οκτάεδρο από τα μέσα τετραέδρου

Άσκηση 8.6.1 Δείξε ότι τα μέσα των ακμών κανονικού τετραέδρου ορίζουν τις κορυφές ενός κανονικού οκταέδρου.

Άσκηση 8.6.2 Δείξε ότι το μέτρο ω της διέδρου γωνίας ενός κανονικού τετραέδρου ικανοποιεί την εξίσωση $\sin(\omega) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 8.6.3 Δείξε ότι το μέτρο ω της διέδρου γωνίας ενός κανονικού οκταέδρου ικανοποιεί την εξίσωση $\eta\mu(\omega) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Άσκηση 8.6.4 Δείξε ότι το μέτρο ω της διέδρου γωνίας ενός πλατωνικού σώματος στο οποίο σε κάθε κορυφή συντρέχουν q ακμές και κάθε έδρα είναι κανονικό p -γωνο, ικανοποιεί τον τύπο

$$\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Υπόδειξη: Παραλλαγή της Άσκησης 8.5.1.

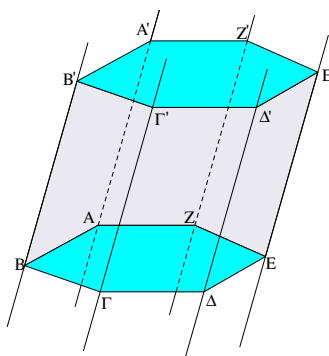
Άσκηση 8.6.5 Για κάθε ένα από τα Πλατωνικά σώματα να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών τετραέδρων, των οποίων οι κορυφές συμπίπτουν με κορυφές του σώματος.

Άσκηση 8.6.6 Δείξε ότι για τετράεδρα των οποίων οι απέναντι ακμές είναι ασύμβατα κάθετες, τα ύψη, δηλαδή οι ευθείες από μιά κορυφή που είναι κάθετες στην απέναντι έδρα, διέρχονται όλες από κοινό σημείο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την Πρόταση 8.2.4.

Άσκηση 8.6.7 Δείξε ότι αν σε τετράεδρο δύο ζεύγη απέναντι ακμών αποτελούνται από ασύμβατα κάθετες, τότε το ίδιο συμβαίνει και με το τρίτο ζεύγος απέναντι ακμών.

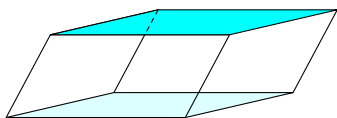
8.7 Πρίσματα



Σχήμα 657: Πρίσμα

Η εκτεινόμενη στο άπειρο επιφάνεια, αποτελούμενη από τις λωρίδες μεταξύ των παραλλήλων ευθειών (AA', BB') , $(BB', ΓΓ')$, ... λέγεται **Πρισματική επιφάνεια**. Οι διέδρες γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών λωρίδων ονομάζονται **Διέδρες** της πρισματικής επιφάνειας. Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας μία πρισματική επιφάνεια με δύο παράλληλα επίπεδα λέγεται **Πρίσμα**. Η απόσταση αυτών των επιπέδων λέγεται **Ύψος του πρίσματος**. Τα πολύγωνα που $ABΓΔ...$ και $A'B'Γ'Δ'...$ που ορίζονται από την τομή της πρισματικής επιφάνειας με τα παράλληλα επίπεδα είναι ίσα (Πόρισμα 7.3.2) και λέγονται **Βάσεις του πρίσματος**. Το πρίσμα λέγεται **Κυρτό** όταν το αντίστοιχο πολύγωνο της βάσης $ABΓΔ...$ είναι κυρτό. Τα ευθύγραμμα τμήματα AA' , BB' , $ΓΓ'$, ... λέγονται **Παράπλευρες ακμές** του πρίσματος. Κάθε λωρίδα της πρισματικής επιφάνειας τέμνεται από τα παράλληλα επίπεδα των βάσεων κατά παραλληλόγραμμο που ονομάζεται **Έδρα** του πρίσματος. Το πρίσμα λέγεται **Ορθό** όταν οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις του. Το πρίσμα λέγεται **Κανονικό** όταν είναι ορθό και το πολύγωνο $ABΓΔ...$ είναι κανονικό. Δύο πρίσματα λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.

Ένα από τα πιο απλά πρίσματα είναι το **Παραλληλεπίπεδο** στο οποίο οι βάσεις είναι παραλληλόγραμμο. Δύο κορυφές που δεν έχουν κοινές ακμές λέγονται **Απέναντι** κορυφές του παραλληλεπιπέδου. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν δύο απέναντι κορυφές λέγονται **Διαγώνιοι** του παραλληλεπιπέδου.

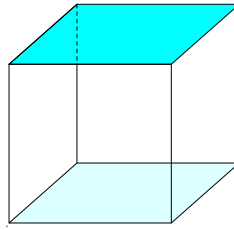


Σχήμα 658: Παραλληλεπίπεδο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Άσκηση 8.7.1 Δείξε ότι οι τέσσερις διαγώνιοι του παραλληλεπιπέδου διέρχονται από το ίδιο σημείο που τις διχοτομεί. Δείξε επίσης ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες μεταξύ τους.

Άσκηση 8.7.2 Δείξε ότι, εάν σε πρίσμα με τετραγωνικές βάσεις οι τέσσερις διαγώνιοι διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε διχοτομούνται από αυτό και το πρίσμα είναι ένα παραλληλεπίπεδο.

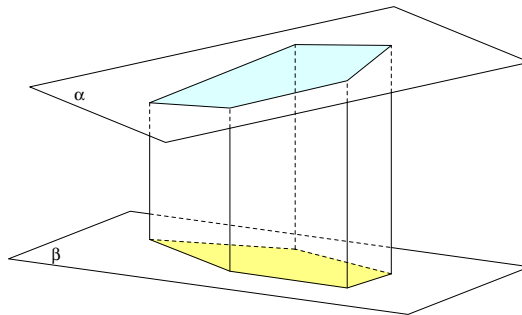
Ένα ορθό παραλληλεπίπεδο στο οποίο επιπλέον οι βάσεις είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα λέγεται **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Ο **Κύβος** είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου όλες οι έδρες είναι τετράγωνα.



Σχήμα 659: Κύβος

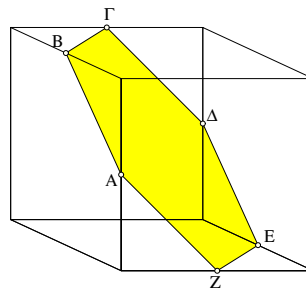
Άσκηση 8.7.3 Δείξε ότι τα τετράγωνα που αποτελούν τις έδρες του κύβου είναι ίσα μεταξύ τους.

Άσκηση 8.7.4 Δείξε ότι οι απέναντι ακμές τετραέδρου (δηλαδή ακμές που δεν έχουν κοινές κορυφές) ορίζουν δύο ασύμβατες ευθείες. Δείξε επίσης ότι η τομή τετραέδρου με επίπεδο παράλληλο προς δύο απέναντι ακμές του είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 660: Κολοβό πρίσμα

Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας μία πρισματική επιφάνεια με μη-παράλληλα επίπεδα λέγεται **Κολοβό πρίσμα**.

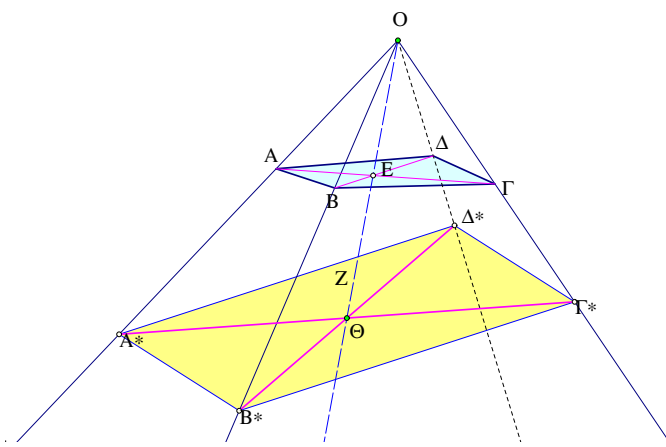


Σχήμα 661: Εξαγωνική τομή κύβου

Άσκηση 8.7.5 Δείξε ότι υπάρχει τομή του κύβου με επίπεδο που ορίζει επί του τέμνοντος επιπέδου ένα κανονικό εξάγωνο.

Υπόδειξη: Οι κορυφές του εξαγώνου είναι μέσα ακμών του κύβου. Αυτό εξασφαλίζει ότι όλες οι πλευρές του εξαγώνου είναι ίσες με το μισό της διαγωνίου της τετράγωνης έδρας του κύβου. Για το ότι το σχήμα είναι επίπεδο και έχει και ίσες γωνίες αρκεί ναδειχθεί ότι τέσσερα διαδοχικά σημεία είναι στο ίδιο επίπεδο και σχηματίζουν τραπέζιο (όπως λ.χ. το $AB\Gamma\Delta$ στο σχήμα-661).

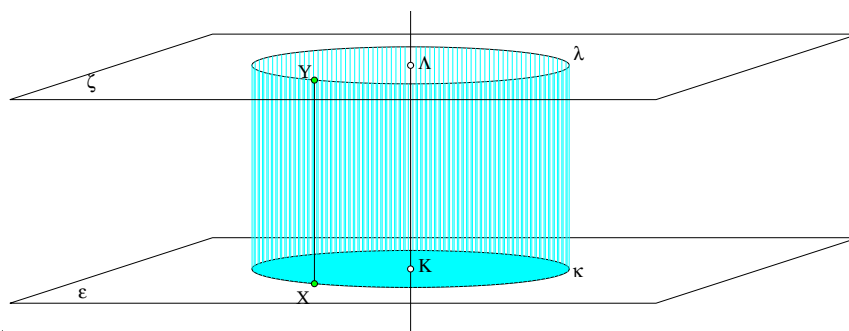
Άσκηση 8.7.6 Να τμηθεί τετραεδρική γωνία $OAB\Gamma\Delta$ με επίπεδο κατά παραλληλόγραμμο $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*$.



Σχήμα 662: Τομή κατά παραλληλόγραμμο

Υπόδειξη: Η τομή των επιπέδων $OB\Delta$ και OAG είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας Θ του παραλληλογράμμου. Η κατεύθυνση των διαγωνίων $A^*\Gamma^*$ και $B^*\Delta^*$ προσδιορίζεται από την Άσκηση 3.12.8.

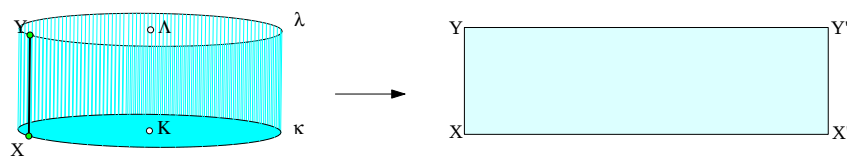
8.8 Κύλινδρος



Σχήμα 663: Κύλινδρος

Δοθέντος κύκλου κ στο επίπεδο ε , η εκτεινόμενη στο άπειρο επιφάνεια που παράγεται από ευθεία XY κάθετη στο ε και διερχόμενη από τα σημεία X του κύκλου λέγεται **Κυλινδρική επιφάνεια**. Οι παράλληλες ευθείες XY που παράγουν την επιφάνεια λέγονται **Γενέτειρες της επιφανείας** και η παράλληλη αυτών από το κέντρο K του κύκλου λέγεται **Άξονας της κυλινδρικής επιφανείας**. Για να τις διακρίνουμε από άλλες επιφάνειες που παράγονται με παρόμοιο τρόπο συχνά χρησιμοποιούμε τον ακριβέστερο όρο **Ορθή κυκλική κυλινδρική επιφάνεια**. Η τομή μιάς τέτοιας επιφανείας με δύο επίπεδα ε και ζ κάθετα στην γενέτειρα ορίζει ένα στερεό που ονομάζεται **Κύλινδρος**. Οι δύο ίσοι κύκλοι που αποτείνουν τα επίπεδα ε και ζ από την κυλινδρική επιφάνεια λέγονται **Βάσεις του κυλίνδρου**. Ενίοτε ονομάζουμε βάσεις και τα ίδια τα επίπεδα ε και ζ . Η απόσταση αυτών των επιπέδων λέγεται **Ύψος του κυλίνδρου**. Από τον ορισμό συνάγεται ότι ο κύλινδρος είναι το στερεό που προκύπτει περιστρέφοντας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $KXY\Lambda$ γύρω από την πλευρά του $K\Lambda$. Από τον ορισμό προκύπτει επίσης αμέσως ότι οι τομές του κυλίνδρου με επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις του είναι κύκλοι ίσοι προς τον κ . Η ακτίνα ρ του κύκλου κ λέγεται **Ακτίνα του κυλίνδρου**. Δύο κύλινδροι λέγονται **Ίσοι** όταν έχουν την ίδια ακτίνα και το ίδιο ύψος.

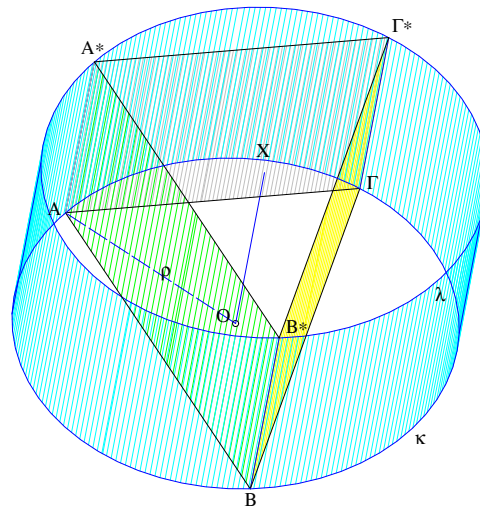
Οι κύλινδροι κατασκευάζονται εύκολα από ορθογώνια παραλληλόγραμμα $XY Y' X'$ που κάμπτουμε σε κυκλική μορφή και ταυτίζουμε (κολλάμε) τις απέναντι πλευρές τους XY και $X'Y'$. Αποδεικνύεται με την βοήθεια της *διαφορικής γεωμετρίας* (θεώρημα εωρδΗαρτμανν-Νιρενβεργ [Ber02, σ. 77], δες και παραπομπές παραγράφου 8.9) ότι η διαδικασία αυτή διατηρεί τις αποστάσεις σημείων μεταφέροντας την ευθύγραμμη απόσταση πάνω στο επίπεδο ανάπτυγμα στο μήκος τόξου μιάς έλλικας πάνω στον κύλινδρο. Η αντίστροφη διαδικασία κατά την οποία κόβουμε έναν κύλινδρο κατά μήκος μιάς γενέτειράς του XY και τον ξετυλίγουμε σε ένα επίπεδο ορθογώνιο $XY Y' X'$ λέγεται **Ανάπτυγμα του κυλίνδρου**. Το μήκος της



Σχήμα 664: Κύλινδρου ανάπτυγμα

πλευράς XX' του αναπτύγματος είναι ίσο με την περίμετρο του κύκλου κ . Συνεπώς αν ρ είναι

η ακτίνα του κυλίνδρου τότε $|XX'| = 2\rho$. Η αντίστροφη διαδικασία είναι προφανής. Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $XX'Y'Y$ μπορεί να καμφθεί και με συγκόλληση των πλευρών του XY και $X'Y'$ να δώσει την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται στην βιομηχανία για την παραγωγή σωλήνων.



Σχήμα 665: Κύλινδρος περιγεγραμμένος τριγωνικού πρίσματος

Άσκηση 8.8.1 Δείξε ότι κάθε ορθό τριγωνικό πρίσμα εγγράφεται σε κύλινδρο, με την έννοια ότι υπάρχει ορθός κυκλικός κύλινδρος που περιέχει τις ακμές του πρίσματος ως γενέτειρες.

Υπόδειξη: Έστω $AB\Gamma$ το τρίγωνο της βάσης του πρίσματος και κ ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Ο κύλινδρος με βάση τον κ και άξονα την κάθετο OX στην βάση του στο κέντρο O του κ είναι ο ζητούμενος. Τούτο διότι οι ακμές AA^* , BB^* , $\Gamma\Gamma^*$ περιέχονται στον κύλινδρο.

Άσκηση 8.8.2 Δείξε ότι κάθε ορθό κανονικό πρίσμα εγγράφεται σε κύλινδρο.

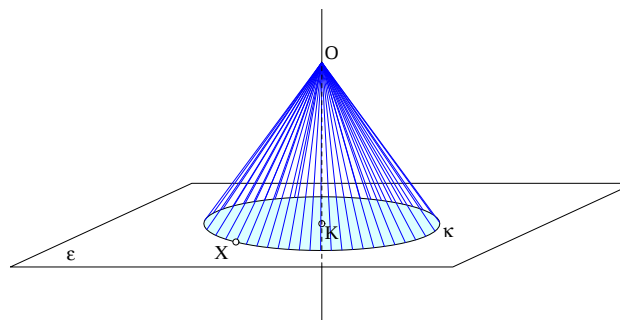
Υπόδειξη: Ανάλογη της προηγούμενης άσκησης.

Σχόλιο Με μικρές αλλαγές στην απόδειξη οι δύο προηγούμενες ασκήσεις γενικεύονται και για πλάγια πρίσματα των οποίων οι βάσεις είναι εγγράψιμα σε κύκλο πολύγωνα. Και γι' αυτά αποδεικνύεται ότι υπάρχει **Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος** που τα περιβάλλει, δηλαδή κύλινδρος που παράγεται από παράλληλες μεταξύ τους ευθείες που ενώνουν σημεία δύο ίσων κύκλων που ευρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα.

8.9 Κώνος, Κωνική επιφάνεια

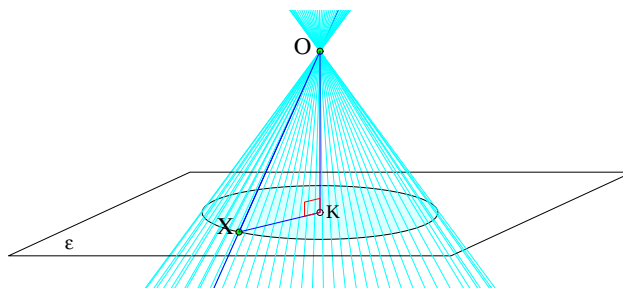
Δοθέντος κύκλου κ στο επίπεδο ϵ και σημείου O επί της ευθείας της καθέτου στο επίπεδο ϵ που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου (O διαφορετικό του K), ονομάζουμε **Κώνο** το στερεό που προκύπτει από τις ευθείες που ενώνουν το σημείο O με όλα τα σημεία X του κύκλου. Το σημείο O λέγεται **Κορυφή του κώνου**, οι ευθείες OX λέγονται **Γενέτιρες του κώνου** και ο κύκλος κ λέγεται **Βάση του κώνου**. Συχνά, για να διακρίνουμε αυτό το είδος του κώνου από άλλα πιο γενικά, τον ονομάζουμε **Ορθό κυκλικό κώνο**. Η ευθεία OK λέγεται **Άξονας του κώνου**. Το μήκος της λέγεται **Ύψος του κώνου**. Δύο κώνοι λέγονται **Ίσοι** όταν έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη.

Από τον ορισμό συνάγεται ότι όλα τα τρίγωνα OKX , για σημεία X επί του κύκλου κ , είναι ορθογώνια στο K τρίγωνα ίσα μεταξύ τους. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο κώνος είναι το στερεό που περιορίζεται από το επίπεδο ϵ και την επιφάνεια που διαγράφει η υποτείνουσα OX του ορθογωνίου τριγώνου OKX καθώς περιστρέφουμε το τρίγωνο περί την κάθετο OK . Την επιφάνεια αυτή ονομάζουμε **Παράπλευρη επιφάνεια** του κώνου. Η επιφάνεια



Σχήμα 666: Κώνος

αυτή είναι μέρος της εκτεινόμενης στο άπειρο επιφάνειας που προκύπτει περιστρέφοντας την ευθεία-φορέα της υποτείνουσας OX του ορθογωνίου OKX (και όχι μόνο το τμήμα της OX). Την επιφάνεια αυτή ονομάζουμε **Κωνική επιφάνεια** και ακριβέστερα **Ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια**, για να την διακρίνουμε από άλλες επιφάνειες που παράγονται με παρόμοιο τρόπο. Η κωνική επιφάνεια αποτελείται από δύο χωνιά με κοινή κορυφή στο σημείο O .



Σχήμα 667: Ορθή κωνική επιφάνεια

Πρόταση 8.9.1 Τα ορθογώνια τρίγωνα OKX που σχηματίζονται από τα σημεία X της βάσης, το κέντρο K της βάσης και την κορυφή του κώνου, είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

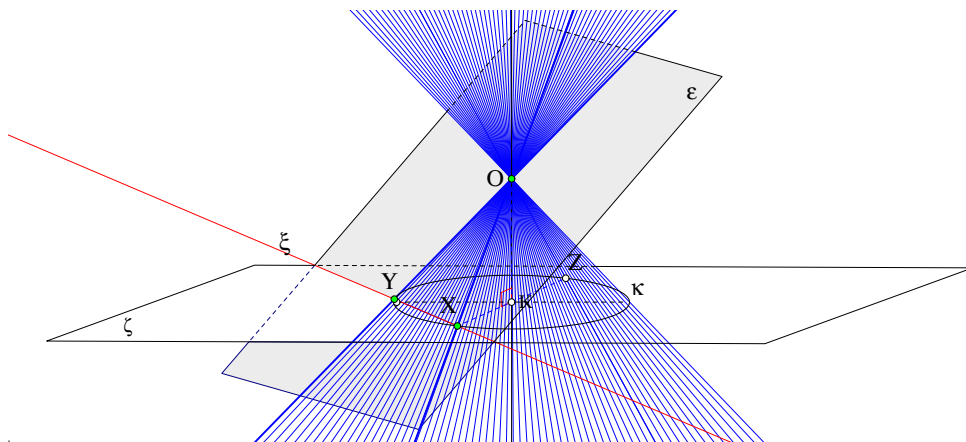
Απόδειξη: Προφανώς, διότι έχουν κοινή την OK και ίσες τις άλλες κάθετες πλευρές τους ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, ο.ε.δ.

Την διπλάσια της γωνίας $\alpha = \angle KOX$, που είναι σταθερή για κάθε γενέτειρα και κάθε σημείο της X , ονομάζουμε **Άνοιγμα** ή **Γωνία του κώνου**.

Πρόταση 8.9.2 *Η τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονά της και δεν διέρχεται από την κορυφή της είναι κύκλος με κέντρο στον άξονά της.*

Απόδειξη: Έστω ε επίπεδο τέμνον κάθετα τον άξονα στο σημείο K . Έστω και X σημείο τομής μιάς γενέτειρας με το ε . Τα τρίγωνα OKX είναι ορθογώνια στο K και έχουν σταθερά και ανεξάρτητα του X τα $|OK|$ και την γωνία $\alpha = \angle XOK$, άρα είναι ίσα μεταξύ τους και επομένως και η $\rho = |XK|$ είναι σταθερά. Άρα τα σημεία X περιέχονται σε κύκλο κέντρου K και ακτίνας ρ . Αντίστροφα κάθε σημείο αυτού του κύκλου ορίζει ορθογώνιο τρίγωνο XOK , με την ίδια γωνία $\alpha = \angle XOK$, άρα περιέχεται στον κώνο, ο.ε.δ.

Πρόταση 8.9.3 *Η τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο ε που διέρχεται από την κορυφή της είναι ένα ζεύγος από γενέτειρες ή μία ακριβώς γενέτειρα ή ένα και μόνο σημείο που συμπίπτει με την κορυφή της.*



Σχήμα 668: Τομή κώνου με επίπεδο διά της κορυφής του

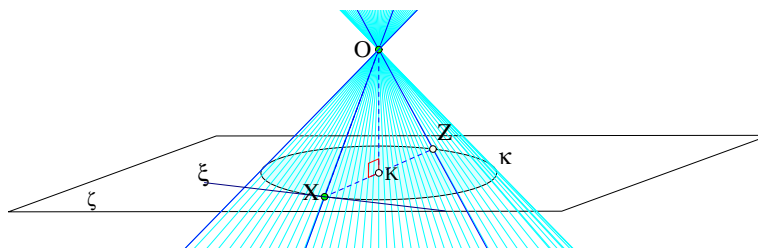
Απόδειξη: Έστω επίπεδο ζ κάθετο στον άξονα της κωνικής επιφάνειας, που, κατά την προηγούμενη πρόταση, τέμνει την τέμνει κατά κύκλο κ . Εάν το επίπεδο ε περιέχει και άλλο σημείο X γενέτειρας (εκτός του O), τότε θα περιέχει όλη την γενέτειρα και συνεπώς θα τέμνει τον κύκλο κ , αφού αυτός τέμνει κάθε γενέτειρα σε ένα ακριβώς σημείο. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι γενέτειρες που περιέχονται στο ε αντιστοιχούν ακριβώς στα σημεία τομής του κύκλου κ και της ευθείας ξ που είναι η τομή των επιπέδων ε και ζ . Η πρόταση προκύπτει από το γεγονός ότι η ευθεία ξ και ο κύκλος κ μπορεί να έχουν δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.9.1 *Ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κώνου τέμνει αυτόν κατά δύο γενέτειρες συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση έπεται ότι η ευθεία ξ τομή των επιπέδων ε και ζ της (απόδειξης της) προηγούμενης πρότασης διέρχεται τότε από το κέντρο του κύκλου κ και τον τέμνει κατά δύο αντιδιαμετρικά σημεία X και Z , εξ ου και το συμπέρασμα, ο.ε.δ.

Ονομάζουμε **Εφαπτόμενο επίπεδο** του κώνου ένα επίπεδο που έχει κοινή με τον κώνο μία ακριβώς γενέτειρα.

Πρόταση 8.9.4 Ένα επίπεδο ε είναι εφαπτόμενο του κώνου τότε ακριβώς όταν περιέχει μία γενέτειρα η του κώνου και είναι κάθετο στο επίπεδο θ που παράγεται από την γενέτειρα η και τον άξονα $ΟΚ$ του κώνου.

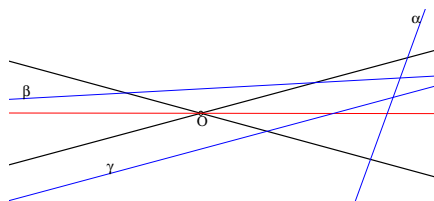


Σχήμα 669: Επίπεδο εφαπτόμενο κώνου

Απόδειξη: Εξ ορισμού το εφαπτόμενο επίπεδο ε κώνου περιέχει μία ακριβώς γενέτειρά του η . Φέρουμε επίπεδο ζ κάθετο στον άξονα του κώνου που τον τέμνει κατά κύκλο κ . Έστω και ξ η ευθεία τομή του ε και του ζ . Οι γενέτειρες του κώνου που περιέχονται στο ε αντιστοιχούν ακριβώς στα σημεία τομής της ευθείας ξ με τον κύκλο κ . Αν λοιπόν υπάρχει ένα μόνο σημείο τομής X , τότε η ξ θα είναι εφαπτόμενη στον κ στο X και η ξ θα είναι κάθετη στην ακτίνα KX του κύκλου κ και (ασύμβστα) κάθετη στον άξονα του κώνου, άρα η ξ θα είναι κάθετη και στο επίπεδο της $\eta=OX$ και του άξονα. Το ε , ως περιέχον την ξ , θα είναι συνεπώς και αυτό κάθετο στο επίπεδο των η και $ΟΚ$. Ο συλλογισμός αντιστρέφεται και δείχνει την αλήθεια της πρότασης, ο.ε.δ.

Πρόταση 8.9.5 Δοθείσης κωνικής επιφάνειας Σ , κάθε επίπεδο ε του χώρου τέμνει την Σ και μάλιστα τέμνει ή (α) όλες τις γενέτειρές της ή (β) όλες εκτός δύο ή (γ) όλες εκτός μίας.

Απόδειξη: Φέρε από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας επίπεδο ε' παράλληλο του ε . Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις (Πρόταση 8.9.3): (α) το ε' έχει κοινό με την Σ μόνο το O , (β) το ε' τέμνει την Σ κατά δύο γενέτειρες, (γ) το ε' τέμνει την Σ κατά μία γενέτειρα. Στην πρώτη περίπτωση, αφού το ε' τέμνει όλες τις γενέτειρες, χωρίς να περιέχει καμία τους, το ίδιο θα κάνει και το παράλληλο επίπεδο ε . Στην δεύτερη περίπτωση το ε' θα τέμνει όλες τις γενέτειρες χωρίς να τις περιέχει, εκτός των δύο συγκεκριμένων, που περιέχει. Άρα το παράλληλο επίπεδο ε θα τέμνει και αυτό όλες τις γενέτειρες εκτός των δύο που περιέχονται στο ε' . Στην τρίτη περίπτωση, το ε' θα περιέχει μία ακριβώς γενέτειρα (άρα θα είναι εφαπτόμενο της Σ) και το παράλληλό του θα τέμνει όλες τις άλλες εκτός αυτής προς την οποία θα είναι παράλληλο, ο.ε.δ.

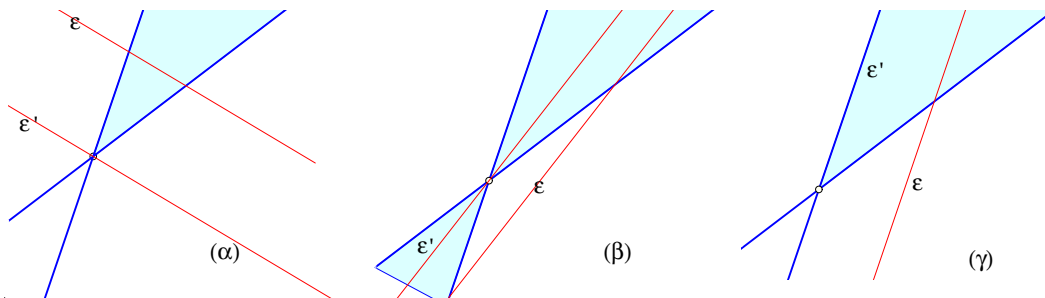


Σχήμα 670: Τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο διά του άξονος

Σχόλιο Συχνά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε μιά αναλογία που υπάρχει μεταξύ της κωνικής επιφάνειας Σ και του επιπέδου σχήματος που προκύπτει τέμνοντας την Σ με επίπεδο ϑ που διέρχεται από τον άξονά της. Το σχήμα αυτό (σχήμα-670 στο οποίο το ϑ ταυτίζεται με το επίπεδο του χαρτιού) αποτελείται από δύο γενέτειρες των οποίων μία από τις διχοτόμους της γωνίας που σχηματίζουν είναι ο άξονας της Σ . Έτσι λ.χ. στην τελευταία πρόταση αντιστοιχεί το επίπεδο σχήμα με τις ευθείες α , β και γ να περιγράφουν το ανάλογο των τριών περιπτώσεων (α), (β) και (γ), κατά τις οποίες το τέμνον την Σ επίπεδο ε συναντά (α) όλες (β) όλες εκτός δύο και (γ) όλες εκτός μίας γενέτειρες της Σ .

Πόρισμα 8.9.2 Δοθείσης κωνικής επιφάνειας Σ , αν το επίπεδο ε δεν διέρχεται από την κορυφή της O αλλά τέμνει όλες τις γενέτειρες ή όλες εκτός μίας, τότε η τομή της Σ και του ε περιέχεται στο ένα από τα δύο χωνιά της Σ . Αν το ε τέμνει όλες εκτός από δύο γενέτειρες της Σ , τότε τέμνει και τα δύο χωνιά της Σ .

Απόδειξη: Από την απόδειξη της Πρότασης 8.9.5 είδαμε ότι το παράλληλο επίπεδο ε' του ε που διέρχεται από το O στις περιπτώσεις (α) και (γ) δεν περιέχει καμία γενέτειρα, αντίστοιχα είναι εφαπτόμενο μίας γενέτειρας η . Συνεπώς το παράλληλό του ε στην πρώτη περίπτωση θα τέμνει ένα από τα δύο χωνιά. Στην δεύτερη περίπτωση το ε θα είναι παράλληλο προς το εφαπτόμενο επίπεδο ε' το οποίο περιέχει το κάθε χωνί σε διαφορετική πλευρά του. Άρα το ε θα τέμνει τό ένα μόνο χωνί. Τέλος στην περίπτωση που το ε περιέχει δύο γενέτειρες α και β , αυτές χωρίζουν όλες τις άλλες που περιέχονται στο ίδιο χωνί σε δύο ομάδες και το ε θα τέμνει τις γενέτειρες της μίας ομάδας στο ένα χωνί και τις γενέτειρες της άλλης ομάδας στο άλλο χωνί. Η επόμενη εικόνα δείχνει το ανάλογο επίπεδο σχήμα που προκύπτει, σύμφωνα με το προηγούμενο σχόλιο. Το σκιασμένο χωρίο αντιστοιχεί στο χωνί που τέμνει το επίπεδο ε , ο.ε.δ.

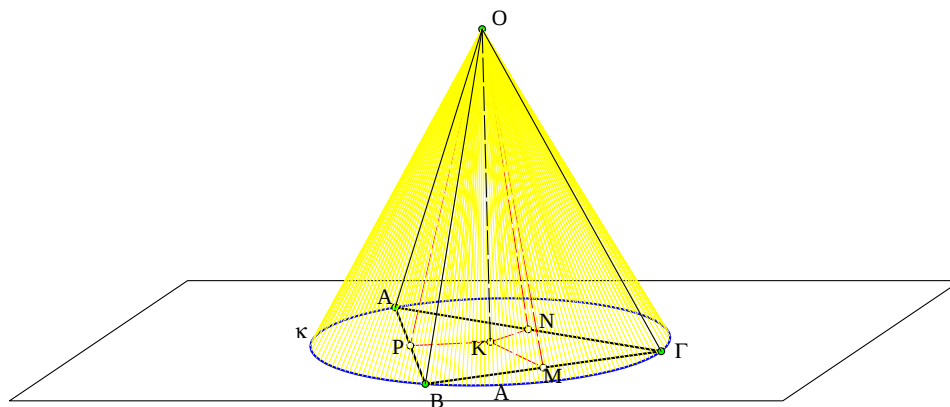


Σχήμα 671: Τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο ε

Μία πολυεδρική γωνία $OXYZ$... λέγεται **Εγγεγραμμένη σε κώνο** ή ότι **Εγγράφεται σε κωνική επιφάνεια** όταν υπάρχει κωνική επιφάνεια της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το O και ταυτόχρονα οι ακμές της πολυεδρικής γωνίας είναι γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας.

Πρόταση 8.9.6 Κάθε τριέδρος $OXYZ$ εγγράφεται σε ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια.

Απόδειξη: Έστω η τριέδρος $OXYZ$. Πάρε σημεία A, B, Γ επί των ακμών της ισαπέχοντα από την κορυφή της $|AO| = |BO| = |GO| = \delta$. Θεώρησε κατόπιν τα μεσοκάθετα επίπεδα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $B\Gamma$ και ΓA . Τα επίπεδα αυτά διέρχονται και τα τρία από την ευθεία OK που είναι η κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$ από το O . Αυτό προκύπτει από το ότι τα



Σχήμα 672: Περιγεγραμμένος κώνος τριέδρου

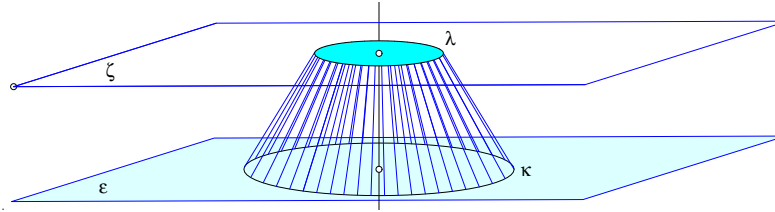
σημεία του μεσοκάθετου επιπέδου λ.χ. του AB χαρακτηρίζονται από το ότι ισαπέχουν από τα A και B. Έτσι, εκ κατασκευής, το O ανήκει και στα τρία μεσοκάθετα επίπεδα. Για τον ίδιο λόγο και το κέντρο K του περιγεγραμμένου κύκλου κ του τριγώνου ABΓ ανήκει και στα τρία μεσοκάθετα επίπεδα. Συνεπώς και η OK περιέχεται και στα τρία μεσοκάθετα επίπεδα. Η OK ως (ασύμβατα) κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου ABΓ (λ.χ. την AB και AG) είναι κάθετη σε αυτό (Άσκηση 7.5.7). Προκύπτει ότι οι ακμές OX, OY και OZ της τριέδρης γωνίας είναι γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας που ορίζεται από τον κύκλο κ και το σημείο O, που σημαίνει ακριβώς ότι η τριέδρος είναι εγγεγραμμένη στην κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

Η κωνική επιφάνεια, την ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση, λέγεται **Περιγεγραμμένη κωνική επιφάνεια** της τριέδρου. Αντίστοιχα ορίζεται και η **Εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια** της τριέδρου, ως η ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια που εφάπτεται και των τριών εδρών της τριέδρου. Στην συνέχεια θα δούμε (Άσκηση 8.11.7) ότι κάθε τριέδρος έχει όντως μία εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια.

Άσκηση 8.9.1 Δείξε ότι κάθε κανονική πυραμίδα εγγράφεται σε ορθό κυκλικό κώνο. Δηλαδή, υπάρχει κώνος με κορυφή την κορυφή της πυραμίδας που περιέχει τις ακμές της πυραμίδας ως γενέτειρες.

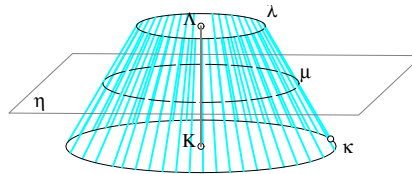
8.10 Κόλουρος Κώνος, Ανάπτυγμα κώνου

Δοθέντος κύκλου κ στο επίπεδο ϵ και σημείου O επί της ευθείας της καθέτου στο επίπεδο ϵ που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου (O διαφορετικό του K), Ονομάζουμε **Κόλουρο κώνο** το στερεό που αποτελείται από κώνο με επίπεδο ζ παράλληλο προς την βάση του ϵ και μη διερχόμενο από την κορυφή του O . Η τομή του επιπέδου ζ με την αντίστοιχη κωνική



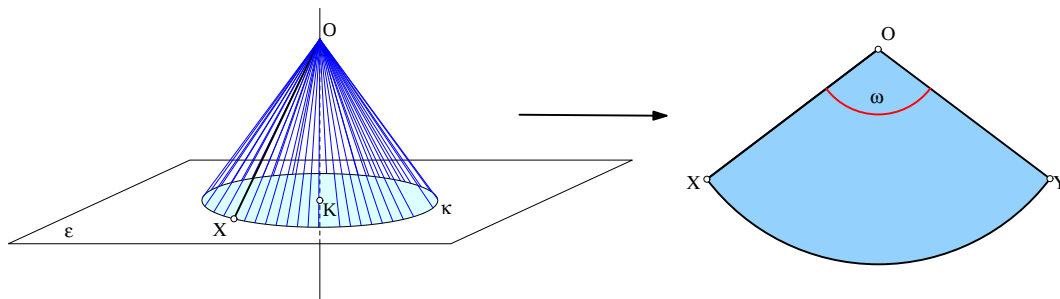
Σχήμα 673: Κόλουρος κώνος

επιφάνεια του κώνου είναι κύκλος λ περιεχόμενος στο επίπεδο ζ με κέντρο επί του άξονος του κώνου (Άσκηση 8.9.2). Οι δύο κύκλοι κ και λ (καθώς και τα επίπεδα ϵ και ζ) που ορίζουν τον κόλουρο κώνο λέγονται **Βάσεις του κόλουρου κώνου**. Η απόσταση των επιπέδων ϵ και ζ λέγεται **Ύψος του κόλουρου κώνου**. Δύο κόλουροι κώνοι λέγονται **Ίσοι** όταν έχουν ίσες αντίστοιχες βάσεις και ίσα ύψη. Ο κύκλος μ που προκύπτει ως τομή του κώνου με το επίπεδο η που είναι παράλληλο προς την βάση και διέρχεται από το μέσον του ύψους του KL λέγεται **Μεσαία τομή** του κόλουρου κώνου.



Σχήμα 674: Μεσαία τομή κόλουρου κώνου

Κώνοι και κόλουροι κώνοι χρησιμοποιούνται σε πολλές τεχνικές εφαρμογές. Κατασκευάζονται εύκολα από κυκλικούς τομείς (Παράγραφος 6.6) συγκολλώντας την αρχική και τελική ακτίνα αυτών. Πράγματι, αποδεικνύεται με την βοήθεια της διαφορικής γεωμετρίας (Θεώρημα του Minding(1806-1885) [dC76, σ.289], Theorema Eggregium του Gauss, [MP77, σ.161],[ST76, σ.206]), ότι αν κόψουμε ένα κώνο κατά μήκος μιάς γενέτειράς του OX μπο-



Σχήμα 675: Ανάπτυγμα του κώνου

ρούμε να τον ξεδιπλώσουμε κατόπιν στο επίπεδο και να πάρουμε έναν κυκλικό τομέα $OX\Upsilon$,

του οποίου το κέντρο αντιστοιχεί στην κορυφή O του κώνου και το τόξο του κυκλικού τομέα αντιστοιχεί στην βάση του κώνου και έχει το μήκος που έχει ο κύκλος της βάσης του κώνου. Ο τομέας αυτός λέγεται **Ανάπτυγμα του κώνου**. Όπως αποδεικνύεται αυτή η διαδικασία διατηρεί τις αποστάσεις και τα εμβαδά, με την έννοια ότι δύο σημεία του κώνου ορίζουν πάνω στον κώνο ένα συντομότερο δρόμο που τα συνδέει και κατά το ανάπτυγμα ο δρόμος αυτός αντιστοιχεί σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης ορίζεται εμβαδόν σχημάτων πάνω στον κώνο και κατά το ανάπτυγμα τα σχήματα αυτά αντιστοιχούν σε επίπεδα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν.

Τα στοιχεία του αναπτύγματος υπολογίζονται εύκολα από αυτά του κώνου. Έτσι η ακτίνα του τομέα είναι $\rho = |OX|$. Το μήκος του τόξου του τομέα σχετίζεται με το μήκος της γενέτειρας $|OX|$ του κώνου και το άνοιγμά του. Αν συμβολίσουμε με $\omega = |\angle XOY|$ το μέτρο της επίκεντρης γωνίας του τομέα σε ακτίνια, τότε το μήκος του τόξου είναι $\sigma = |XY| = \rho \cdot \omega$. Από την άλλη μεριά το ίδιο μήκος σ έχει και ο κύκλος κ της βάσης του κώνου, του οποίου η ακτίνα ισούται με

$$r = \rho \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

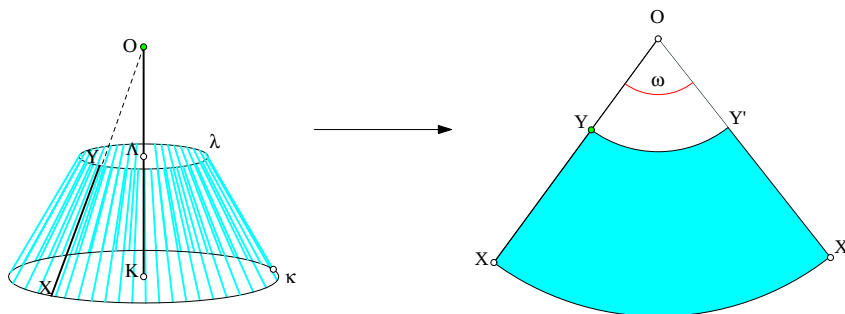
όπου α είναι το άνοιγμα του κώνου. Έτσι θα έχουμε συνολικά

$$\sigma = |XY| = \rho \cdot \omega = 2\pi r = 2\pi \rho \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Απλοποιώντας την σχέση βλέπουμε ότι η γωνία ω του αναπτύγματος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνον από το άνοιγμα α του κώνου (όλες οι μετρήσεις σε ακτίνια)

$$\omega = 2\pi \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

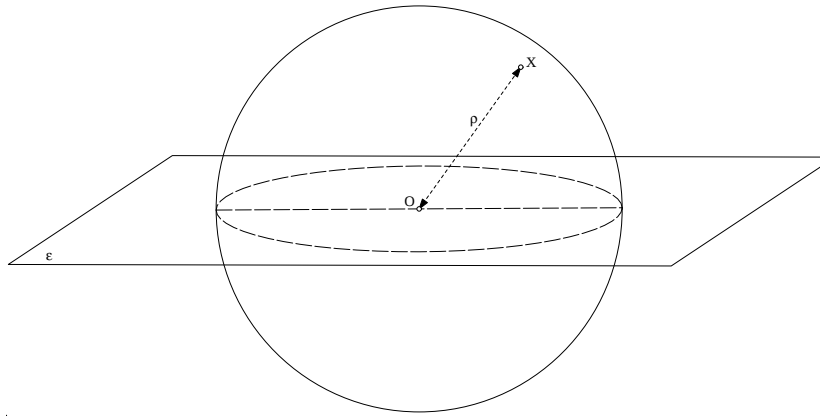
Στην αντίστροφη διαδικασία, της κατασκευής του κώνου από τον κυκλικό τομέα XOY , τυλίγουμε τον τομέα ταυτίζοντας (κολλώντας) τις ακτίνες του OX και OY . Ο προσδιορισμός του ανοίγματος α του κώνου από την γωνία ω του τομέα οδηγεί στην λύση της τελευταίας εξίσωσης ως προς α , που γίνεται μέσω της λεγόμενης *αντίστροφης συνάρτησης του ημιτόνου*, ένα θέμα που εξετάζεται στον *Απεροστικό Λογισμό*. Η ίδια διαδικασία οδηγεί και στο ανάπτυγμα του κολούρου κώνου. Ο κώνος κόβεται πάλι κατά μήκος μιάς γενέτειρας XY



Σχήμα 676: Ανάπτυγμα του κολούρου κώνου

και ξετυλίγεται στο επίπεδο σχηματίζοντας ένα τομέα κυκλικού δακτυλίου. Οι υπολογισμοί των σχέσεων μεταξύ του κολούρου κώνου και του αντίστοιχου επιπέδου σχήματος είναι ανάλογοι των προηγούμενων. Παρόμοια είναι και η αντίστροφη διαδικασία της παραγωγής του κολούρου κώνου από το επίπεδο σχήμα.

8.11 Σφαίρα



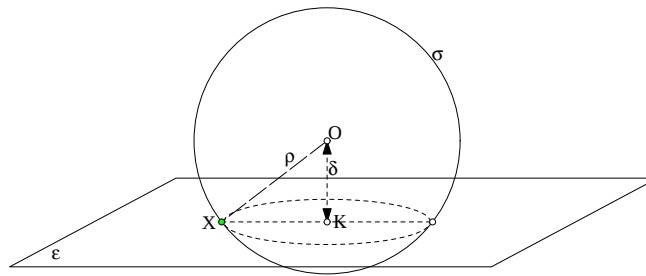
Σχήμα 677: Σφαίρα

Δοθέντος σημείου O στον χώρο και μήκους ρ , ονομάζουμε **Σφαίρα κέντρου O και ακτίνας ρ** τον γεωμετρικό τόπο των σημείων X του χώρου για τα οποία ισχύει

$$|OX| = \rho.$$

Τα σημεία του χώρου για τα οποία $|OX| < \rho$ αποτελούν το **Εσωτερικό της σφαίρας**. Τα σημεία για τα οποία $|OX| > \rho$ αποτελούν το **Εξωτερικό της σφαίρας**. Μερικές από τις έννοιες που συναντάμε στον κύκλο γενικεύονται και στην σφαίρα. Έτσι έχουμε την **Χορδή σφαίρας**, που είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα είναι σημεία της σφαίρας, την **Διάμετρο σφαίρας** που είναι μία χορδή διερχόμενη από το κέντρο της σφαίρας. Δύο σφαίρες λέγονται **Ίσες** όταν έχουν την ίδια ακτίνα.

Πρόταση 8.11.1 Τα κοινά σημεία σφαίρας σ και επιπέδου ε , που την τέμνει, είναι ή ένας κύκλος του ε ή ένα σημείο του ε .



Σχήμα 678: Τομή σφαίρας και επιπέδου

Απόδειξη: Το κλειδί του θέματος είναι η απόσταση $\delta = |OK|$ του κέντρου O από το επίπεδο. Αυτή ορίζεται φέρνοντας την κάθετο από το O στο επίπεδο και ορίζοντας επ' αυτής το ευθύγραμμο τμήμα OK , όπου K η προβολή του O επί του ε . Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες σχετικά με το μήκος δ και την ακτίνα ρ : (1) $\delta=0$, (2) $\delta \neq 0$ και $\delta < \rho$, (3) $\delta=\rho$, (4) $\delta > \rho$.

(1) Στην περίπτωση αυτή ($\delta=0$) το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο O της σφαίρας ($K=O$) και τα κοινά σημεία ταυτίζονται με τα σημεία του κύκλου κέντρου O και ακτίνας

ρ του επιπέδου. Ένας τέτοιος κύκλος λέγεται **Μέγιστος κύκλος** της σφαίρας. Κάθε επίπεδο διερχόμενο διά του κέντρου της σφαίρας ορίζει μέσω της τομής του με αυτήν έναν τέτοιο κύκλο.

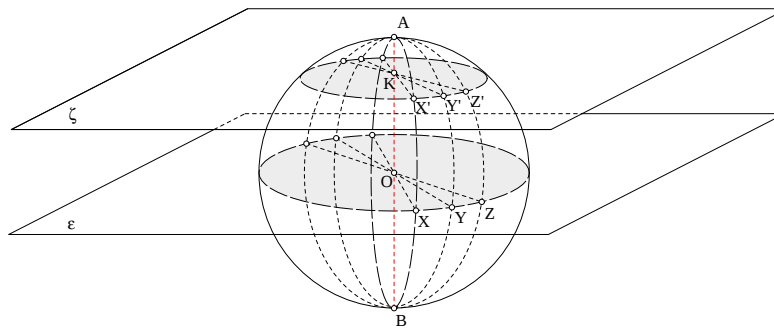
(2) Στην περίπτωση αυτή ($\delta < \rho$) υπάρχουν σημεία του επιπέδου X σε απόσταση $|XK| = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$, γιά τα οποία, από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $|XO| = \rho$, που σημαίνει ότι είναι και επί της σφαίρας. Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε εύκολα ότι ο κύκλος του ϵ με κέντρο K και ακτίνα $r = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$ ταυτίζεται με την τομή του επιπέδου και της σφαίρας. Τέτοιοι κύκλοι λέγονται **Μικροί κύκλοι** ή **Ελάσσονες κύκλοι** ή **Παράλληλοι κύκλοι** της σφαίρας. Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι προκύπτουν από επίπεδα που τέμνουν την σφαίρα, όμως δεν διέρχονται από το κέντρο της. Το ότι $r < \rho$ δικαιολογεί την ονομασία τους, καθώς και την ονομασία των κύκλων της περίπτωσης (1).

(3) Στην περίπτωση αυτή ($\delta = \rho$) η απόσταση από το επίπεδο ισούται με την ακτίνα και το K είναι σημείο της σφαίρας. Γιά κάθε άλλο σημείο X του επιπέδου το τρίγωνο XKO θα είναι ορθογώνιο στο K και η απόστασή του από το O είναι $|XO| = \sqrt{|XK|^2 + \rho^2} > \rho$, άρα το σημείο δεν περιέχεται στην σφαίρα. Ένα τέτοιο επίπεδο λέγεται **Εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας**. Το μοναδικό κοινό σημείο K του επιπέδου αυτού με την σφαίρα λέγεται **Σημείο επαφής** του εφαπτόμενου επιπέδου με την σφαίρα.

(4) Στην περίπτωση αυτή ($\delta > \rho$) η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία, αφού γιά κάθε άλλο σημείο X του επιπέδου θα ισχύει $|XO| > |XK| > \rho$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.11.1 Κάθε εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας είναι κάθετο στην ακτίνα της προς το σημείο επαφής του με την σφαίρα. Αντίστροφα, κάθε επίπεδο κάθετο στο άκρο ακτίνος της σφαίρας είναι εφαπτόμενο της σφαίρας.

Απόδειξη: Δείξαμε στην προηγούμενη πρόταση ότι όταν $|OK| = \rho$, δηλαδή η απόσταση του κέντρου από το επίπεδο ισούται με την ακτίνα της σφαίρας, τότε το επίπεδο εφάπτεται της σφαίρας και έχει κοινό με αυτήν μόνο το K . Αντίστροφα, αν το επίπεδο ϵ είναι κάθετο στο άκρο K μιάς ακτίνας OK της σφαίρας, τότε, κατά το Πυθαγόρειο θεώρημα, όλα τα άλλα σημεία X του επιπέδου θα έχουν $|OX| > |OK| = \rho$, άρα το K θα είναι το μοναδικό κοινό σημείο του ϵ με την σφαίρα, ο.ε.δ.

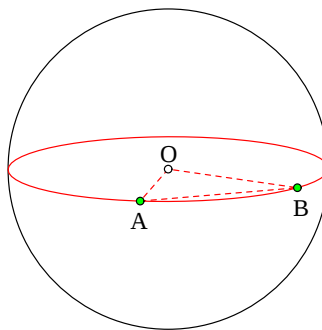


Σχήμα 679: Σφαίρα εκ περιστροφής ημικυκλίου AXB

Είναι εύκολο να δούμε ότι η σφαίρα παράγεται από ένα ημικύκλιο AXB το οποίο περιστρέφουμε περί την διάμετρό του AB. Το μέσον X του τόξου AB διαγράφει κατά την περιστροφή ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας. Κάθε άλλο σημείο X' του τόξου, διαφορετικό των A και B , διαγράφει ένα παράλληλο κύκλο. Τα σημεία A και B ορίζουν τον άξονα περιστροφής και παραμένουν σταθερά ορίζοντας επίσης μία διάμετρο της παραγόμενης σφαίρας. Οι κύκλοι που

διαγράφουν τα σημεία X' του τόξου AXB περιέχονται όλοι σε παράλληλα επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στην διάμετρο AB . Τα σημεία A και B είναι οι πόλοι όλων αυτών των κύκλων. Γενικά για έναν κύκλο περιεχόμενο σε μία σφαίρα ονομάζουμε **Πόλους του κύκλου** τα άκρα της διαμέτρου της σφαίρας που είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου. Δύο σημεία της σφαίρας που είναι άκρα μιάς διαμέτρου της τα ονομάζουμε **Αντιδιαμετρικά**.

Σχόλιο-1 Αποδεικνύεται με τα μέσα της *Διαφορικής Γεωμετρίας* ([dC76, σ. 246]) ότι πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων της A και B είναι κατά μήκος ενός εκ των τόξων AB που ορίζονται επί του μεγίστου κύκλου που διέρχεται από τα A και B . Όταν τα A και B δεν είναι αντιδιαμετρικά, τότε τα σημεία A , B και O , όπου O το κέντρο της σφαίρας, δεν είναι συγγραμμικά. Ορίζουν συνεπώς αυτά τα τρία σημεία ένα ακριβώς επίπεδο AOB που τα περιέχει και ένα ακριβώς μέγιστο κύκλο που περιέχει τα A και B . Εάν επιτρέπεται να κινούμεθα και εκτός της επιφανείας της σφαίρας, τότε ο συντομότερος



Σχήμα 680: Μέγιστος κύκλος οριζόμενος από τα A, B

δρόμος μεταξύ των A και B είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB . Αν όμως δεν επιτρέπεται η έξοδος από την επιφάνεια της σφαίρας, τότε η απόσταση μετρούμενη επί της επιφανείας, ταυτίζεται, όπως ανέφερα με το μήκος ενός εκ των τόξων του μεγίστου κύκλου που ορίζεται από τα A και B . Αυτό συμβαίνει λ.χ. επί γής, που είναι κατά προσέγγιση σφαίρα. Οι συντομότερες πλεύσεις μεταξύ δύο σημείων A και B του ωκεανού είναι κατά μήκος μεγίστου κύκλου που ορίζεται από τα A , B και το κέντρο O της γης. Όταν τα A και B είναι αντιδιαμετρικά, τότε όλα τα επίπεδα που περιέχουν τα A και B διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας. Κάθε ένα τέτοιο επίπεδο ορίζει και ένα μέγιστο κύκλο και ο συντομότερος δρόμος μεταξύ των A και B , σε αυτήν την περίπτωση, δεν είναι μοναδικός. Οποιοδήποτε ημικύκλιο ενός μεγίστου κύκλου διά των A, B δίδει την συντομότερη διαδρομή μεταξύ των A και B .

Αν εξαιρέσουμε αυτήν την περίπτωση των αντιδιαμετρικών σημείων, υπάρχει μία ομοιότητα μεταξύ των μεγίστων κύκλων της σφαίρας και των ευθειών του επιπέδου. Όπως και στο επίπεδο, έτσι και στην σφαίρα, για κάθε ζεύγος (μη αντιδιαμετρικών) σημείων A και B υπάρχει ένας ακριβώς μέγιστος κύκλος που διέρχεται από αυτά. Τα ευθύγραμμα τμήματα του επιπέδου αντιστοιχούν σε τόξα μεγίστων κύκλων, τα οποία υλοποιούν τις συντομότερες συνδέσεις μεταξύ σημείων της σφαίρας.

Άσκηση 8.11.1 Δείξε ότι το μεσοκάθετο επίπεδο χορδής AB της σφαίρας διέρχεται από το κέντρο της.

Υπόδειξη: Προφανώς, αφού το μεσοκάθετο επίπεδο είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα A, B της χορδής και το κέντρο O της σφαίρας έχει αυτήν την ιδιότητα.

Άσκηση 8.11.2 Δείξε ότι τα μέσα παραλλήλων χορδών της σφαίρας περιέχονται σε επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

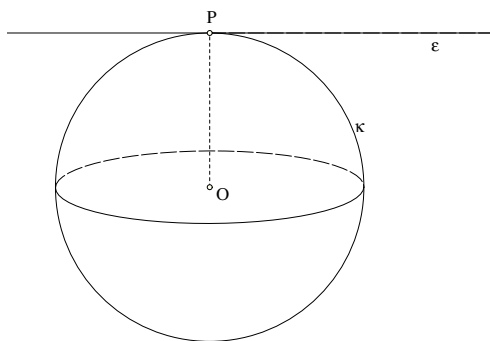
Υπόδειξη: Θεώρησε μία από τις παράλληλες χορδές, την AB και το μεσοκάθετο επίπεδό της ε . Αυτό, κατά την προηγούμενη άσκηση θα περνά από το κέντρο O της σφαίρας. Μία άλλη παράλληλη της AB χορδή $\Gamma\Delta$ θα είναι επίσης κάθετη στο ε (Πρόταση 7.5.3). Επομένως, αν M το σημείο τομής της $\Gamma\Delta$ με το ε , η OM που περιέχεται στο ε θα είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$, άρα το M θα είναι το μέσον της, αφού το $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 8.11.3 Δείξε ότι για τρία σημεία A, B και Γ της σφαίρας η ευθεία η κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου περιέχεται στην σφαίρα.

Άσκηση 8.11.4 Δείξε ότι παράλληλα επίπεδα που τέμνουν την σφαίρα σ' ορίζουν κύκλους των οποίων τα κέντρα είναι σε ευθεία κάθετη στα παράλληλα αυτά επίπεδα.

Μία ευθεία που έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με την σφαίρα λέγεται **Εφαπτόμενη της σφαίρας**. Το κοινό σημείο της εφαπτόμενης με την σφαίρα λέγεται **Σημείο επαφής** της εφαπτόμενης με την σφαίρα.

Πρόταση 8.11.2 Μία ευθεία ε είναι εφαπτόμενη της σφαίρας ς τότε και μόνον, όταν είναι κάθετη στο άκρο μιάς ακτίνας της σφαίρας.

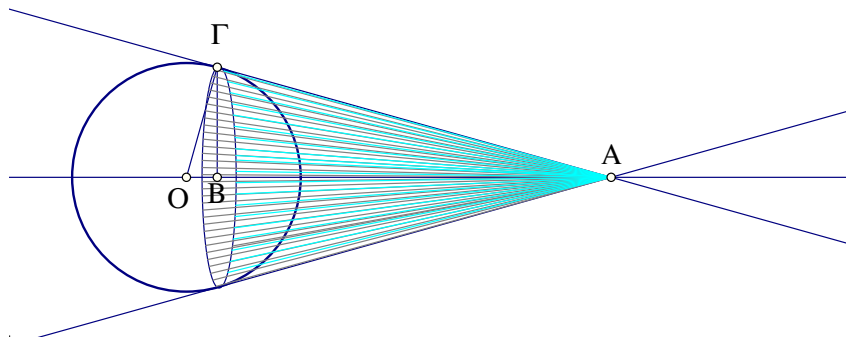


Σχήμα 681: Ευθεία εφαπτόμενη στην σφαίρα

Απόδειξη: Η ευθεία ε και το κέντρο O της σφαίρας ορίζουν επίπεδο η που τέμνει την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο κ . Αν η σφαίρα και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο, τότε και ο κύκλος κ και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο, άρα εφάπτονται και η ευθεία είναι κάθετη στο άκρο ακτίνας του κύκλου, που είναι και ακτίνα της σφαίρας (Πρόταση 2.2.2). Αντίστροφα, αν η ευθεία ε είναι κάθετη στο άκρο ακτίνας της σφαίρας, θα είναι κάθετη και στο άκρο ακτίνας του κ , συνεπώς θα έχει ένα κοινό σημείο με αυτόν, άρα και με την σφαίρα, ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.11.2 Μία ευθεία ε είναι εφαπτόμενη της σφαίρας ς στο σημείο P τότε και μόνον, όταν διέρχεται από το P και περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο P .

Πρόταση 8.11.3 Γιά κάθε σημείο A εκτός σφαίρας $O(\rho)$, οι εφαπτόμενες από το A προς την σφαίρα είναι ίσες μεταξύ τους και σχηματίζουν κώνο που έχει κοινό με την σφαίρα ένα μικρό κύκλο αυτής, το επίπεδο του οποίου είναι κάθετο στον άξονα του κώνου. Τα σημεία αυτού του κύκλου συμπίπτουν με τα σημεία επαφής των εφαπτομένων με την σφαίρα.



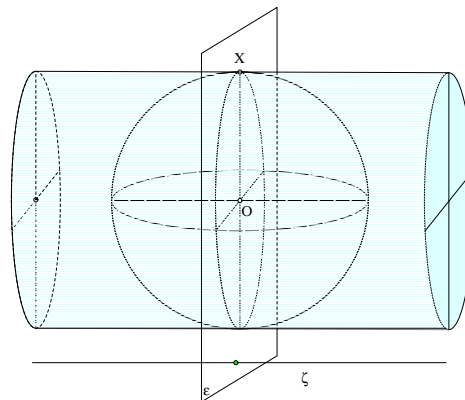
Σχήμα 682: Εφαπτόμενος κώνος σφαίρας από σημείο εκτός αυτής

Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ε που ορίζεται από την ευθεία OA και μία εφαπτόμενη AG από το A . Το επίπεδο αυτό τέμνει την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο με τον οποίο η AG έχει ένα κοινό σημείο, άρα είναι εφαπτόμενη αυτού. Το τρίγωνο $OΓA$ είναι συνεπώς ορθογώνιο, ανεξάρτητο της ειδικής θέσης του ε , αφού έχει πάντοτε την ίδια υποτείνουσα OA και κάθετο $ΟΓ$ με το ίδιο μήκος $|ΟΓ| = \rho$. Συνάγεται ότι η απόσταση $\delta = |ΓB|$ του Γ από τον άξονα, που ισούται με το ύψος αυτού του ορθογωνίου τριγώνου, είναι σταθερά και ανεξάρτητη του επιπέδου ε . Συνεπώς τα σημεία επαφής, όπως το Γ , περιέχονται στον μικρό κύκλο με κέντρο B και ακτίνα δ . Η ακτίνα δ του μικρού κύκλου υπολογίζεται εύκολα από τα όμοια τρίγωνα $OBΓ$ και $ΟΓA$:

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{|BΓ|}{|ΟΓ|} = \frac{|ΑΓ|}{|ΟΑ|} = \frac{\sqrt{x^2 - \rho^2}}{x} \Rightarrow \delta = \frac{\rho\sqrt{x^2 - \rho^2}}{x},$$

όπου $x = |OA|$, ο.ε.δ.

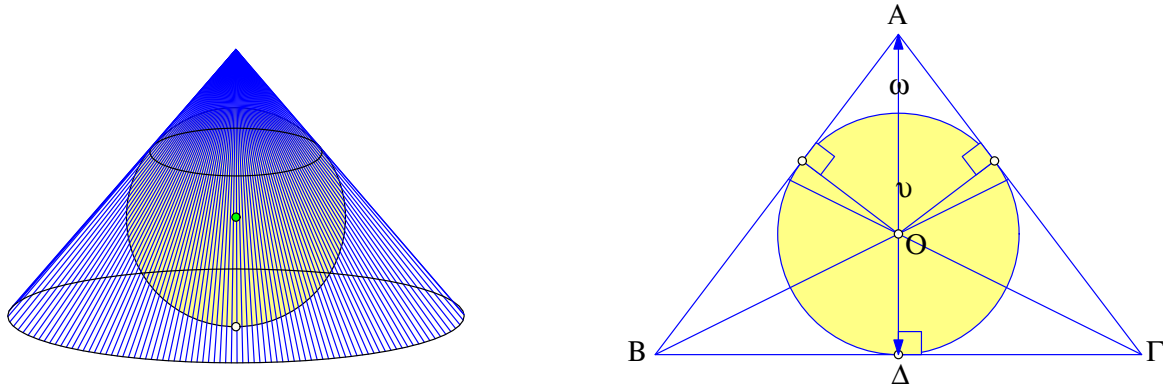
Ο κώνος που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση λέγεται **Εφαπτόμενος κώνος** της σφαίρας από το σημείο A . Όταν το σημείο A απομακρύνεται στο άπειρο, οι εφαπτόμενες από αυτό τείνουν να γίνουν παράλληλες και στο όριο ορίζεται μία (άπειρα εκτεινόμενη) κυλινδρική επιφάνεια που εφάπτεται του κώνου. Την ύπαρξη αυτής της επιφάνειας εξασφαλίζει η επόμενη πρόταση.



Σχήμα 683: Εφαπτόμενος κύλινδρος σφαίρας

Πρόταση 8.11.4 Δοθείσης σφαίρας $O(\rho)$ και ευθείας ζ υπάρχει κύλινδρος εφαπτόμενος της σφαίρας με γενέτειρες παράλληλες της ζ . Τα σημεία επαφής του κυλίνδρου και της σφαίρας συμπίπτουν με μέγιστο κύκλο, το επίπεδο ε του οποίου είναι κάθετο στην ζ .

Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ε το κάθετο στην ζ και διερχόμενο από το κέντρο O της σφαίρας. Το επίπεδο αυτό τέμνει την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο κ . Οι ευθείες οι παράλληλες της διερχόμενες από σημεία Y του κ είναι εφαπτόμενες της σφαίρας. Τούτο διότι είναι κάθετες στο άκρο της ακτίνας OY της σφαίρας. Παράγουν συνεπώς αυτές οι ευθείες (άπειρα εκτεινόμενη) κυλινδρική επιφάνεια εφαπτόμενη της σφαίρας κατά μήκος του κύκλου κ , ο.ε.δ.



Σχήμα 684: Σφαίρα εγγεγραμμένη σε κώνο

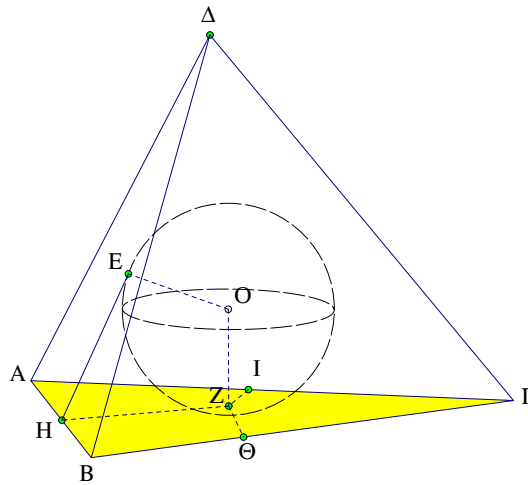
Άσκηση 8.11.5 Βρες την ακτίνα της σφαίρας που εγγράφεται σε κώνο ύψους u και γωνίας ω .

Υπόδειξη: Η ζητούμενη ακτίνα υπολογίζεται από το επίπεδο σχήμα που αποτελεί το επίπεδο διερχόμενο από τον άξονα του κώνου. Αυτό τέμνει τον κώνο κατά ένα ισοσκελές $AB\Gamma$ και την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο που είναι ταυτόχρονα ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου υπολογίζεται (Πρόταση 5.6.2):

$$\rho = \frac{u \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1 + \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Άσκηση 8.11.6 Δείξε ότι κάθε τετράεδρο έχει εγγεγραμμένη σφαίρα, δηλαδή σφαίρα που εφάπτεται και των τεσσάρων εδρών του. Δείξε ότι η θέση του σημείου επαφής της σφαίρας αυτής με μία έδρα $AB\Gamma$, καθορίζεται από τις διέδρες που μία τους έδρα είναι η $AB\Gamma$.

Υπόδειξη: Θεώρησε τα τρία διχοτομούντα επίπεδα των διέδρων (της βάσης) AB , $B\Gamma$ και GA . Τα τρία αυτά επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο O , το οποίο έχει ίσες αποστάσεις από την βάση $AB\Gamma$ καθώς και όλες τις άλλες έδρες του τετράεδρου. Άρα η σφαίρα με κέντρο O και ακτίνα $|OZ|$ όπου Z η προβολή του O στο $AB\Gamma$, εφάπτεται όλων των εδρών του τετραέδρου. Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη της σφαίρας. Για τον καθορισμό του Z παρατήρησε ότι, εάν E η προβολή του O στην έδρα ΔAB , τότε το επίπεδο ε που περιέχει τα O , Z και E τέμνει την ακμή AB κάθετα και ορίζει την γωνία EHZ , της οποίας το μέτρο είναι και το μέτρο της διέδρου AB του τετραέδρου. Αυτό διότι το επίπεδο ε περιέχει δύο (ασύμβατα) κάθετες προς



Σχήμα 685: Εγγεγραμμένη σφαίρα τετραέδρου

την ΑΒ: τις ΟΕ και ΟΖ. Συνάγεται ότι η $\gamma = |EHZ|$ είναι το μέτρο της διέδρου ΑΒ. Επίσης, αν r συμβολίζει την ακτίνα της σφαίρας, τότε

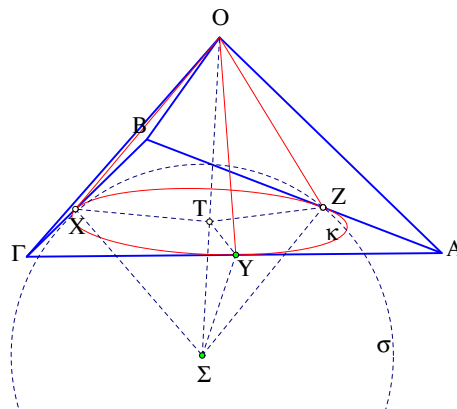
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r}{|HZ|} \Rightarrow |HZ| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Συνάγεται ότι οι αποστάσεις του σημείου επαφής Ζ της εγγεγραμμένης σφαίρας με την έδρα ΑΒΓ, από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, ικανοποιούν τις

$$|ZH| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad |Z\Theta| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad |ZI| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

όπου α, β, γ τα μέτρα των διέδρων ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντιστοίχως.

Άσκηση 8.11.7 Δείξε ότι για κάθε τριέδرو γωνία υπάρχει ορθός κυκλικός κώνος που εφάπτεται των εδρών της.



Σχήμα 686: Κατασκευή εγγεγραμμένου κώνου τριέδρου

Υπόδειξη: Κατασκεύασε σφαίρα $\sigma(\Sigma, r)$ εγγεγραμμένη στην κωνική επιφάνεια, δηλαδή εφάπτομενη και των τριών εδρών της. Τα σημεία επαφής Χ, Υ, Ζ της σφαίρας με τις έδρες της

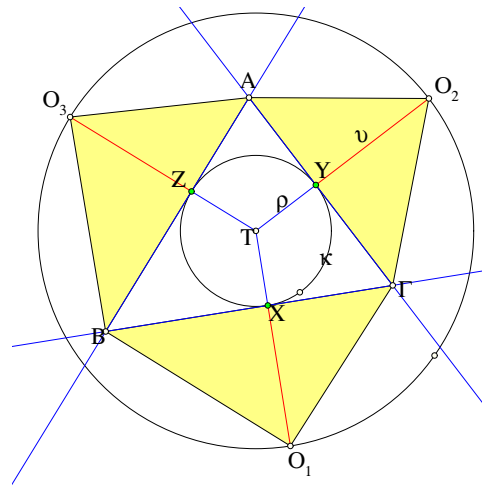
τριέδρου ορίζουν ένα επίπεδο ε που τέμνει την σφαίρα κατά κύκλο κ . Τα ευθύγραμμα τμήματα $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ είναι ακτίνες της σφαίρας άρα ίσα μεταξύ τους. Τα τρίγωνα $\Sigma XO, \Sigma YO, \Sigma ZO$, όπου O η κορυφή της τριέδρου, είναι ίσα ορθογώνια διότι έχουν την ίδια υποτείνουσα ΣO και ίσες τις κάθετες πλευρές $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$. Επομένως τα ύψη αυτών των τριγώνων από τα X, Y, Z προς την κοινή υποτείνουσα ΣO θα ορίζουν το ίδιο ίχνος T επί της ΣO . Επομένως το επίπεδο ε των X, Y, Z θα είναι κάθετο στην ΣO θα τέμνει την σφαίρα κατά τον κύκλο κ με ακτίνα $|TX| = |TY| = |TZ|$ και την τριέδρο κατά τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου ο κύκλος κ είναι ο εγγεγραμμένος. Η κωνική επιφάνεια που παράγεται από τον κύκλο κ και την κορυφή O της τριέδρου είναι η ζητούμενη.

Άσκηση 8.11.8 Βάσει του προηγούμενου σχήματος (686) δείξε ότι (1:) οι OX, OY, OZ είναι αντίστοιχα κάθετες στις $B\Gamma, \Gamma A, AB$, (2:) τα επίπεδα $OX\Sigma, OY\Sigma, OZ\Sigma$ είναι αντίστοιχα κάθετα στις $B\Gamma, \Gamma A, AB$ και (3:) ότι η γωνίες $Y\Sigma Z, Z\Sigma X, X\Sigma Y$ είναι αντίστοιχα παραπληρωματικές της διέδρου OA, OB, OG .

Σχόλιο-2 Η προηγούμενη άσκηση δείχνει τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται οι τριέδρες γωνίες που έχουν εγγεγραμμένο κώνο με δοθέν άνοιγμα ω . Το άνοιγμα του κώνου προσδιορίζεται από τον λόγο λ της ακτίνας ρ της βάσης προς το ύψος v

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \lambda = \frac{\rho}{v}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ένα κύκλο $\kappa(T, \rho)$ με αυθαίρετη ακτίνα και τρία σημεία X, Y, Z επ'

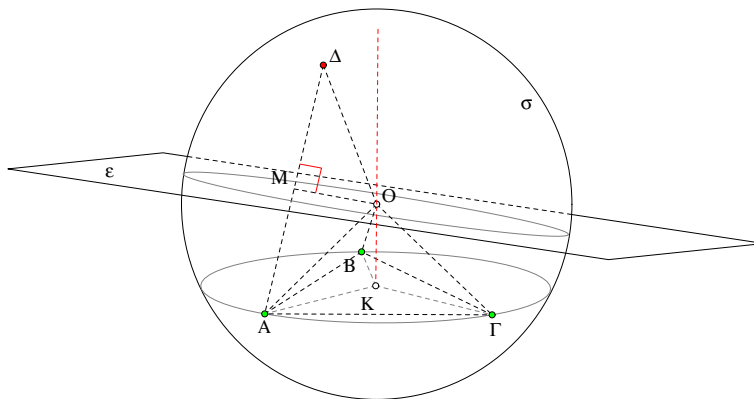


Σχήμα 687: Κατασκευή τριέδρου

αυτού. Στα σημεία αυτά φέρνουμε αντίστοιχα τις εφαπτόμενες $B\Gamma, \Gamma A, AB$ και σχηματίζουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατόπιν προεκτείνουμε τις TX, TY, TZ κατά $v = \lambda\rho$ και ορίζουμε αντίστοιχα τα σημεία O_1, O_2, O_3 . Η τριέδρος προκύπτει περιστρέφοντας τα τρίγωνα $B\Gamma O_1, \Gamma A O_2, A B O_3$ αντίστοιχα περί τις $B\Gamma, \Gamma A, AB$ έως ότου τα O_1, O_2, O_3 συμπίσουν σε σημείο O της κάθετου στο επίπεδο $AB\Gamma$ στο σημείο T .

Άσκηση 8.11.9 Δείξε ότι η τομή δύο διαφορετικών τεμνομένων σφαιρών είναι ή κύκλος ή ένα σημείο. Να δοθεί μιά αναγκαία και ικανή συνθήκη τομής δύο σφαιρών $O(\rho)$ και $O'(\rho')$ συναρτήσει των ακτίνων ρ και ρ' και της απόστασης των κέντρων τους $|OO'|$.

8.12 Σφαιρικά πολύεδρα



Σχήμα 688: Περιγεγραμμένη σφαίρα τετραέδρου

Πρόταση 8.12.1 Τέσσερα μη συνεπίεδα σημεία ορίζουν μονοσήμαντα μία σφαίρα που τα περιέχει.

Απόδειξη: Τα τέσσερα σημεία ορίζουν ένα τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$. Θεώρησε το κέντρο K του περιγεγραμμένου κύκλου της έδρας $AB\Gamma$ του τετραέδρου. Τα σημεία της ευθείας KO που είναι κάθετη στο επίπεδο του $AB\Gamma$ και διέρχεται από το K ισαπέχουν από τα A, B και Γ . Από την άλλη μεριά το μεσοκάθετο επίπεδο ε σε μία από τις ακμές που διέρχονται από το Δ λ.χ. την ΔA τέμνει την KO . Τούτο λόγω της υπόθεσης ότι τα 4 σημεία A, B, Γ και Δ δεν είναι συνεπίεδα. Αν το ε δεν έτεμνε την KO , τότε θα ήταν παράλληλο προς αυτήν άρα και αυτό κάθετο στο επίπεδο του $AB\Gamma$, συνεπώς και η $A\Delta$ θα ήταν ευθεία του επιπέδου του $AB\Gamma$, αντίθετα με την υπόθεση. Το σημείο τομής (O) του ε και της KO έχει την ιδιότητα

$$|O\Delta| = |OA| = |OB| = |O\Gamma| = \rho,$$

άρα είναι στην σφαίρα κέντρου O και ακτίνας ρ , ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.12.1 Οι κορυφές τετραέδρου περιέχονται σε σφαίρα.

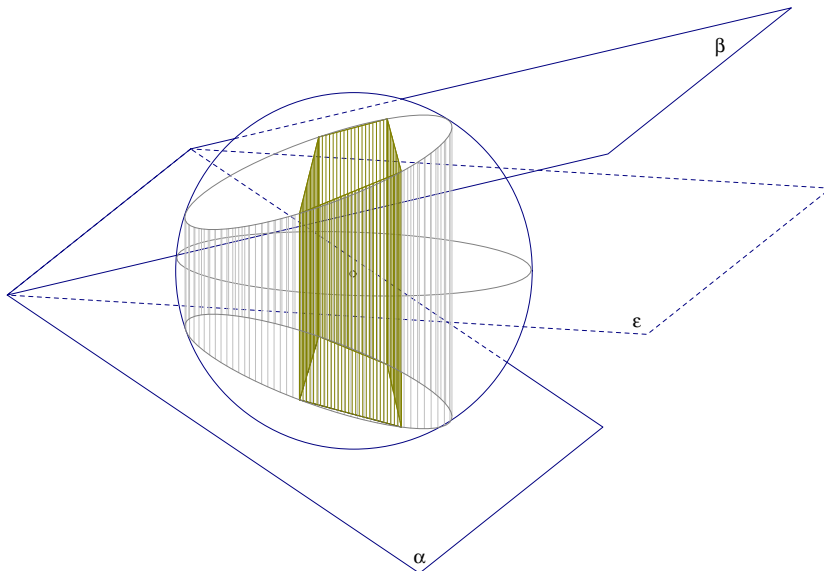
Η σφαίρα που εξασφαλίζει το προηγούμενο πόρισμα λέγεται **Περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου**. Πολύεδρα με περισσότερες από 4 έδρες δεν έχουν εν γένει περιγεγραμμένη σφαίρα. Αν έχουν, τότε τα ονομάζουμε **Σφαιρικά πολύεδρα** και την σφαίρα που περνά από όλες τις κορυφές τους ονομάζουμε **Περιγεγραμμένη σφαίρα**. Συχνά λέμε τότε ότι το πολύεδρο είναι **Εγγράψιμο σε σφαίρα**.

Άσκηση 8.12.1 Δείξε ότι ένα παραλληλεπίπεδο εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 8.12.2 Δείξε ότι μία πυραμίδα εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν η βάση της είναι πολύγωνο εγγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 8.12.3 Δείξε ότι ένα ορθό πρίσμα εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν η βάση του είναι πολύγωνο εγγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 8.12.4 Δείξε ότι ένα κολοβό πρίσμα εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν οι βάσεις του είναι πολύγωνα εγγράψιμα σε κύκλο και το διχοτομούν επίπεδο ε των βάσεων του είναι κάθετο στις παράπλευρες ακμές του.



Σχήμα 689: Κολοβό πρίσμα εγγεγραμμένο σε σφαίρα

Άσκηση 8.12.5 Να κατασκευασθεί σφαίρα δοθείσης ακτίνας η οποία να διέρχεται από τρία δοθέντα σημεία. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

Άσκηση 8.12.6 Να κατασκευασθεί σφαίρα δοθείσης ακτίνας η οποία να διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία και να εφάπτεται δοθέντος επιπέδου. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

Άσκηση 8.12.7 Να κατασκευασθεί σφαίρα δοθείσης ακτίνας η οποία να διέρχεται από ένα δοθέν σημείο και να εφάπτεται δύο δοθέντων επιπέδων. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

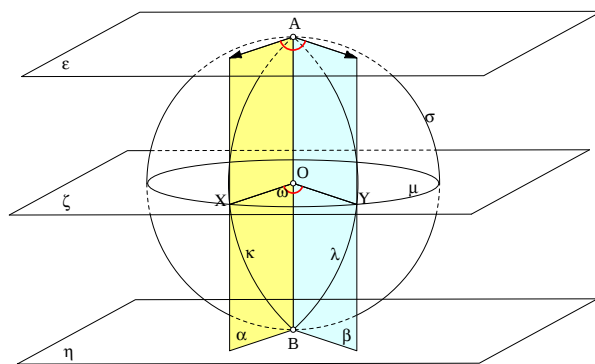
Άσκηση 8.12.8 Δίδεται επίπεδο ε , ευθεία η , μη περιεχόμενη σε αυτό και σημείο A εκτός των ε και η . Να βρεθεί σημείο B επί της η το οποίο να ισαπέχει από το A και το επίπεδο ε .

Υπόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ζ το κάθετο στην η και διερχόμενο από το A . Έστω K το σημείο τομής του ζ με την η . Θεώρησε και το επίπεδο κ , το περιέχον την ευθεία η και κάθετο στο ε . Έστω ϑ η ευθεία-τομή των κ και ε (η ϑ είναι η προβολή της η στο ε). Ο κύκλος $\lambda(K, |KA|)$ και το επίπεδο κ τέμνονται σε δύο σημεία Γ και Δ . Το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα του επιπέδου κ : Να βρεθεί σημείο B επί της η ισαπέχον από το Γ (ή Δ) και την ευθεία ϑ (Άσκηση 4.7.3).

Άσκηση 8.12.9 Δίδονται τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και επίπεδο ε μη περιέχον αυτά. Να βρεθεί σφαίρα διερχόμενη από τα τρία σημεία και εφαιπόμενη του επιπέδου ε .

Υπόδειξη: Το πρόβλημα ανάγεται στο προηγούμενο, θεωρώντας τον κύκλο λ που διέρχεται από τα τρία σημεία και την ευθεία η την κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$ στο κέντρο του κ .

8.13 Άτρακτος, γωνία μεγίστων κύκλων



Σχήμα 690: Σφαίρα και διέδρος

Δύο επίπεδα α και β διερχόμενα από το κέντρο O σφαίρας σ τέμνονται κατά μία διάμετρο αυτής AB . Τα επίπεδα αυτά αποτελούν από την σφαίρα και δύο μέγιστους κύκλους αντίστοιχα κ και λ . Τα επίπεδα αυτά ορίζουν επίσης τέσσερις διέδρες γωνίες με ακμή την AB . Η γωνία μιάς εκ των διέδρων ορίζεται από την επίπεδη γωνία που σχηματίζεται επί επιπέδου ζ που διέρχεται από το O και είναι κάθετο στην διάμετρο AB . Το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο των εφαπτομένων επιπέδων στα A και B (Πόρισμα 8.11.1). Αυτό συνεπάγεται ότι η γωνία της διέδρου $\omega = XOY$ είναι ίση με την αντίστοιχη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των κύκλων κ και λ στα σημεία A και B . Γενικά, δύο μέγιστοι κύκλοι κ και λ ορίζονται αντίστοιχα από επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας επομένως τέμνονται κατά διάμετρο αυτής AB . Την γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες αυτών των κύκλων στα A και B ονομάζουμε **Γωνία των μεγίστων κύκλων**.

Άτρακτο Ονομάζουμε το τμήμα της σφαίρας που περιλαμβάνεται μεταξύ των εδρών μιάς διέδρου γωνίας, της οποίας η ακμή είναι διάμετρος της σφαίρας. Η γωνία της διέδρου λέγεται **Γωνία της ατράκτου**. Δύο άτρακτοι λέγονται **Ίσες** όταν οι ακτίνες των σφαιρών που τις περιέχουν είναι ίσες και οι γωνίες τους είναι επίσης ίσες.

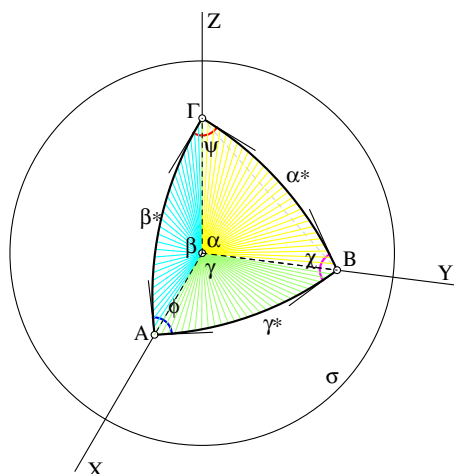
Πρόταση 8.13.1 Η γωνία μιάς διέδρου που σχηματίζεται από τα επίπεδα α και β ισούται με την γωνία της σφαιρικής ατράκτου που αυτή αποτελεί από σφαίρα που έχει το κέντρο της επί της ακμής AB της διέδρου. Επιπλέον η γωνία αυτή ισούται με την γωνία των μεγίστων κύκλων που ορίζονται από τα δύο επίπεδα.

Άσκηση 8.13.1 Πόσες σφαιρικές ατράκτους ορίζουν τρία επίπεδα ανά δύο μη ταυτιζόμενα και διερχόμενα από το κέντρο της σφαίρας;

Άσκηση 8.13.2 Από δοθείσα ευθεία που δεν τέμνει την σφαίρα φέρε επίπεδο εφαπτόμενο αυτής.

Υπόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ϵ που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετο στην δοθείσα ευθεία. Έστω κ ο μέγιστος κύκλος κατά τον οποίον το ϵ τέμνει την σφαίρα και P το σημείο τομής του ϵ με την δοθείσα ευθεία. Θεώρησε τις εφαπτόμενες η_1, η_2 από το P προς τον κ και τα δύο επίπεδα που καθένα τους περιέχει την δοθείσα ευθεία και μία από τις η_1, η_2 .

8.14 Σφαιρικά τρίγωνα



Σχήμα 691: Σφαίρα και τριέδρος

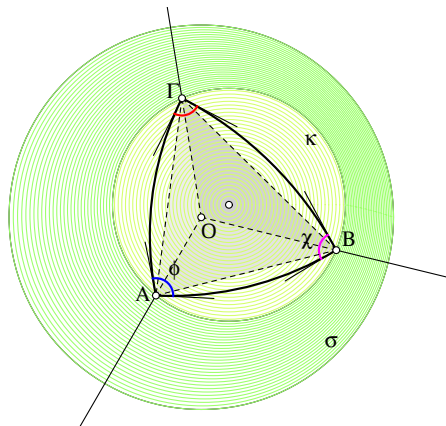
Τοποθετώντας την κορυφή μιάς τριέδρου στο κέντρο O μιάς σφαίρας παίρνουμε επί της σφαίρας ένα σχήμα που θυμίζει το τρίγωνο του επιπέδου και λέγεται **Σφαιρικό τρίγωνο**. Το σχήμα αποτελείται από τόξα μεγίστων κύκλων που αποτέμνουν επί της σφαίρας οι έδρες της τριέδρου. Το μήκος αυτών των τόξων συνδέεται με το μέτρο των εδρών της τριέδρου. Αν οι έδρες της τριέδρου έχουν μέτρα αντίστοιχα α, β και γ (σε ακτίνια), τότε τα μήκη των τόξων αυτών είναι αντίστοιχα

$$\alpha^* = \alpha\rho, \quad \beta^* = \beta\rho, \quad \gamma^* = \gamma\rho,$$

όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας. Τα τόξα αυτά ονομάζονται **Πλευρές του σφαιρικού τριγώνου**. Τα μήκη αυτά λέγονται **Μήκη των πλευρών του σφαιρικού τριγώνου**. Τα άκρα τους A, B και Γ είναι τα κοινά σημεία της σφαίρας και των ακμών της τριέδρου και λέγονται **Κορυφές του σφαιρικού τριγώνου**. Από την προηγούμενη παράγραφο ξέρουμε ότι οι διέδρες γωνίες της τριέδρου ϕ, χ και ψ σχηματίζονται αντίστοιχα στις κορυφές A, B και Γ από τις εφαπτόμενες εκεί των μεγίστων κύκλων που ορίζουν οι έδρες της τριέδρου. Οι γωνίες αυτές ονομάζονται **Γωνίες του σφαιρικού τριγώνου**. Δύο σφαιρικά τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ λέγονται **Ίσα** όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες γωνίες. Η αναλογία προς τα τρίγωνα του επιπέδου είναι προφανής. Πολλές προτάσεις της επιπεδομετρίας που αφορούν σε ιδιότητες τριγώνων μεταφέρονται και στα σφαιρικά τρίγωνα. Υπάρχουν ωστόσο και διαφορές, κάποιες από τις οποίες θα δούμε στις επόμενες παραγράφους. Η προηγούμενη αντιστοίχιση μεταξύ τριέδρων και σφαιρικών τριγώνων δείχνει ότι κάθε ιδιότητα των τριέδρων μεταφράζεται σε ιδιότητα των σφαιρικών τριγώνων και τούμπαλιν, κάθε ιδιότητα των σφαιρικών τριγώνων μεταφράζεται σε μία ιδιότητα των τριέδρων. Ένα δείγμα αυτού του συσχετισμού δίνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.14.1 Κάθε σφαιρικό τρίγωνο σφαίρας σ εγγράφεται σε κύκλο περιεχόμενο στην σ .

Απόδειξη: Έστω το σφαιρικό τρίγωνο $OAB\Gamma$ και ας συμβολίζουμε με τα ίδια γράμματα την αντίστοιχη τριέδρο γωνία. Στην Πρόταση 8.9.6 κατασκευάζεται ο περιγεγραμμένος κώνος



Σχήμα 692: Περιγεγραμμένος κύκλος σφαιρικού τριγώνου

της τριέδρου γωνίας $OAB\Gamma$ με βάση τον περιγεγραμμένο κύκλο κ του τριγώνου $AB\Gamma$. Τα σημεία αυτού του κύκλου απέχουν από το O την ίδια απόσταση που απέχουν και τα A, B και Γ , άρα είναι επί της σφαίρας σ , ο.ε.δ.

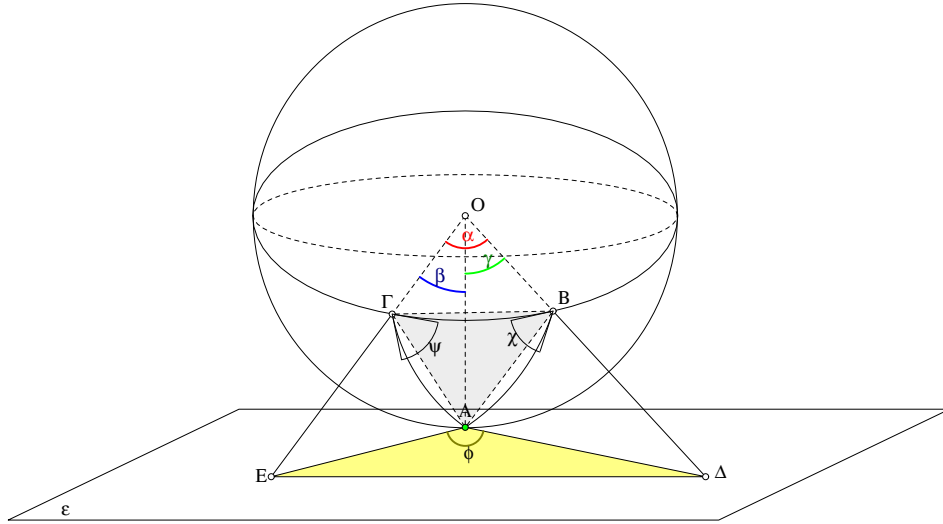
Άσκηση 8.14.1 Δείξε ότι η τομή σφαίρας και ορθού κυκλικού κώνου με κορυφή στο κέντρο της σφαίρας είναι παράλληλος κύκλος της σφαίρας.

Σχόλιο-1 Όπως οι τριέδρες έτσι και οι πολυεδρικές γωνίες, (Παράγραφος 8.3) τοποθετώντας την κορυφή τους στο κέντρο O μιάς σφαίρας, ορίζουν, μέσω των τομών των εδρών τους με την σφαίρα, ένα **Σφαιρικό πολύγωνο**, δηλαδή ένα σχήμα στην σφαίρα που περιορίζεται από διαδοχικά τόξα μεγίστων κύκλων. Αυτό είναι το ανάλογο των πολυγώνων πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Όπως και στις τριέδρες έτσι και στις πολυεδρικές γωνίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την αντιστοιχεία για να μελετήσουμε ιδιότητες των σφαιρικών πολυγώνων ανάγοντάς τις σε αντίστοιχες ιδιότητες των πολυεδρικών γωνιών. Περισσότερα για τα ενδιαφέροντα αυτά σχήματα της σφαίρας θα δούμε στην Παράγραφο 9.3. Η επόμενη πρόταση δείχνει πως εξαρτώνται οι διέδρες γωνίες μιάς τριέδρου από τις έδρες της. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε (Πρόταση 8.15.3) ότι και αντίστροφα οι έδρες προσδιορίζονται πλήρως από τις διέδρες της τριέδρου.

Πρόταση 8.14.2 Έστω τριέδρος γωνία $OAB\Gamma$ με έδρες $\alpha = BO\Gamma$, $\beta = GOA$, $\gamma = AOB$ και διέδρες γωνίες $\phi(OA)$, $\chi(OB)$, $\psi(O\Gamma)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε ισχύει

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \sin(\gamma) + \eta\mu(\beta) \eta\mu(\gamma) \sin(\phi).$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη τοποθετούμε την τριέδρο με την κορυφή της O στο κέντρο σφαίρας σ ακτίνας ρ και παίρνουμε τα A, B, Γ να είναι τα σημεία τομής των ακμών της με την σφαίρα. Επίσης θεωρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο ε της σφαίρας στο σημείο A . Έστω ότι οι OB και $O\Gamma$ τέμνουν το ε αντίστοιχα στα Δ και E (την απλούστερη περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει θα εξετάσουμε παρακάτω). Εφαρμόζουμε στα τρίγωνα $O\Delta E$ και $A\Delta E$ τον τύπο του συνημιτόνου



Σχήμα 693: Σφαιρικό θεώρημα συνημιτόνου

$$\begin{aligned}
 |E\Delta|^2 &= |OE|^2 + |OD|^2 - 2|OE||OD|\cos(\alpha) \\
 |OE| &= \frac{\rho}{\sin(\beta)}, \quad |OD| = \frac{\rho}{\sin(\gamma)}, \Rightarrow \\
 |E\Delta|^2 &= \rho^2 \left(\frac{1}{\sin(\beta)^2} + \frac{1}{\sin(\gamma)^2} - 2 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} \right) \\
 &= \rho^2 ((1 + \varepsilon\phi(\beta)^2) + (1 + \varepsilon\phi(\gamma)^2) - 2 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}).
 \end{aligned}$$

Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
 |E\Delta|^2 &= |AE|^2 + |AD|^2 - 2|AE||AD|\cos(\phi) \\
 |AE| &= \rho \varepsilon\phi(\beta), \quad |AD| = \rho \varepsilon\phi(\gamma), \Rightarrow \\
 |E\Delta|^2 &= \rho^2 (\varepsilon\phi(\beta)^2 + \varepsilon\phi(\gamma)^2 - 2\varepsilon\phi(\beta)\varepsilon\phi(\gamma)\cos(\phi)).
 \end{aligned}$$

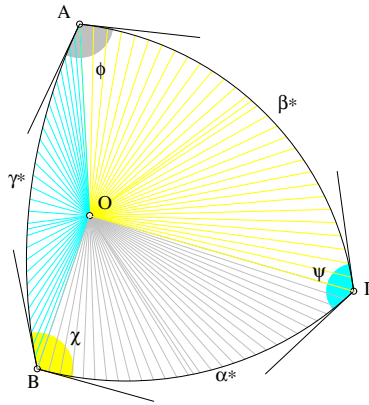
Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για το $|E\Delta|^2$ και απλοποιώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} &= -\varepsilon\phi(\beta)\varepsilon\phi(\gamma)\cos(\phi) \Rightarrow \\
 \sin(\beta)\sin(\gamma) - \sin(\alpha) &= -\eta\mu(\beta)\eta\mu(\gamma)\cos(\phi),
 \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμη με την ζητούμενη σχέση. Στην περίπτωση που ένα εκ των δύο σημείων Δ και Ε δεν υπάρχει λ.χ. το Δ, αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη ακμή OB είναι παράλληλη προς το επίπεδο ε, συνεπώς η γωνία γ είναι ορθή. Τότε $\sin(\gamma) = 0$, $\eta\mu(\gamma) = 1$ και ο τύπος γίνεται

$$\sin(\alpha) = \eta\mu(\beta)\cos(\phi) \Leftrightarrow |OE|\sin(\alpha) = |AE|\cos(\phi),$$

που αληθεύει λόγω της παραλληλίας των AΔ και OB. Όταν και τα δύο σημεία δεν υπάρχουν, τότε οι OΓ και OB είναι αντίστοιχα παράλληλες προς τις AE και AΔ και οι γωνίες β και γ είναι ορθές. Αυτό συνεπάγεται ότι οι γωνίες α και φ είναι ίσες και η σχέση γίνεται $\sin(\alpha) = \sin(\phi)$. Σε όλες συνεπώς τις περιπτώσεις ισχύει ο αναφερόμενος τύπος, ο.ε.δ.



Σχήμα 694: Σφαιρικό τρίγωνο

Σχόλιο-2 Η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και σαν πρόταση για σφαιρικά τρίγωνα με χρήση των μηκών των πλευρών $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ που ορίστηκαν στην αρχή της παραγράφου (σχήμα-694). Απλά χρησιμοποιούμε τον αποδειχθέντα τύπο όπου αντικαθιστούμε με τα

$$\alpha = \frac{\alpha^*}{\rho}, \quad \beta = \frac{\beta^*}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\gamma^*}{\rho}.$$

Ο τύπος που προκύπτει λέγεται **Πρώτος σφαιρικός τύπος συνημιτόνου**.

Πρόταση 8.14.3 Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ και αντίστοιχες απέναντι γωνίες ϕ, χ και ψ ισχύει:

$$\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{\rho}\right) = \text{συν}\left(\frac{\beta^*}{\rho}\right) \text{συν}\left(\frac{\gamma^*}{\rho}\right) + \eta\mu\left(\frac{\beta^*}{\rho}\right) \eta\mu\left(\frac{\gamma^*}{\rho}\right) \text{συν}(\phi).$$

Άσκηση 8.14.2 Για κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ και αντίστοιχες απέναντι γωνίες $\phi = 90^\circ, \chi$ και ψ ισχύει:

$$\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{\rho}\right) = \text{συν}\left(\frac{\beta^*}{\rho}\right) \text{συν}\left(\frac{\gamma^*}{\rho}\right).$$

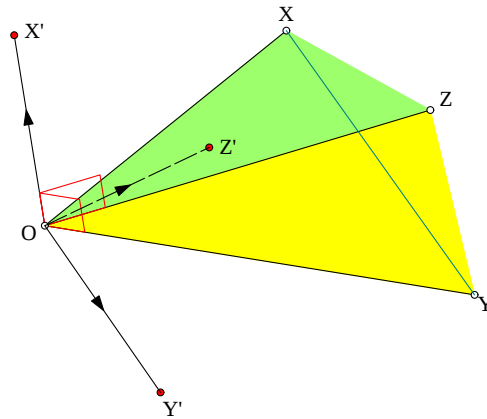
Άσκηση 8.14.3 Δείξε ότι σε μία σφαίρα υπάρχουν άπειρα ισόπλευρα τρίγωνα, των οποίων τα μήκη α^* των πλευρών και οι γωνίες ϕ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{2\rho}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 8.14.4 Τοποθέτησε την κορυφή A τετραέδρου ABΓΔ με μήκος ακμής α^* στο κέντρο μίας σφαίρας ακτίνας α^* και χρησιμοποίησε την προηγούμενη άσκηση για να δείξεις ότι το συνημίτονο της διέδρου γωνίας που σχηματίζουν δύο έδρες του τετραέδρου ισούται με $\frac{1}{3}$. (Δες και την Άσκηση 8.6.2)

Άσκηση 8.14.5 Δείξε ότι οι τρεις ίσες γωνίες των σφαιρικών ισοπλεύρων τριγώνων είναι μεγαλύτερες των 60 μοιρών. (Δες και την Άσκηση 9.3.1)

8.15 Η παραπληρωματική τριέδρος

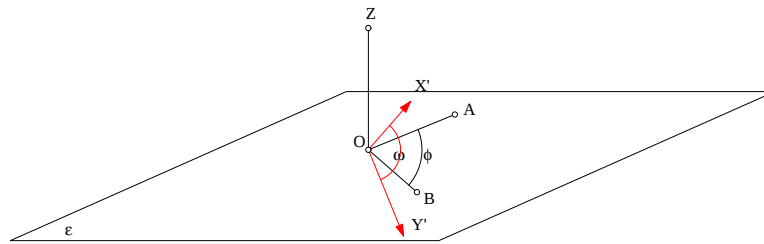


Σχήμα 695: Παραπληρωματική τριέδρος

Δοθείσης τριέδρου $OXYZ$, οι κάθετες στις έδρες της ορίζουν μία νέα τριέδρου $OX'Y'Z'$ που λέγεται **Παραπληρωματική τριέδρος** της $OXYZ$. Ακριβέστερα ο ορισμός αυτής της τριέδρου $OX'Y'Z'$ γίνεται ως εξής. Η ημιευθεία OX' είναι η κάθετη στο επίπεδο OYZ και προς το μέρος της OX , η ημιευθεία OY' είναι η κάθετη στο OZX και προς το μέρος της OY και η ημιευθεία OZ' είναι η κάθετη στο OXY και προς το μέρος της OZ . Οι τρεις αυτές ημιευθείες ορίζουν τις ακμές και επομένως την τριέδρου $OX'Y'Z'$.

Πρόταση 8.15.1 Οι έδρες της παραπληρωματικής $OX'Y'Z'$ της τριέδρου $OXYZ$ είναι οι παραπληρωματικές αντιστοίχων διέδρων γωνιών της $OXYZ$:

$$|X'OY'| + |\hat{Z}| = |Y'OZ'| + |\hat{X}| = |Z'OX'| + |\hat{Y}| = \pi.$$



Σχήμα 696: Παραπληρωματική τριέδρος

Απόδειξη: Στο επίπεδο ϵ το κάθετο στην OZ στο σημείο O περιέχονται αφενός η γωνία AOB που μετρά την διέδρο $\hat{Z}$ και αφ' ετέρου (εξ ορισμού) οι OX' και OY' . Η γωνία $\hat{Z}$ ισούται με την $\varphi = AOB$, όπου η ευθεία OA είναι η τομή του ϵ με το επίπεδο ZOX και OB η τομή του ϵ με το επίπεδο ZOY . Από τον ορισμό λοιπόν προκύπτει ότι οι γωνίες $\omega = X'OY'$ και $\varphi = AOB$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες και ομόρροπες, άρα είναι παραπληρωματικές. Ανάλογα δείχνουμε την σχέση και για τις άλλες γωνίες, ο.ε.δ.

Πρόταση 8.15.2 Η παραπληρωματική $OX''Y''Z''$ της παραπληρωματικής $OX'Y'Z'$ της τριέδρου $OXYZ$ συμπίπτει με την αρχική τριέδρο $OXYZ$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό, η ακμή OZ'' της παραπληρωματικής της $OX'Y'Z'$ θα είναι κάθετη στις OX' , OY' και από την ίδια μεριά με την OZ' . Αυτή όμως την ιδιότητα την έχει και η OZ , ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.15.1 Εάν η τριέδρος γωνία $OXYZ$ έχει έδρες $\alpha=YOZ$, $\beta=ZOX$, $\gamma=XOY$ και διέδρες γωνίες $\phi(OX)$, $\chi(OY)$, $\psi(OZ)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε η παραπληρωματική της $OX'Y'Z'$ έχει αντίστοιχα έδρες

$$\alpha' = \pi - \phi, \quad \beta' = \pi - \chi, \quad \gamma' = \pi - \psi$$

και διέδρες

$$\phi' = \pi - \alpha, \quad \chi' = \pi - \beta, \quad \psi' = \pi - \gamma.$$

Απόδειξη: Οι πρώτες τρεις ισότητες αποδείχθηκαν στην Πρόταση 8.15.1. Οι επόμενες τρεις προκύπτουν εφαρμόζοντας την ίδια πρόταση στην παραπληρωματική της παραπληρωματικής που είναι (Πρόταση 8.15.2) η αρχική τριέδρος, ο.ε.δ.

Η ύπαρξη της παραπληρωματικής τριέδρου και ο συσχετισμός εδρών και διέδρων που προκύπτει από τις προηγούμενες πρότασεις δείχνει ότι οι έδρες και οι διέδρες μιάς τριέδρου είναι κατά κάποιο τρόπο ισοδύναμα στοιχεία. Οι μεν προσδιορίζουν τις δε. Σε αυτό τον δυϊσμό οφείλεται και το δεύτερο θεώρημα του συνημιτόνου που προκύπτει από το πρώτο εφαρμόζοντάς το στην παραπληρωματική τριέδρο.

Πρόταση 8.15.3 Έστω τριέδρος γωνία $OAB\Gamma$ με έδρες $\alpha=BO\Gamma$, $\beta=GOA$, $\gamma=AOB$ και διέδρες γωνίες $\phi(OA)$, $\chi(OB)$, $\psi(O\Gamma)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε ισχύει

$$\text{συν}(\phi) = -\text{συν}(\chi)\text{συν}(\psi) + \eta\mu(\chi)\eta\mu(\psi)\text{συν}(\alpha).$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον τύπο του συνημιτόνου (Πρόταση 8.14.2) στην παραπληρωματική διέδρο λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις του Πορίσματος 8.15.1:

$$\begin{aligned} \text{συν}(\alpha') &= \text{συν}(\beta')\text{συν}(\gamma') + \eta\mu(\beta')\eta\mu(\gamma')\text{συν}(\phi') \Leftrightarrow \\ \text{συν}(\pi - \phi) &= \text{συν}(\pi - \chi)\text{συν}(\pi - \psi) + \eta\mu(\pi - \phi)\eta\mu(\pi - \psi)\text{συν}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \\ -\text{συν}(\phi) &= \text{συν}(\chi)\text{συν}(\psi) - \eta\mu(\chi)\eta\mu(\psi)\text{συν}(\alpha), \end{aligned}$$

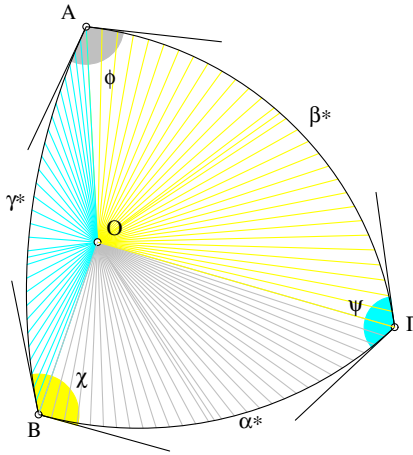
ο.ε.δ.

Και αυτή η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί όπως και ο Πρώτος σφαιρικός τύπος συνημιτόνου (Πρόταση 8.14.3) ως σχέση μεταξύ στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου που αποτελεί η τριέδρος σε μιά σφαίρα. Ακολουθώντας τους συμβολισμούς της Παραγράφου 8.14 μεταφράζουμε την προηγούμενη πρόταση στον λεγόμενο **Δεύτερο σφαιρικό τύπο συνημιτόνου**.

Πρόταση 8.15.4 Γιά κάθε σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους α^* , β^* , γ^* και αντίστοιχες απέναντι γωνίες ϕ , χ και ψ ισχύει:

$$\text{συν}(\phi) = -\text{συν}(\chi)\text{συν}(\psi) + \eta\mu(\chi)\eta\mu(\psi)\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{\rho}\right),$$

όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας.



Σχήμα 697: Σφαιρικό τρίγωνο

Σχόλιο Ο τύπος αυτός, μεταξύ άλλων, τονίζει και το γεγονός ότι τα σφαιρικά τρίγωνα προσδιορίζονται πλήρως από τις γωνίες τους ϕ, χ και ψ . Πράγματι, αν δοθούν οι γωνίες αυτές τότε λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση ως προς α^* ευρίσκουμε το μήκος της πλευράς του τριγώνου και από τους αντίστοιχους τύπους για τις άλλες πλευρές βρίσκουμε συνολικά όλες τις πλευρές του τριγώνου. Έχουμε εδώ μία ουσιαστική διαφορά από τα συνηθισμένα τρίγωνα του επιπέδου. Εκεί η γνώση των γωνιών δεν αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό του τριγώνου. Εκεί από τις γωνίες συμπεραίνουμε το σχήμα του τριγώνου αλλά όχι το μέγεθος. Υπάρχουν πολλά τρίγωνα με τις ίδιες γωνίες που είναι μεταξύ τους όμοια. Αντίθετα στην σφαίρα δεν υπάρχουν διαφορετικά τρίγωνα με τις ίδιες γωνίες. Εδώ δεν υπάρχει ομοιότητα.

Η αναλογία πάντως των σφαιρικών με τα ευκλείδεια επίπεδα τρίγωνα υφίσταται σε πολλές περιπτώσεις, όπως λ.χ. και στο επόμενο ανάλογο του τύπου του ημιτόνου που αναφέρεται ως **Σφαιρικός τύπος του ημιτόνου**.

Πρόταση 8.15.5 Έστω τριέδρος γωνία $OAB\Gamma$ με έδρες $\alpha = BO\Gamma$, $\beta = \Gamma O A$, $\gamma = A O B$ και διέδρες γωνίες $\phi(OA)$, $\chi(OB)$, $\psi(O\Gamma)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε ισχύει

$$\frac{\eta\mu(\phi)}{\eta\mu(\alpha)} = \frac{\eta\mu(\chi)}{\eta\mu(\beta)} = \frac{\eta\mu(\psi)}{\eta\mu(\gamma)}.$$

Απόδειξη: Μία απλή απόδειξη προκύπτει τετραγωνίζοντας τον τύπο του συνημιτόνου (Πρόταση 8.14.2):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\phi) \Rightarrow \\ (\cos(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\gamma))^2 &= (\sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\phi))^2 \Rightarrow \\ \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2\cos(\gamma)^2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2\cos(\phi)^2 \\ &= \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2(1 - \sin(\phi)^2) \\ &= 1 - \cos(\beta)^2 - \cos(\gamma)^2 + \cos(\beta)^2\cos(\gamma)^2 - \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2\sin(\phi)^2 \Rightarrow \\ \cos(\alpha)^2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= 1 - \cos(\beta)^2 - \cos(\gamma)^2 - \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2\sin(\phi)^2. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}\eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\gamma)^2 \eta\mu(\phi)^2 &= 1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 - \sigma\upsilon\nu(\gamma)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma) \Leftrightarrow \\ \eta\mu(\phi)^2 &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 - \sigma\upsilon\nu(\gamma)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma)}{\eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\gamma)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{\eta\mu(\phi)^2}{\eta\mu(\alpha)^2} &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 - \sigma\upsilon\nu(\gamma)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma)}{\eta\mu(\alpha)^2 \eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\gamma)^2}.\end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι συμμετρικός ως προς τα α, β και γ , συνεπώς θα είναι ο ίδιος και για τα άλλα πηλικά $\frac{\eta\mu(\chi)^2}{\eta\mu(\beta)^2}, \frac{\eta\mu(\psi)^2}{\eta\mu(\gamma)^2}$, ο.ε.δ.

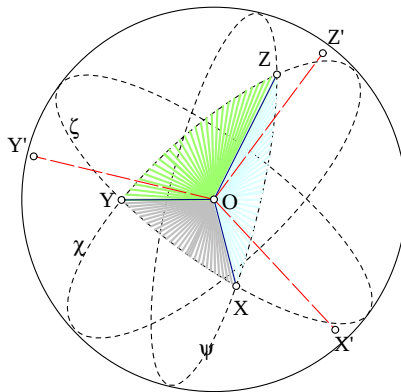
Η μετάφραση του προηγούμενου τύπου για σφαιρικά τρίγωνα δίδεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.15.6 Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ και αντίστοιχες απέναντι γωνίες ϕ, χ και ψ ισχύει:

$$\frac{\eta\mu(\phi)}{\eta\mu(\frac{\alpha^*}{\rho})} = \frac{\eta\mu(\chi)}{\eta\mu(\frac{\beta^*}{\rho})} = \frac{\eta\mu(\psi)}{\eta\mu(\frac{\gamma^*}{\rho})},$$

όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας.

Η επόμενη εικόνα δείχνει την παραπληρωματική τριέδρου $OX'Y'Z'$ μιάς τριέδρου $OXYZ$ που η κορυφή της έχει τοποθετηθεί στο κέντρο της σφαίρας. Κάθε έδρα της τριέδρου $OXYZ$ ορίζει ένα επίπεδο διά του O και αυτό τέμνει την σφαίρα κατά ένα μέγιστο κύκλο. Έτσι το επίπεδο XOY τέμνει στην σφαίρα τον μέγιστο κύκλο ζ και το Z' είναι ο πόλος του ζ από την μεριά που είναι και το Z . Ανάλογα και τα άλλα σημεία X' και Y' είναι οι πόλοι των μεγίστων κύκλων που ορίζουν οι έδρες της τριέδρου λαμβανόμενοι από την μεριά της έδρας που ευρίσκεται και ολόκληρη η αρχική τριέδρος.



Σχήμα 698: Η παραπληρωματική τριέδρος

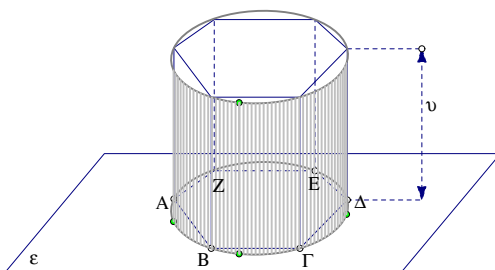
Άσκηση 8.15.1 Δείξε ότι το σφαιρικό ισόπλευρο τρίγωνο, του οποίου και οι τρεις γωνίες είναι ορθές, είναι ίσο με το παραπληρωματικό του.

Κεφάλαιο 9

Εμβαδά στο χώρο, όγκοι

9.1 Εμβαδά στο χώρο

Το εμβαδόν πολυεδρικών επιφανειών στηρίζεται στους ορισμούς και τις ιδιότητες του εμβαδού επιπέδων σχημάτων. Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές μήκους α , β και γ είναι $2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$, το εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου πλευράς δ είναι $6\delta^2$ και ανάλογα υπολογίζονται τα εμβαδά όλων των πολυέδρων προσθέτοντας τα εμβαδά των εδρών που τα αποτελούν. Το εμβαδόν των πολυέδρων λοιπόν δεν παρουσιάζει δυσκολίες και επομένως θεωρητικό ενδιαφέρον (δες ωστόσο τις ασκήσεις παρακάτω). Εκεί που παρουσιάζονται δυσκολίες είναι στα εμβαδά καμπύλων επιφανειών, όπως ο κύλινδρος, ο κώνος, η σφαίρα, καθώς και τμημάτων αυτών των επιφανειών. Ο ορισμός του εμβαδού αυτών των επιφανειών ή/και τμημάτων τους με έναν γενικό τρόπο, παρόμοια με τον ορισμό μήκους γενικών καμπυλών είναι αντικείμενο της *Διαφορικής γεωμετρίας* (εμβαδόν χωρίων επιφάνειας [dC76, σ. 114], στοιχείο όγκου υποπολλαπλότητας [Σπί94, σελ. 130]) και ξεπερνά τα πλαίσια αυτού του μαθήματος. Αποδεικνύεται ωστόσο ότι το εμβαδόν του κώνου, του κυλίνδρου και της σφαίρας μπορεί να ορισθεί ως όριο εμβαδών πολυέδρων εγγεγραμμένων σε αυτές τις επιφάνειες. Η διαδικασία είναι, στην ουσία, η ίδια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό του μήκους και του εμβαδού του κύκλου (Παράγραφος 6.5). Το **Εμβαδόν κώνου** ορίζεται ως το όριο των εμβαδών κανονικών πυραμίδων εγγεγραμμένων στον κώνο. Παρόμοια το **Εμβαδόν του κυλίνδρου** ορίζεται ως όριο κανονικών πρισμάτων εγγεγραμμένων στον κύλινδρο. Σε αυτά τα δύο σχήματα το εμβαδόν των βάσεων είναι αυτό του κύκλου, επομένως το ενδιαφέρον εστιάζεται στον υπολογισμό του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας. Ως **Παράπλευρο εμβαδόν** του κυλίνδρου θεωρούμε το όριο των



Σχήμα 699: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου

παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πρισμάτων των εγγεγραμμένων στον κύλινδρο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών τους. Ας συμβολίζουμε πάλι με $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην Παράγραφο 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο (Π_1) εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον κ και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Εάν p_ν συμβολίζει την περίμετρο του Π_ν τότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κανονικού πρίσματος με βάση το Π_ν είναι

$$u \cdot p_\nu,$$

όπου u το ύψος του πρίσματος. Από το Λήμμα 6.2.2 προκύπτει ότι η ακολουθία

$$u \cdot p_1, \quad u \cdot p_2, \quad u \cdot p_3, \dots$$

είναι αύξουσα. Και από το Λήμμα 6.2.3 προκύπτει ότι η ακολουθία είναι και φραγμένη, άρα κατά το Αξίωμα 6.1.1 η ακολουθία θα συγκλίνει. Το όριο ακριβώς αυτής της ακολουθίας ονο-

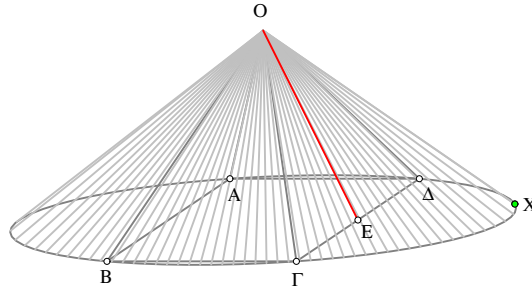
μάζουμε παράπλευρο **Εμβαδόν του κυλίνδρου**. Προκύπτει λοιπόν από τα προηγούμενα (Πόρισμα 6.3.1) η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.1.1 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου είναι ίσο με

$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon,$$

όπου ρ η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και υ το ύψος του.

Ο υπολογισμός του παράπλευρου εμβαδού του κώνου γίνεται με ανάλογο τρόπο. Ως **Παρά-**



Σχήμα 700: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώνου

πλευρο εμβαδόν του κώνου θεωρούμε το όριο των παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πυραμίδων των εγγεγραμμένων στον κώνο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών τους. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κανονικού κώνου με βάση το Π_ν είναι

$$\frac{1}{2} \cdot \upsilon_\nu \cdot p_\nu,$$

όπου υ_ν το ύψος της τριγωνικής έδρας του πρίσματος (όχι το ύψος του κώνου, ούτε η γενέτειρα, αλλά το μήκος του τμήματος όπως το OE στο σχήμα-700). Και πάλι διαπιστώνουμε εύκολα ότι η ακολουθία

$$\frac{1}{2} \cdot \upsilon_1 \cdot p_1, \quad \frac{1}{2} \cdot \upsilon_2 \cdot p_2, \quad \frac{1}{2} \cdot \upsilon_3 \cdot p_3, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη από τον αριθμό

$$\frac{1}{2} \cdot \upsilon \cdot (2\pi\rho),$$

όπου $\upsilon = |OX|$ το μήκος της γενέτειρας του κώνου και ρ η ακτίνα του κύκλου της βάσης του. Και πάλι κατά το Αξίωμα 6.1.1 η ακολουθία θα συγκλίνει. Το όριο ακριβώς αυτής της ακολουθίας ονομάζουμε παράπλευρο **Εμβαδόν του κώνου**.

Πρόταση 9.1.2 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κώνου είναι ίσο με

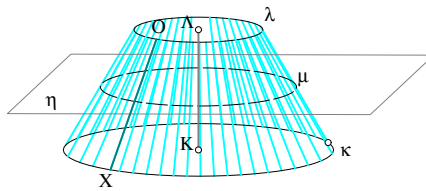
$$\epsilon = \pi \cdot \upsilon \cdot \rho,$$

όπου ρ η ακτίνα της βάσης του κώνου και υ το μήκος της γενέτειράς του.

Απόδειξη: Σκιαγραφώ την απόδειξη γιατί δεν θέλω να μπω στις λεπτομέρειες για τα όρια. Δείχνουμε λοιπόν πρώτα ότι η ακολουθία

$$v_1, v_2, v_3, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνει και μάλιστα προς το $v = |OX|$. Για τις περιμέτρους p_ν γνωρίζουμε ήδη ότι συγκλίνουν στο $2\pi\rho$. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης χρειάζεται και ο κανόνας για τα όρια, σύμφωνα με τον οποίο το όριο του γινομένου ακολουθιών που συγκλίνουν είναι το γινόμενο των ορίων. Κατ' αυτόν λοιπόν τον κανόνα το όριο της ακολουθίας $(v_\nu)(p_\nu)$ θα είναι το $v \cdot (2\pi\rho)$ απ' όπου προκύπτει και ο τύπος του εμβαδού, ο.ε.δ.

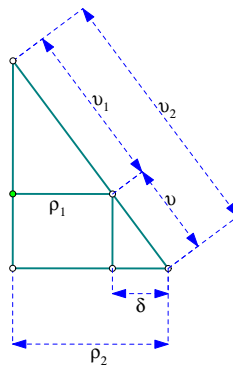


Σχήμα 701: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κόλουρου κώνου

Ο υπολογισμός του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας κόλουρου κώνου ανάγεται στον αντίστοιχο υπολογισμό για κώνους. Η παράπλευρη επιφάνεια του κόλουρου κώνου μπορεί να θεωρηθεί ως η διαφορά της παράπλευρης του κώνου ως προς την μεγάλη βάση (κύκλος κ στο σχήμα-701) μείον την παράπλευρη του κώνου ως προς την μικρή βάση (κύκλος λ στο σχήμα-701). Εφαρμόζοντας τον τύπο έχουμε συνεπώς ότι το εμβαδόν δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = \pi(v_2\rho_2 - v_1\rho_1),$$

όπου ρ_1, ρ_2, v_1, v_2 είναι τα μήκη γενέτειρας και ακτίνας βάσης των δύο κώνων των οποίων η διαφορά είναι ο κόλουρος κώνος.



Σχήμα 702: Τομή κόλουρου κώνου

Θέτοντας $v = v_2 - v_1$, $\delta = \rho_2 - \rho_1$ και αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v_2\rho_2 - v_1\rho_1 &= (v_1 + v)(\rho_1 + \delta) - v_1\rho_1 \\ &= v\rho_1 + v_1\delta + v\delta \\ &= v\rho_1 + (v\frac{\rho_1}{\delta})\delta + v\delta \\ &= v(\rho_1 + \rho_1 + \delta) \\ &= v(\rho_1 + \rho_2). \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση στην μεσαία ισότητα προκύπτει από την ομοιότητα των αντιστοίχων ορθογωνίων τριγώνων. Το ημιάθροισμα $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ είναι η ακτίνα της μεσαίας τομής του κόλουρου κώνου και έτσι έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.1.3 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κόλουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

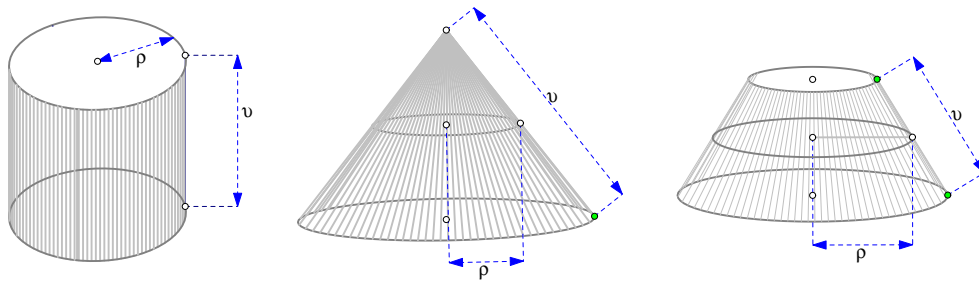
$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot v,$$

όπου ρ η ακτίνα της μεσαίας τομής του και v το μήκος της γενέτειράς του.

Πόρισμα 9.1.1 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου καθώς και κόλουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = 2\pi\rho v,$$

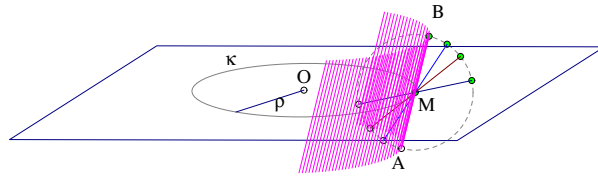
όπου v το μήκος της γενέτειρας και ρ η ακτίνα της μεσαίας τομής του στερεού.



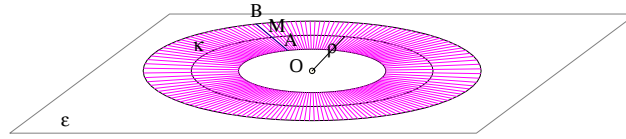
Σχήμα 703: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, εννιαίος τύπος

Απόδειξη: Το πόρισμα απλά ενοποιεί τα επιμέρους αποτελέσματα των τριών προηγούμενων προτάσεων βάσει της παρατήρησης ότι για τον κώνο η μεσαία τομή είναι ο κύκλος με ακτίνα το μισό της ακτίνας της βάσης, ενώ στον κύλινδρο η μεσαία τομή είναι κύκλος ίσος με αυτόν της βάσης, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Ο τελευταίος τύπος δείχνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB περιστρεφόμενο περί το μέσον του M παράγει παράπλευρη επιφάνεια κόλουρου κώνου με τό ίδιο εμβαδόν, ανεξάρτητα της κλίσης του προς το επίπεδο του κύκλου περιστροφής χ (σχήμα-704). Όταν το AB είναι κάθετο στο επίπεδο του χ τότε η παράπλευρη επιφάνεια είναι αυτή ενός κυλίνδρου. Όταν το AB είναι στο επίπεδο του χ και μικρότερο από την ακτίνα του χ , τότε παράγεται ένας επίπεδος κυκλικός δακτύλιος (σχήμα-705).



Σχήμα 704: Εμβαδόν παράπλευρης ανεξάρτητο της κλίσης του AB

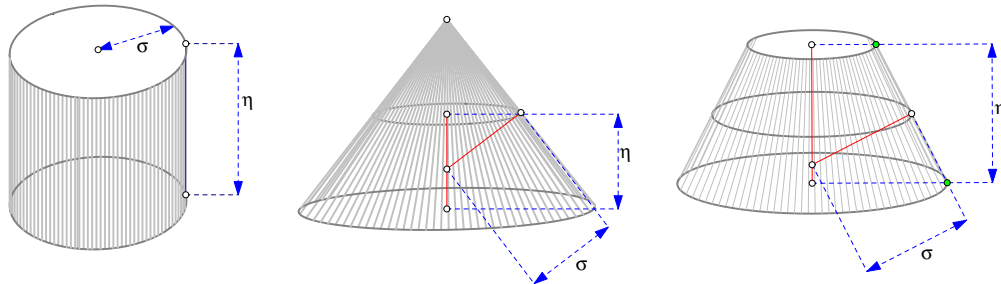


Σχήμα 705: Δακτύλιος όταν το AB περιέχεται στο ε

Πόρισμα 9.1.2 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου καθώς και κολουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = 2\pi\sigma\eta,$$

όπου σ η απόσταση του μέσου της γενέτειρας από τον άξονα και η το ύψος του στερεού.



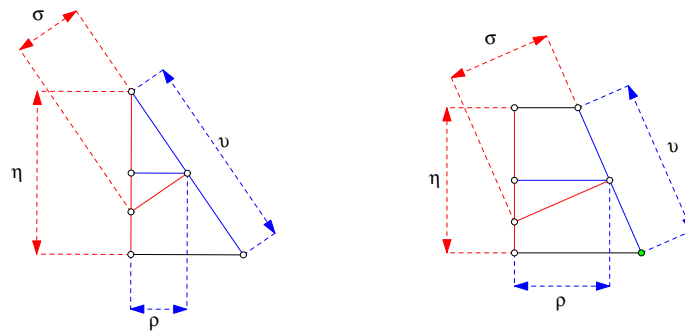
Σχήμα 706: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, εννιαίος τύπος II

Απόδειξη: Απόδειξη διά του σχήματος. Στην περίπτωση του κυλίνδρου το πόρισμα ταυτίζεται με το προηγούμενο. Στις περιπτώσεις του κώνου και του κολουρου κώνου, από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές (ρ, σ) και (η, υ) αντίστοιχα προκύπτει

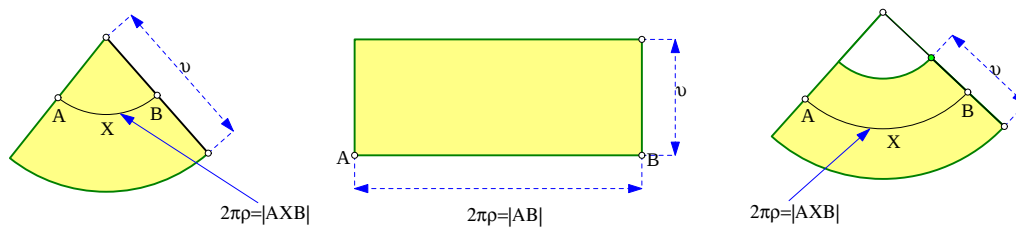
$$\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\eta}{\upsilon} \Rightarrow \rho\upsilon = \sigma\eta.$$

Αντικαθιστώντας το $\rho\upsilon$ στον τύπο του προηγούμενου πορίσματος αποδεικνύουμε το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Αν χρησιμοποιήσουμε τα περί αναπτύγματος που αναφέρθηκαν στις παραγράφους 8.9, 8.8 και ειδικά το ότι η διαδικασία του αναπτύγματος διατηρεί τα μήκη και τα εμβαδά, οι τύποι, που αποδείχθηκαν εδώ με την χρήση ορίων, ανάγονται απ' αυτήν την σκοπιά σε απλούς υπολογισμούς επιπέδων εμβαδών. Το επόμενο σχήμα δείχνει τα αναπτύγματα κώνου, κυλίνδρου και κολουρου κώνου και τα εμβαδά τους. Και στις τρεις περιπτώσεις το



Σχήμα 707: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, εννιαίος εναλλακτικός τύπος

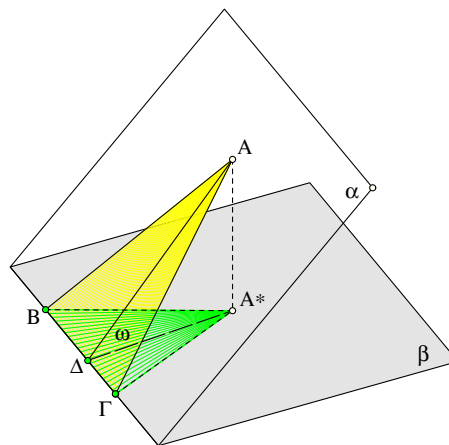


Σχήμα 708: Εμβαδόν μέσω αναπτύγματος

u είναι το μήκος της γενέτειρας και το ρ είναι η ακτίνα της μέσης τομής και ευρίσκεται από την αντίστοιχη ισότητα που αναγράφεται. Σε αυτήν το δεξί μέρος είναι, στις περιπτώσεις του κώνου και του κολουρού κώνου, το μήκος τόξου AXB και στην περίπτωση του κυλίνδρου το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Άσκηση 9.1.1 Δείξε ότι από τα παραλληλεπίπεδα που εγγράφονται σε δεδομένο κύλινδρο ο κύβος έχει την μέγιστη δυνατή παράπλευρη επιφάνεια.

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την Άσκηση 2.13.6.



Σχήμα 709: Προβολή τριγώνου σε άλλο επίπεδο

Άσκηση 9.1.2 Δείξε ότι δοθέντων δύο επιπέδων α και β και τριγώνου $AB\Gamma$ του επιπέδου α , έτσι ώστε η πλευρά του $B\Gamma$ να είναι επί της τομής των α και β , το εμβαδόν της προβολής $A^*B\Gamma$ του $AB\Gamma$ στο β είναι

$$\epsilon(A^*B\Gamma) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma),$$

όπου ω η γωνία των επιπέδων α και β .

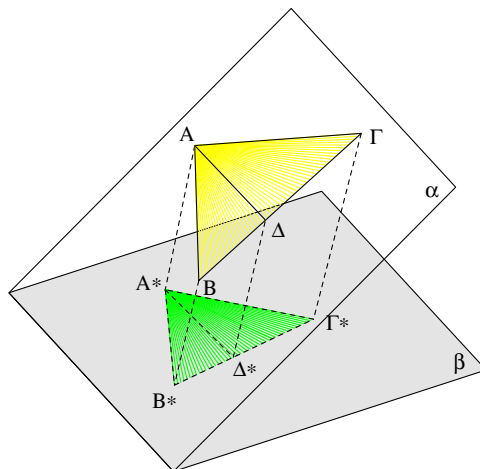
Άσκηση 9.1.3 Δείξε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει και όταν το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει την πλευρά του $B\Gamma$ παράλληλο προς την τομή των α και β .

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το Πρόγραμμα 8.1.2 και μετάφερε το $AB\Gamma$ στο επίπεδο α παράλληλα εαυτώ έτσι ώστε η ακμή του $B\Gamma$ να συμπίπτει με την τομή των α, β .

Άσκηση 9.1.4 Δείξε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ του επιπέδου α και την προβολή του $A^*B^*\Gamma^*$ σε επίπεδο β . Δηλαδή

$$\epsilon(A^*B^*\Gamma^*) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma),$$

όπου ω η γωνία των επιπέδων α και β .



Σχήμα 710: Προβολή τριγώνου σε άλλο επίπεδο

Υπόδειξη: Από μία κορυφή του $AB\Gamma$ λ.χ. την A φέρε παράλληλο $A\Delta$ προς την τομή των α και β . Εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση στα δύο τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ και πρόσθεσε ή αφάιρεσε, ανάλογα με το αν το Δ είναι μέσα ή έξω από το $B\Gamma$.

Άσκηση 9.1.5 Δείξε ότι για κάθε κυρτό πολύγωνο $AB\Gamma\Delta\ldots$ του επιπέδου α και την προβολή του $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*\ldots$ στο επίπεδο β ισχύει η σχέση μεταξύ των εμβαδών τους:

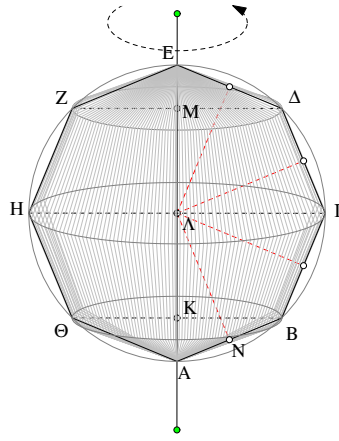
$$\epsilon(A^*B^*\Gamma^*\Delta^*\ldots) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma\Delta\ldots),$$

όπου ω η γωνία των επιπέδων α και β .

Υπόδειξη: Φέρε από μία κορυφή του $AB\Gamma\Delta\ldots$ τις διαγώνιες και διαίρεσέ το σε τρίγωνα. Κατόπιν εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση και πρόσθεσε.

9.2 Εμβαδόν της σφαίρας

Το εμβαδόν της σφαίρας υπολογίζεται μέσω των εμβαδών στερεών που προκύπτουν από εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα. Θεωρούμε ότι η σφαίρα παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου κ περί διάμετρο AE αυτού. Μία προσέγγιση της σφαίρας παράγεται από περιστροφή κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο κ . Ας συμβολίζουμε πάλι με $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην Παράγραφο 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο (Π_1) εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον κ και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Κατά την περιστροφή ενός τέτοιου πολυγώνου περί την διάμετρο AE , που υποθέτουμε ότι συμπίπτει με μία διαγώνιο του πολυγώνου, παράγεται μία επιφάνεια που αποτελείται από κώνους και κόλουργους κώνους. Η παράπλευρη επιφάνεια αυτών των κώνων και κόλουργων κώνων



Σχήμα 711: Προσέγγιση επιφανείας σφαίρας

υπολογίσθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και σύμφωνα με τους τύπους που αποδείχθηκαν (Πόρισμα 9.1.2) δίδει μία συνολική επιφάνεια, που στην περίπτωση του οκταγώνου (Π_2 κατά τους συμβολισμούς μας, σχήμα-711) είναι

$$\epsilon_2 = (2\pi \cdot \eta_2) \cdot (|AK| + |K\Lambda| + |\Lambda M| + |ME|) = (2\pi \cdot \eta_2) \cdot |AE| = (2\pi \cdot \eta_2)(2\rho)$$

όπου $\eta_2 = |\Lambda N|$ είναι η απόσταση της πλευράς του οκταγώνου (Π_2) από το κέντρο του κύκλου, που είναι ίση με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου και ρ η ακτίνα του κύκλου κ στον οποίον είναι εγγεγραμμένα τα πολύγωνα. Θεωρούμε λοιπόν ότι το εμβαδόν της επιφανείας της σφαίρας είναι το όριο της ακολουθίας που προκύπτει ανάλογα

$$\epsilon_1 = (4\pi\rho)\eta_1, \quad \epsilon_2 = (4\pi\rho)\eta_2, \quad \epsilon_3 = (4\pi\rho)\eta_3, \dots$$

Το ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει το συμπεραίνουμε από το ότι η ακολουθία των ακτίνων

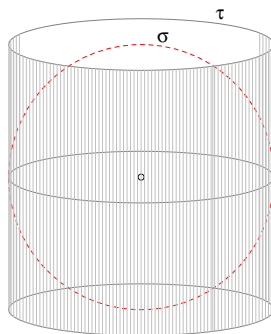
$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

των κύκλων των εγγεγραμμένων στα πολύγωνα Π_ν (που με την σειρά τους είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο με διάμετρο $|AE| = 2\rho$) συγκλίνει στο ρ . Συνεπώς το όριο αυτών των εμβαδών ϵ_ν είναι το

$$\epsilon = 4\pi\rho^2.$$

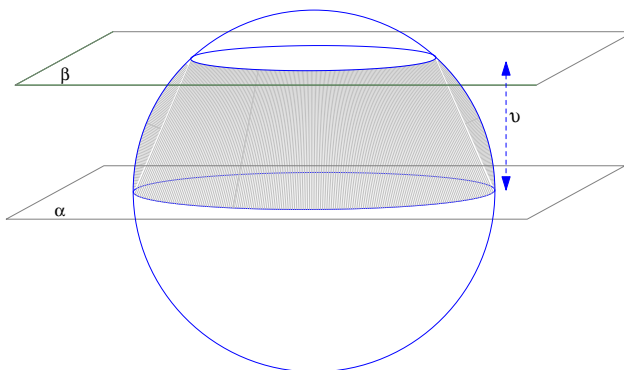
Μετά λοιπό από αρκετές παραδοχές σχετικά με το τί θα ονομάζουμε εμβαδόν της σφαίρας καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.2.1 Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας ρ είναι $\epsilon = 4\pi\rho^2$.



Σχήμα 712: Σφαίρα και περιβάλλον κύλινδρος

Πόρισμα 9.2.1 Η σφαίρα σ έχει το ίδιο εμβαδόν με την παράπλευρη επιφάνεια του περιβάλλοντος αυτήν κυλίνδρου τ .

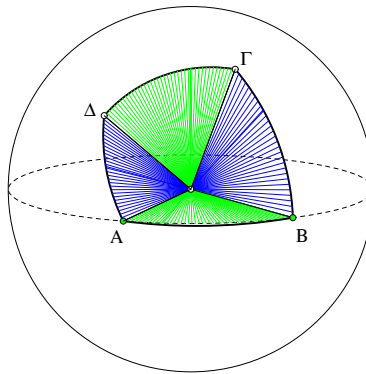


Σχήμα 713: Εμβαδόν σφαιρικής ζώνης

Ονομάζουμε **Σφαιρική ζώνη** το τμήμα της σφαίρας που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων που την τέμνουν. Η απόσταση u των επιπέδων λέγεται **Ύψος** της σφαιρικής ζώνης. Το εμβαδόν της σφαιρικής ζώνης ορίζεται, παρόμοια με αυτό της σφαίρας, ως όριο εμβαδών σωμάτων εγγεγραμμένων στην σφαιρική ζώνη. Θεωρούμε την σφαιρική ζώνη ως παραγόμενη από την περιστροφή τόξου AB κύκλου κ περί διάμετρο XY αυτού (σχήμα-714). Το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται ορίζεται ως το όριο του αθροίσματος των παράπλευρων επιφανειών των κόλουργων κώνων που προκύπτουν χωρίζοντας το τόξο σε n ίσα μέρη και θεωρώντας την αντίστοιχη πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα σημεία διαίρεσης. Ως πρώτη πολυγωνική γραμμή P_1 παίρνουμε το ίδιο το ευθύγραμμο τμήμα AB , οπότε κατά την περιστροφή του προκύπτει κόλουργος κώνος. Η δεύτερη πολυγωνική γραμμή προκύπτει παίρνοντας το μέσον Γ του τόξου και θεωρώντας την πολυγωνική γραμμή $A\Gamma B$. Προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο μία ακολουθία πολυγωνικών γραμμών $P_1, P_2, P_3, \dots$ που προσεγγίζει

9.3 Εμβαδόν σφαιρικών πολυγώνων

Έχοντας το εμβαδόν της σφαίρας μπορούμε να ρίξουμε μία σύντομη ματιά στα στοιχειώδη σχήματα που ορίζονται πάνω στην επιφάνειά της και τα εμβαδά τους. Τα πράγματα είναι ανάλογα με το επίπεδο. Εξ άλλου σε μία τεράστια σφαίρα (ως προς το μέγεθός μας), όπως η γη, είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε την πραγματική ευθεία από τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας. Όπως και στο επίπεδο, το εμβαδόν ορίζεται πρώτα για **Σφαιρικά πολύγωνα**, δηλαδή πολύγωνα πάνω στην σφαίρα, των οποίων οι πλευρές είναι τόξα μεγίστων κύκλων. Τα σφαιρικά πολύγωνα, κατ' αναλογία με τα σφαιρικά τρίγωνα, δημιουργούνται πάνω στην σφαίρα, τοποθετώντας την κορυφή μιάς πολυεδρικής γωνίας στο κέντρο της σφαίρας και θεωρώντας τις τομές των εδρών της με την σφαίρα. Οι τομές αυτές ορίζουν τις πλευρές του σφαιρικού πολυγώνου. Οι διέδρες της πολυεδρικής γωνίας ορίζουν τις γωνίες του σφαιρικού πολυγώνου. Δύο σφαιρικά πολύγωνα λέγονται **Ίσα**, όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες αντίστοιχες γωνίες. Για απλότητα περιοριζόμαστε σε **Κυρτά σφαιρικά πολύγωνα**, δηλαδή πολύγωνα των οποίων οι πλευρές (τόξα μεγίστων κύκλων) προεκτεινόμενες αφήνουν όλο το πολύγωνο από την μία μεριά (σε ένα από τα δύο ημισφαίρια που ορίζει ο μέγιστος κύκλος-φορέας της πλευράς). Οι τρεις πρώτες ιδιότητες που απαιτούμε από το



Σχήμα 716: Κυρτό σφαιρικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ

εμβαδόν, είναι οι ίδιες με αυτές του εμβαδού στο επίπεδο (3.1). Την μεγάλη διαφορά κάνει η τελευταία ιδιότητα. Όσο μεγάλη και να είναι η σφαίρα Σ , την ακτίνα της οποίας υποθέτουμε ίση με ρ , έχει πάντως πεπερασμένο εμβαδόν, σε αντίθεση με το Ευκλείδειο επίπεδο.

Ιδιότητα 9.3.1 Δύο ίσα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά.

Ιδιότητα 9.3.2 Ένα πολύγωνο Π που συντίθεται από άλλα, πεπερασμένα το πλήθος, πολύγωνα $\Pi, \Pi', \Pi'', \dots$ που δεν επικαλύπτονται έχει εμβαδόν το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων

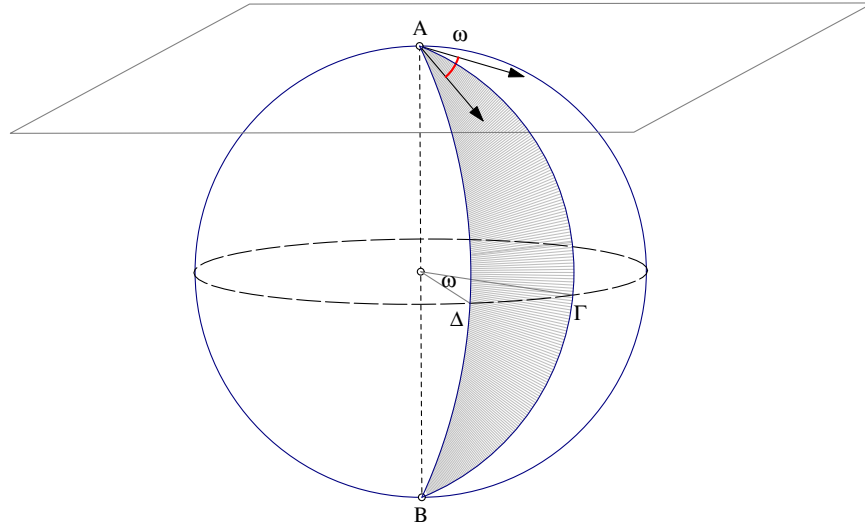
$$\epsilon(\Pi) = \epsilon(\Pi') + \epsilon(\Pi'') + \dots$$

Ιδιότητα 9.3.3 Ένα πολύγωνο Π που περιέχεται μέσα σέ ένα άλλο Π' έχει εμβαδόν

$$\epsilon(\Pi) < \epsilon(\Pi').$$

Ιδιότητα 9.3.4 Το εμβαδόν ολόκληρης της σφαίρας είναι $4\pi\rho^2$.

Σχόλιο-1 Και γι' αυτές τις ιδιότητες Ισχύει το ανάλογο με το σχόλιο που κάναμε και για το εμβαδόν πολυγώνων (Παράγραφος 3.1). Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου θα δείξουν, ότι, όπως και στο Ευκλείδειο επίπεδο, οι ιδιότητες 9.3.1 - 9.3.4 που δεχόμαστε για το εμβαδόν, καθορίζουν πλήρως τον τύπο του εμβαδού για σφαιρικά τρίγωνα (Θεώρημα 9.3.1) και γενικότερα το εμβαδόν κυρτών σφαιρικών πολυγώνων.



Σχήμα 717: Σφαιρική άτρακτος γωνίας ω

Πρόταση 9.3.1 Το εμβαδόν σφαιρικής ατράκτου T γωνίας ω (σε ακτίνια) είναι

$$\epsilon(T) = \omega(2\rho^2).$$

Απόδειξη: Αν η γωνία της σφαιρικής ατράκτου $T=AB\Gamma\Delta$ είναι της μορφής $\omega = \frac{2\pi}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός, τότε η πρόταση ισχύει. Αυτό έπεται από την προσθετική Ιδιότητα 9.3.2 και την Ιδιότητα 9.3.4 που απαιτούμε από το εμβαδόν. Σύμφωνα με αυτές τοποθετώντας ν το πλήθος τέτοιες ατράκτους διαδοχικά καλύπτουμε όλη την σφαίρα και έχουμε

$$4\pi\rho^2 = \epsilon(\Sigma) = \nu\epsilon(T) \quad \Rightarrow \quad \epsilon(T) = \frac{2\pi}{\nu}2\rho^2.$$

Παρόμοια αν η γωνία είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π η πρόταση ισχύει. Ακριβέστερα αν

$$\omega = \frac{\mu}{\nu}(2\pi), \quad \mu \in 0 < \frac{\mu}{\nu} < 1$$

και το κλάσμα των θετικών ακεραίων μ και ν είναι ανάγωγο, τότε ισχύει πάλι

$$\epsilon(T) = \left(\frac{\mu}{\nu}2\pi\right)(2\rho^2).$$

Τούτο διότι η γωνία γράφεται σαν άθροισμα μ γωνιών μέτρου $\frac{2\pi}{\nu}$ και επομένως η αντίστοιχη σφαιρική άτρακτος T γράφεται σαν ένωση μ διαδοχικών σφαιρικών ατράκτων εμβαδού, σύμφωνα με το προηγούμενο βήμα, $\frac{2\pi}{\nu}(2\rho^2)$. Συνεπώς και σ' αυτήν την περίπτωση

$$\epsilon(T) = \mu \frac{2\pi}{\nu}(2\rho^2) = \omega(2\rho^2).$$

Στην γενική περίπτωση, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.2.3 με τον ίδιο τρόπο που το κάναμε για επίπεδα εμβαδά. Έστω λοιπόν ότι η γωνία ω είναι της μορφής

$$\omega = \theta(2\pi), \quad \mu\epsilon \quad 0 < \theta < 1.$$

Κατά το προαναφερθέν λήμμα, για δοθέντα ακέραιο θετικό ν υπάρχει κατάλληλος ακέραιος μ έτσι ώστε

$$\frac{\mu}{\nu} < \theta < \frac{\mu+1}{\nu}.$$

Οι αντίστοιχες σφαιρικές άτρακτοι T_1, T, T_2 με γωνίες

$$\omega_1 = \frac{\mu}{\nu}(2\pi), \quad \omega = \theta(2\pi), \quad \omega_2 = \frac{\mu+1}{\nu}(2\pi),$$

τοποθετώντας τις έτσι ώστε η πρώτη πλευρά τους να ταυτίζεται, θα περιέχονται ο ένας μέσα στον άλλο και θα έχουμε

$$\epsilon(T_1) = \frac{2\pi\mu}{\nu}(2\rho^2) < \epsilon(T) < \epsilon(T_2) = \frac{2\pi(\mu+1)}{\nu}(2\rho^2).$$

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\delta = \epsilon(T) - (2\pi\theta)(2\rho^2),$$

είναι θετικός αριθμός τότε προκύπτει ότι η επόμενη ανισότητα

$$\begin{aligned} \delta = \epsilon(T) - (2\pi\theta)(2\rho^2) &< \epsilon(T) - (2\pi\frac{\mu}{\nu})(2\rho^2) \\ &< \epsilon(T_2) - (2\pi\frac{\mu}{\nu})(2\rho^2) \\ &= (2\pi\frac{\mu+1}{\nu})(2\rho^2) - (2\pi\frac{\mu}{\nu})(2\rho^2) \\ &= \frac{2\pi}{\nu}(2\rho^2). \end{aligned}$$

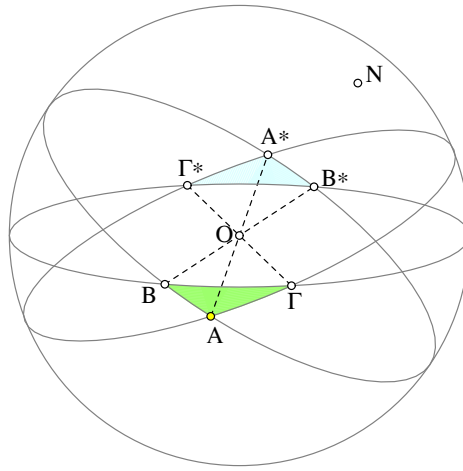
ισχύει για κάθε ν . Τούτο όμως είναι άτοπο διότι ο τελευταίος όρος μπορεί να γίνει μικρότερος του δ , αρκεί να πάρουμε κατάλληλο ν . Παρόμοια δείχνουμε ότι οδηγεί σε άτοπο η υπόθεση $\delta < 0$, άρα πρέπει $\delta = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης, ο.ε.δ.

Θεώρημα 9.3.1 Το εμβαδόν $\epsilon(T)$ του σφαιρικού τριγώνου T σφαίρας $\Sigma(\rho)$ με (διέδρες) γωνίες α, β και γ ισούται με

$$\epsilon(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\rho^2.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη στηρίζεται στην εξαιρετική συμμετρία της σφαίρας. Το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ορίζει μέσω των αντιδιαμετρικών σημείων των κορυφών του ένα ίσο και ε-πομένως ισοεμβαδικό (Ιδιότητα 9.3.1) τρίγωνο $A^*B^*\Gamma^*$. Το ημισφαίριο Σ_N (με πόλο N στο σχήμα-718) που ορίζεται από την πλευρά AB και περιέχει το τρίγωνο ονομάζω περιστασιακά βόρειο (και το άλλο νότιο), καλύπτεται πλήρως από τις σφαιρικές ατράκτους των γωνιών του τριγώνου με κάποιες επικαλύψεις:

- 1) Την άτρακτο $BA\Gamma$ που περιέχει το τρίγωνο.
- 2) Την άτρακτο $AB\Gamma$ που έχει κοινό με τον προηγούμενο το τρίγωνο $AB\Gamma$.



Σχήμα 718: Σφαιρικό τρίγωνο

3) Την άτρακτο $A^*\Gamma^*B^*$ που έχει στο νότιο ημισφαίριο το τρίγωνο $A^*B^*\Gamma^*$ ισοεμβαδικό του $AB\Gamma$. Η κάλυψη λοιπόν του βορείου ημισφαιρίου δίδει την ισότητα των εμβαδών

$$\epsilon(\Sigma_N) = 2\pi\rho^2 = [\alpha(2\rho)^2] + [\beta(2\rho)^2 - \epsilon(AB\Gamma)] + [\gamma(2\rho)^2 - \epsilon(AB\Gamma)].$$

Απλοποιώντας την εξίσωση παίρνουμε την ζητούμενη σχέση, ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.3.1 Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο του π .

Πόρισμα 9.3.2 Το εμβαδόν κυρτού σφαιρικού πολυγώνου Π με γωνίες $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι ίσο με

$$\epsilon(\Pi) = [(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - (n - 2)\pi] \cdot (\rho^2).$$

Απόδειξη: Αν το πολύγωνο έχει n κορυφές $A_1, A_2, \dots, A_n$, διάλεξε μία λ.χ. την A_1 και παραλείποντας την επόμενη A_2 , ένωσε την A_1 με τις $A_3, \dots, A_n$ σχηματίζοντας $(n-2)$ τρίγωνα. Το εμβαδόν του πολυγώνου είναι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων και κάθε ένα από τα τρίγωνα αυτά έχει εμβαδόν που δίδεται από το Θεώρημα 9.3.1 και είναι της μορφής $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)\rho^2$. Αθροίζοντας όλες τις γωνίες των διαφόρων αυτών τριγώνων παίρνουμε το άθροισμα $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, ενώ από τα $(n-2)$ το πλήθος τρίγωνα έχουμε το αφαιρετέο $(n-2)\pi$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Η ισότητα σφαιρικών πολυγώνων οριζομένων στην επιφάνεια μίας σφαίρας Σ ακτίνας ρ περιλαμβάνει την περίπτωση που τα δύο σχήματα είναι αντιδιαμετρικά, δηλαδή μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε το ένα να ταυτισθεί με το αντιδιαμετρικό του άλλου. Με αυτήν την έννοια αναφέρονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.3.1 τα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ ως ίσα.

Άσκηση 9.3.1 Δείξε ότι το εμβαδόν ϵ ενός σφαιρικού ισοπλεύρου τριγώνου σφαίρας ακτίνας ρ και η γωνία του a συνδέονται με τον τύπο

$$a = \frac{\epsilon}{3\rho^2} + \frac{\pi}{3}.$$

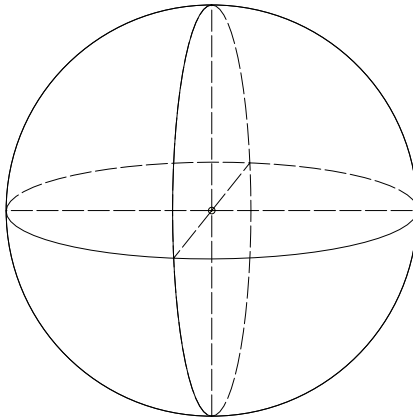
Συμπεράνε ότι η γωνία του σφαιρικού ισοπλεύρου είναι πάντοτε μεγαλύτερη των 60 μοιρών. (Δες και την Άσκηση 8.14.5)

9.4 Χαρακτηριστική του Euler

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μία εφαρμογή του τύπου του εμβαδού των σφαιρικών πολυγώνων συνδεδεμένη με πλακοστρώσεις της σφαίρας. Μία **Πλακόστρωση** της σφαίρας είναι μία πλήρης κάλυψη της με πλακάκια, δηλαδή κυρτά σφαιρικά πολύγωνα. Όπως τα αληθινά πλακάκια, απαιτούμε και εδώ να μην αλληλοκαλύπτονται και επιπλέον να έχουν κοινές κορυφές. Το τελευταίο σημαίνει ότι αν δύο πλακάκια είναι γειτονικά, τότε θα έχουν κοινή ή ολόκληρη ακμή ή κάποια κορυφή. Το θεώρημα του Euler λέει ότι σε μία τέτοια κάλυψη το πλήθος των πλακακιών, το συνολικό πλήθος των ακμών και το συνολικό πλήθος των κορυφών είναι αριθμοί συνδεδεμένοι μεταξύ τους.

Θεώρημα 9.4.1 Σε κάθε πλακόστρωση της σφαίρας με E το πλήθος πλακάκια που έχουν συνολικά A ακμές και συνολικά K κορυφές ισχύει

$$K + E = A + 2.$$



Σχήμα 719: Πλακόστρωση της σφαίρας με οκτώ ίσα πλακάκια

Απόδειξη: Το σχήμα δείχνει μία απλή περίπτωση πλακόστρωσης της σφαίρας με 8 ίσα μεταξύ τους τριγωνικά πλακάκια που είναι τρισσορθογώνια (έχουν και τις τρεις γωνίες τους ορθές). Αντιστοιχούν στον τεμαχισμό της σφαίρας σε 8 κομμάτια από τρία επίπεδα που είναι κάθετα ανά δύο και διέρχονται, και τα τρία, από το κέντρο της. Έχουμε λοιπόν $E = 8$, $K = 6$ και $A = 12$. Ας δούμε τώρα την γενική απόδειξη. Γράφουμε το εμβαδόν της σφαίρας $4\pi\rho^2$ σαν άθροισμα των εμβαδών των πλακακιών

$$4\pi\rho^2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_E.$$

Κάθε πλακάκι, δηλαδή κυρτό σφαιρικό πολύγωνο, έχει εμβαδόν που εκφράζεται με τις γωνίες του και το πλήθος των πλευρών του

$$\epsilon_\nu = ((\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\kappa) - (\kappa - 2)\pi)\rho^2.$$

Και το συνολικό εμβαδόν θα είναι ένα άθροισμα τέτοιων αθροισμάτων

$$4\pi\rho^2 = (\Sigma(\alpha) - \Sigma(\kappa\pi) + E(2\pi))\rho^2 \Leftrightarrow (2\pi)(2 - E) = \Sigma(\alpha) - \pi\Sigma(\kappa).$$

Οι δύο όροι δεξιά παριστάνουν το άθροισμα όλων των γωνιών όλων των πλακακιών ο πρώτος ($\Sigma(\alpha)$) και το άθροισμα όλων των αριθμών κ που δίνουν το πλήθος των πλευρών του πλακακιού ο δεύτερος ($\Sigma(\kappa)$).

Σκεφτόμαστε όλες τις γωνίες όλων των πλακακιών και τις χωρίζουμε σε ομάδες. Στην ίδια ομάδα βάζουμε όλες τις γωνίες από διάφορα πλακάκια που συντρέχουν στην ίδια κορυφή. Το άθροισμα των γωνιών μιάς ομάδας θα είναι 2π , αφού όλες μαζί θα καλύπτουν πλήρως την περιοχή γύρω από την εν λόγω κορυφή. Έχουμε K κορυφές, συνεπώς το άθροισμα $\Sigma(\alpha)$ όλων των γωνιών όλων των πλακακιών θα είναι $K(2\pi)$. Το άθροισμα $\Sigma(\kappa)$ όλων των αριθμών κ που εκφράζουν το πλήθος των πλευρών κάθε πλακακιού θα είναι $2A$, δηλαδή το διπλάσιο του πλήθους των ακμών. Τούτο διότι κάθε ακμή συνορεύει με δύο ακριβώς πλακάκια, συνεπώς θα μετρηθεί δύο φορές στο παραπάνω άθροισμα. Συνεπώς ο τελευταίος τύπος γίνεται

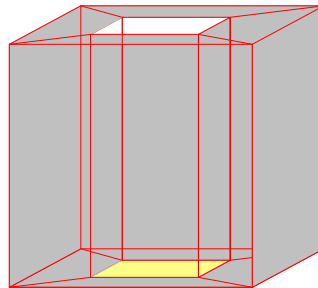
$$(2\pi)(2 - E) = \Sigma(\alpha) - \pi\Sigma(\kappa) = (2\pi)K - \pi(2A) \Leftrightarrow 2 - E = K - A,$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Το θεώρημα του Euler μεταφέρεται σε μιά ανάλογη ιδιότητα για κυρτά πολύεδρα. Η ιδέα είναι να πάρουμε ένα σημείο O στο εσωτερικό του πολυέδρου και να προβάλλουμε το πολυέδρο ακτινικά από το O στην επιφάνεια μιάς μεγάλης σφαίρας που το περιέχει εξ ολοκλήρου. Τότε οι έδρες του πολυέδρου προβάλλονται σε σφαιρικά πολύγωνα τα οποία συνολικά δίνουν μία πλακόστρωση της σφαίρας. Έτσι αν E είναι το πλήθος των εδρών του πολυέδρου, A το πλήθος των ακμών του και K το πλήθος των κορυφών του, προκύπτει μία πλακόστρωση της περιβάλλουσας σφαίρας με αυτά τα στοιχεία για τα πλακάκια της. Εφαρμόζοντας συνεπώς το θεώρημα του Euler έχουμε το

Θεώρημα 9.4.2 Για κάθε κυρτό πολυέδρο με E το πλήθος έδρες, A το πλήθος ακμές και K το πλήθος κορυφές ισχύει

$$K + E = A + 2.$$



Σχήμα 720: Κύβος με μία τρύπα

Για κάθε πολυέδρο Π , κυρτό ή μη, ο αριθμός $\chi(\Pi) = E - A + K$ ονομάζεται **Χαρακτηριστική του Euler** του πολυέδρου. Το προηγούμενο θεώρημα αποφαίνεται ότι για κυρτά πολυέδρα η χαρακτηριστική είναι 2. Αποδεικνύεται ότι για κάθε πολυέδρο η χαρακτηριστική αυτή είναι της μορφής $2-2\gamma$, όπου γ το λεγόμενο *Γένος* του πολυέδρου, που δίνει το πλήθος των τρυπών αυτού. Έτσι στο πολυέδρο της προηγούμενης εικόνας, που είναι ένας κύβος με μία τρύπα μεταξύ δύο απέναντι εδρών του, έχουμε $E = 4+4+4+4 = 16$ έδρες, $A = 12+12+4+4 = 32$ ακμές και $K = 8+8 = 16$ κορυφές. Η χαρακτηριστική λοιπόν $\chi(\Pi) = 0$.

9.5 Όγκοι

Ο Όγκος του πολυέδρου Π είναι ένας αριθμός $o(\Sigma)$ που σχετίζεται με το περιεχόμενο, το μέγεθος του χώρου που περικλείει το Π . Κατ' αναλογία προς τα επίπεδα εμβαδά ορίζεται μέσω τεσσάρων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του.

Ιδιότητα 9.5.1 Δύο ίσα πολύεδρα έχουν ίσους όγκους.

Ιδιότητα 9.5.2 Ένα πολύεδρο Π που συντίθεται από άλλα, πεπερασμένα το πλήθος, πολύεδρα $\Pi, \Pi', \Pi'', \dots$ που δεν επικαλύπτονται έχει όγκο το άθροισμα των όγκων των πολυέδρων

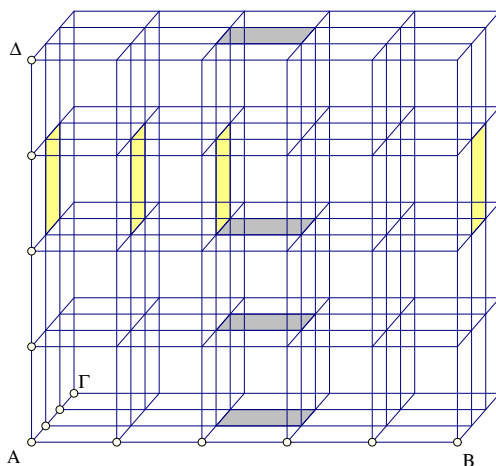
$$o(\Pi) = o(\Pi') + o(\Pi'') + \dots$$

Ιδιότητα 9.5.3 Ένα πολύεδρο Π που περιέχεται μέσα σε ένα άλλο Π' έχει όγκο

$$o(\Pi) < o(\Pi').$$

Ιδιότητα 9.5.4 Ο όγκος του κύβου με πλευρά την μονάδα μήκους είναι ένα.

Από τα αξιώματα συμπεραίνουμε αμέσως τον όγκο των ορθογωνίων παραλληλεπίπεδων. Η διαδικασία της απόδειξης του γνωστού τύπου, βάσει των ιδιοτήτων που εκφράζουν τα αξιώματα, είναι η ίδια ακριβώς με αυτήν της απόδειξης του τύπου για το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Παράγραφος 3.2).



Σχήμα 721: Διαίρεση κύβου σε μνξ παραλληλεπίπεδα

Λήμμα 9.5.1 Διαιρούμε τις πλευρές του μοναδιαίου (πλευράς μήκους 1) κύβου $AB, A\Gamma, A\Delta$ αντίστοιχα σε μ ίσα μέρη, σε ν ίσα μέρη και σε ξ ίσα μέρη και φέρνουμε από τα διαιρούντα σημεία παράλληλα επίπεδα προς το επίπεδο των άλλων πλευρών. Σχηματίζονται μνξ παραλληλεπίπεδα έκαστον των οποίων έχει εμβαδόν $\frac{1}{\mu\nu\xi}$.

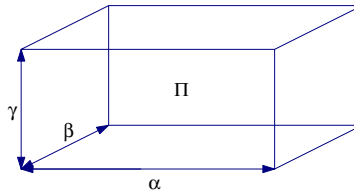
Απόδειξη: Προφανώς προκύπτουν μνξ ίσα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που κατά το αξίωμα 9.5.1 θα έχουν τον ίδιο όγκο O . Κατά το αξίωμα 9.5.2 ο όγκος του κύβου που είναι 1 (Ιδιότητα 9.5.4) θα είναι το άθροισμα των όγκων $1 = \mu\nu\xi O$, ο.ε.δ.

Λήμμα 9.5.2 Ο όγκος $o(\Sigma)$ ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου Σ με πλευρές AB , AG , AD που έχουν μήκος ρητούς αριθμούς ισούται με το γινόμενο των μηκών των πλευρών $o(\Sigma) = |AB||AG||AD|$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι ρητοί

$$|AB| = \frac{\alpha}{\beta}, \quad |AG| = \frac{\gamma}{\delta}, \quad |AD| = \frac{\epsilon}{\zeta}$$

είναι ανάγωγοι και διαιρούμε τον μοναδιαίο κύβο, όπως στο προηγούμενο λήμμα, σε $\beta\delta\zeta$ ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έκαστον των οποίων έχει όγκο $\frac{1}{\beta\delta\zeta}$. Εξ υποθέσεως η πλευρά AB διαιρείται σε α το πλήθος ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\beta}$, η AG σε γ το πλήθος ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\delta}$ και η AD σε ϵ το πλήθος ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\zeta}$. Φέρνοντας από τα σημεία διαίρεσης παράλληλα επίπεδα προς τα επίπεδα των άλλων ακμών διαιρούμε το παραλληλεπίπεδο σε (αγε) το πλήθος ίσα παραλληλεπίπεδα έκαστον των οποίων έχει όγκο $\frac{1}{\beta\delta\zeta}$. Το άθροισμα των όγκων αυτών των παραλληλεπιπέδων ισούται με τον όγκο του αρχικού παραλληλεπιπέδου (Ιδιότητα 9.5.2) και είναι $\frac{\alpha\gamma\epsilon}{\beta\delta\zeta}$, ο.ε.δ.



Σχήμα 722: Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $o(\Pi) = \alpha\beta\gamma$

Θεώρημα 9.5.1 Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π με μήκη ακμών α , β και γ είναι

$$o(\Pi) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.$$

Απόδειξη: Όπως και στα εμβαδά (Παράγραφος 3.2), εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.2.3 στους αριθμούς α, β και γ και έναν αρκετά μεγάλο ακέραιο θετικό αριθμό ν . Κατά το λήμμα λοιπόν θα υπάρχουν ρ , σ και τ έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \alpha - \frac{\rho}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu}, \quad \left| \beta - \frac{\sigma}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu}, \quad \left| \gamma - \frac{\tau}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu}.$$

Απ' αυτές έπεται ότι το αρχικό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π περιέχει στο εσωτερικό του το Π_1 με μήκη πλευρών $\frac{\rho}{\nu}$, $\frac{\sigma}{\nu}$, $\frac{\tau}{\nu}$, και περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π_2 με μήκη πλευρών $\frac{\rho+1}{\nu}$, $\frac{\sigma+1}{\nu}$, $\frac{\tau+1}{\nu}$. Έπεται ότι τόσο ο όγκος $o(\Pi)$, όσο και το γινόμενο $(\alpha\beta\gamma)$ θα ικανοποιούν τις ίδιες ανισότητες

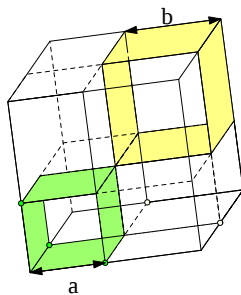
$$\frac{\rho}{\nu} \frac{\sigma}{\nu} \frac{\tau}{\nu} \leq o(\Pi) \leq \frac{\rho+1}{\nu} \frac{\sigma+1}{\nu} \frac{\tau+1}{\nu}, \quad \frac{\rho}{\nu} \frac{\sigma}{\nu} \frac{\tau}{\nu} \leq \alpha\beta\gamma \leq \frac{\rho+1}{\nu} \frac{\sigma+1}{\nu} \frac{\tau+1}{\nu}.$$

Επομένως η διαφορά τους θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$\begin{aligned}
 |o(\Pi) - \alpha\beta\gamma| &\leq \frac{\rho+1}{\nu} \frac{\sigma+1}{\nu} \frac{\tau+1}{\nu} - \frac{\rho}{\nu} \frac{\sigma}{\nu} \frac{\tau}{\nu} \\
 &= \frac{\rho\sigma + \sigma\tau + \tau\rho + \rho + \sigma + \tau + 1}{\nu^3} \\
 &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\rho\sigma}{\nu} + \frac{\sigma\tau}{\nu} + \frac{\tau\rho}{\nu} \right) + \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\rho}{\nu} + \frac{\sigma}{\nu} + \frac{\tau}{\nu} \right) + \frac{1}{\nu^3} \\
 &\leq \frac{1}{\nu} (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \frac{1}{\nu^2} (\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{\nu^3} \\
 &\leq \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1}{\nu}.
 \end{aligned}$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι η σταθερή ποσότητα $|o(\Pi) - \alpha\beta\gamma|$ δεν μπορεί να είναι θετική, διότι είναι μικρότερη ενός αριθμού που μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός θέλουμε, αρκεί να εκλέξουμε αρκετά μεγάλο ν . Συνεπώς η ποσότητα αυτή θα είναι μηδέν, ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.5.1 Ο όγκος του κύβου ακμής α ισούται με α^3 .



Σχήμα 723: Ταυτότητα για κύβους

Άσκηση 9.5.1 Δείξε με την βοήθεια ενός κύβου ακμής $\alpha + \beta$ ότι ισχύει η ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

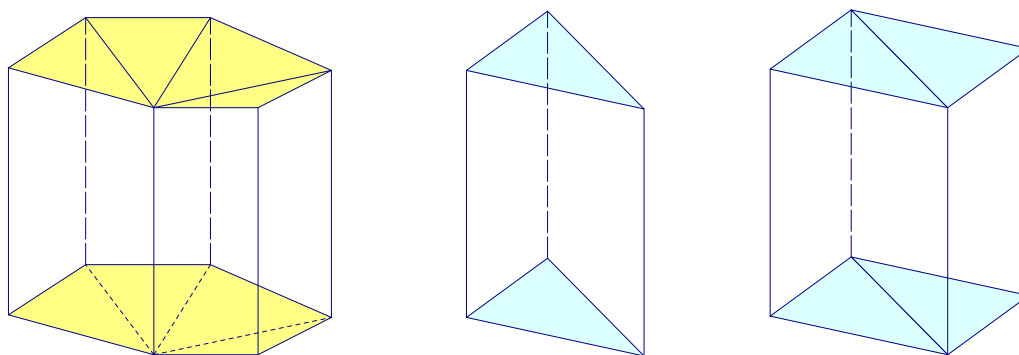
Άσκηση 9.5.2 Δείξε με την βοήθεια του προηγούμενου σχήματος και της ταυτότητας $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ ότι ισχύει η ταυτότητα

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3.$$

9.6 Όγκοι πρισμάτων

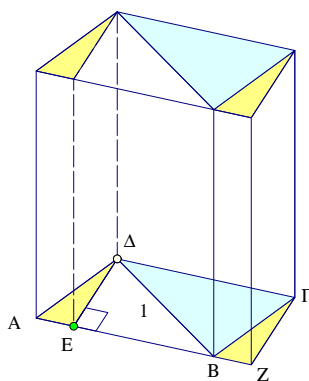
Με την βοήθεια του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και περαιτέρω χρήση των βασικών ιδιοτήτων των όγκων (Παράγραφος 9.5) μπορούμε να βρούμε τον όγκο των ορθών πρισμάτων και κατόπιν και των πλαγίων πρισμάτων.

Πρόταση 9.6.1 Ο όγκος ενός ορθού πρίσματος Π ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος.



Σχήμα 724: Όγκος ορθού πρίσματος = εμβαδόν βάσης $\times$ ύψος

Απόδειξη: Η απόδειξη για το γενικό πρίσμα ανάγεται στο τριγωνικό πρίσμα. Φέρνοντας τις διαγωνίους από μία κορυφή της βάσης του πρίσματος το χωρίζουμε σε τριγωνικά πρίσματα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για τριγωνικό πρίσμα ο όγκος δίδεται από το γινόμενο του εμβαδού του τριγώνου επί το ύψος. Για να δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πρίσμα με βάση ένα παραλληλόγραμμο ισχύει η αντίστοιχη ιδιότητα, αφού κάθε τριγωνικό πρίσμα είναι το μισό ενός τέτοιου πρίσματος. Όμως το πρίσμα με βάση το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει τον ίδιο όγκο και το ίδιο εμβαδόν βάσης με το άλλο πρίσμα που παράγεται με τον γνωστό τρόπο φέρνοντας λ.χ. από το Δ την κάθετο ΔE και σχηματίζοντας το

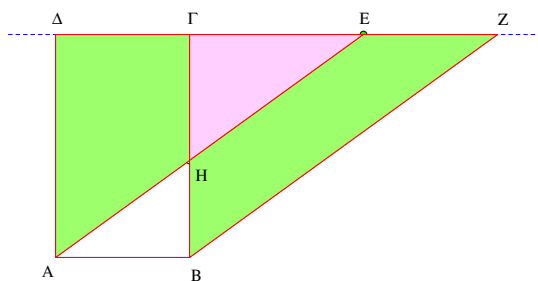


Σχήμα 725: Όγκος τριγωνικού πρίσματος = εμβαδόν βάσης $\times$ ύψος

ορθογώνιο $\Delta EZ\Gamma$. Ο όγκος του πρίσματος πάνω από το τρίγωνο AED μεταφέρεται σε αυτόν του πρίσματος πάνω από το ίσο τρίγωνο $BZ\Gamma$, επομένως ο όγκος του πρίσματος με βάση το $AB\Gamma\Delta$ είναι ό ίδιος με τον όγκο του πρίσματος με βάση το ορθογώνιο $\Delta EZ\Gamma$ και γι' αυτό

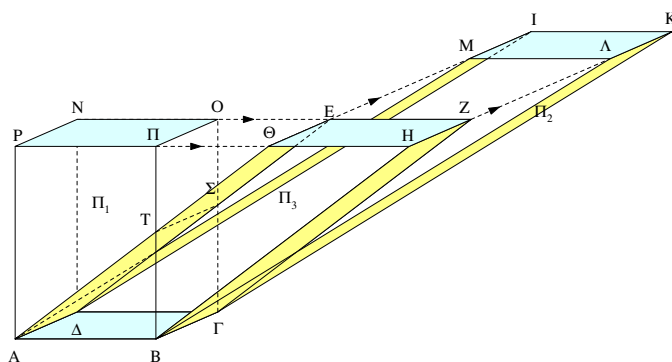
ξέρουμε ήδη ότι ο όγκος του ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος, ο.ε.δ. Μιά ανάλογη αναγωγή του υπολογισμού του όγκου μπορεί να γίνει και για πλάγια πρίσματα. Και σ' αυτά μπορούμε να διαιρέσουμε την πολυγωνική βάση σε τρίγωνα, τα τρίγωνα να διπλασιάσουμε σε παραλληλόγραμμα και τα παραλληλόγραμμα να ανάγουμε σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Αυτός ο συλλογισμός δείχνει ότι για να δείξουμε τον τύπο του όγκου για όλα τα πλάγια πρίσματα, αρκεί να το δείξουμε για τα πρίσματα με βάση ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Γι' αυτά όμως ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.6.2 Το πλάγιο πρίσμα με βάση το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και το ορθό με την ίδια βάση και ίδιο ύψος έχουν τον ίδιο όγκο.



Σχήμα 726: Ισοεμβαδικά παραλληλόγραμμα

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί το τέχνασμα που χρησιμοποιούμε και στα εμβαδά. Συγκρίνουμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου και ενός παραλληλογράμμου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος χρησιμοποιώντας την ισότητα των τριγώνων (σχήμα-726) $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$, από την οποία προκύπτει η ισότητα των εμβαδών των τετραπλεύρων $AH\Gamma\Delta$ και $BHEZ$. Κάτι ανάλογο κάνουμε και για τους όγκους. Αν $\Pi_1 = AB\Gamma\Delta$ -NOΠΡ είναι το ορθό πρίσμα με βάση το



Σχήμα 727: Πρίσματα ίσου όγκου

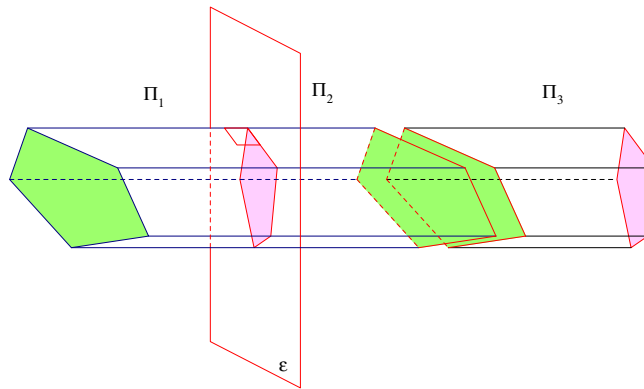
ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και $\Pi_2 = AB\Gamma\Delta$ -IKΛΜ το πλάγιο πρίσμα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Τότε λόγω της παραλληλίας των πλευρών (PN,MI) και (NO,IK) ορίζεται ένα είδος ενδιάμεσου πρίσματος $\Pi_3 = AB\Gamma\Delta$ -EZHΘ με την ίδια επίσης βάση. Τα Π_1 και Π_3 έχουν τον ίδιο όγκο, διότι το τριγωνικό πρίσμα με βάση $A\Theta P$ είναι ίσο με το τριγωνικό πρίσμα με βάση $B\eta\Pi$, επομένως αν αφαιρέσουμε από τα δύο ίσα πρίσματα το κοινό μέρος τους που είναι το τριγωνικό πρίσμα $T\Theta\Pi$ τότε τα πρίσματα που απομένουν με βάσεις

τα τραπέζια ΠΡΑΤ και ΘΤΒΗ έχουν τον ίδιο όγκο. Προσθέτοντας σε αυτά και το τριγωνικό πρίσμα με βάση ΤΒΑ έχουμε την ισότητα των όγκων των Π_1 και Π_3 . Ανάλογα προκύπτει και η ισότητα των όγκων των Π_3 και Π_2 και συνολικά η ισότητα των όγκων των Π_1 και Π_2 , ο.ε.δ.

Πρόταση 9.6.3 Ο όγκος πρίσματος (ορθού ή πλάγιου) ισούται με το εμβαδόν της βάσης του επί το ύψος του.

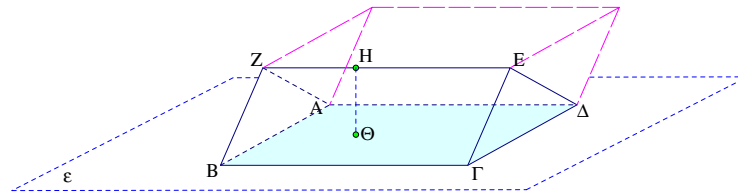
Απόδειξη: Έπεται από τις προηγηθείσες προτάσεις και αναλύσεις, ο.ε.δ.

Πρόταση 9.6.4 Ο όγκος πρίσματος (ορθού ή πλάγιου) ισούται με το εμβαδόν της κάθετης τομής του επί το μήκος της γενέτειράς του.



Σχήμα 728: Χειρουργική πρισματών

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε είδος χειρουργικής του πρίσματος. Το κόβουμε με κάθετο στην γενέτειρά του επίπεδο ϵ και το χωρίζουμε έτσι σε δύο κομμάτια Π_1 και Π_2 . Κατόπιν μεταφέρουμε το Π_1 στην ίδια μεριά με το Π_2 και το προσαρμόζουμε έτσι να συμπίσουν οι παράλληλες έδρες του αρχικού πρίσματος. Προκύπτει ένα ορθό πρίσμα με βάση την κάθετη τομή του αρχικού και μήκος γενέτειρας το ίδιο με το μήκος του αρχικού πρίσματος. Η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.6.1, ο.ε.δ.



Σχήμα 729: Όγκος τριγωνικού πρίσματος

Άσκηση 9.6.1 Δείξε ότι ο όγκος ενός τριγωνικού πρίσματος ισούται με το γινόμενο $\frac{1}{2}\epsilon(AB\Gamma\Delta)|H\Theta|$, όπου $\epsilon(AB\Gamma\Delta)$ το εμβαδόν μιάς έδρας του πρίσματος και $|H\Theta|$ η απόσταση αυτής από την απέναντι ακμή.

στην συγκρότηση του Π_2 . Για παράδειγμα (σχήμα-730), το εσωτερικό ΑΖΗΘΚΙ είναι ίσο με το εξωτερικό από πάνω του ΚΙΘΕΝΨ, το εσωτερικό ΚΣΡΥΝΤ είναι ίσο με το εξωτερικό από πάνω του ΝΤΥΦΞΧ κτλ.. Έπεται ότι η διαφορά των όγκων των δύο σωμάτων είναι ο όγκος του κάτω-κάτω πρίσματος με βάση το ΑΒΓ, συνεπώς $o(\Pi_2) - o(\Pi_1) = \frac{\epsilon\nu}{\nu}$, ο.ε.δ.

Μία άλλη κρίσιμη παρατήρηση αφορά στον λόγο δύο σωμάτων όπως το Π_1 που κατασκευάζονται για δύο διαφορετικές τριγωνικές πυραμίδες με το ίδιο ύψος. Ο λόγος των όγκων τους μεταφέρεται στον λόγο των εμβαδών των βάσεων τους.

Πρόταση 9.7.2 Έστω ότι για δοθέντα τριγωνικά πρίσματα $\Pi = \text{ΑΒΓΔ}$ και $\Pi' = \text{Α'Β'Γ'Δ'}$ με το ίδιο ύψος κατασκευάζονται τα αντίστοιχα σώματα Π_1, Π_2 και Π'_1, Π'_2 , όπως στην προηγούμενη πρόταση. Τότε οι λόγοι των όγκων

$$\frac{o(\Pi_1)}{o(\Pi'_1)} = \frac{o(\Pi_2)}{o(\Pi'_2)} = \frac{\epsilon(\text{ΑΒΓ})}{\epsilon(\text{Α'Β'Γ'})}.$$

Απόδειξη: Ας δούμε την απόδειξη για τον δεύτερο λόγο. Ο πρώτος αποδεικνύεται εξ ίσου εύκολα. Ο όγκος του Π_2 είναι το άθροισμα των όγκων των ν πρισματών που το συγκροτούν. Το πρώτο κάτω-κάτω έχει όγκο $o_1 = \epsilon \cdot \frac{\nu}{\nu}$, όπου $\epsilon = \epsilon(\text{ΑΒΓ})$ το εμβαδόν του ΑΒΓ και ν το (κοινό) ύψος των πυραμίδων. Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι το από πάνω πρίσμα έχει βάση που είναι όμοια προς το ΑΒΓ, έστω με λόγο κ . Ο όγκος του δεύτερου πρίσματος συνεπώς θα είναι $o_2 = (\kappa^2 \epsilon) \cdot \frac{\nu}{\nu} = \kappa^2 o_1$. Ανάλογα $o_3 = \lambda^2 o_2 = \lambda^2 \kappa^2 o_1$ κτλ. Συνολικά προσθέτοντας τους ν όγκους των πρισματών έχουμε

$$o(\Pi_2) = o_1 + \dots + o_\nu = o_1 + \kappa^2 o_1 + \kappa^2 \lambda^2 o_1 + \dots = (1 + \kappa^2 + \kappa^2 \lambda^2 + \dots) o_1 = \mu \cdot o_1.$$

Το μ που παριστάνει το άθροισμα των συντελεστών ομοιότητας είναι ένας αριθμός που εξαρτάται μόνο από το ν και όχι το τρίγωνο της βάσης. Πράγματι, από την ομοιότητα των τριγώνων (σχήμα-730) $\Delta \text{ΑΒ}$ και $\Delta \text{ΚΣ}$ προκύπτει ότι

$$\kappa = \frac{|KI|}{|AB|} = \frac{|\Delta K|}{|\Delta A|} = \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

Ανάλογα προκύπτει ότι

$$\lambda = \frac{|NT|}{|KI|} = \frac{\nu - 2}{\nu - 1} \Rightarrow \lambda \kappa = \frac{\nu - 2}{\nu}.$$

Σκεπτόμενοι ανάλογα βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \mu &= (1 + \kappa^2 + \kappa^2 \lambda^2 + \dots) \\ &= 1 + \left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{\nu - 2}{\nu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\nu^2} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2), \end{aligned}$$

που δείχνει ότι ο μ εξαρτάται μόνον από το ν και όχι το ειδικό τρίγωνο. Παρεμπιπτόντως, αν και δεν μας χρειάζεται, εν τούτοις δεν βλάπτει να ξέρουμε ότι ([CR96, σ. 14])

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6} \Rightarrow \mu = \frac{(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6\nu}.$$

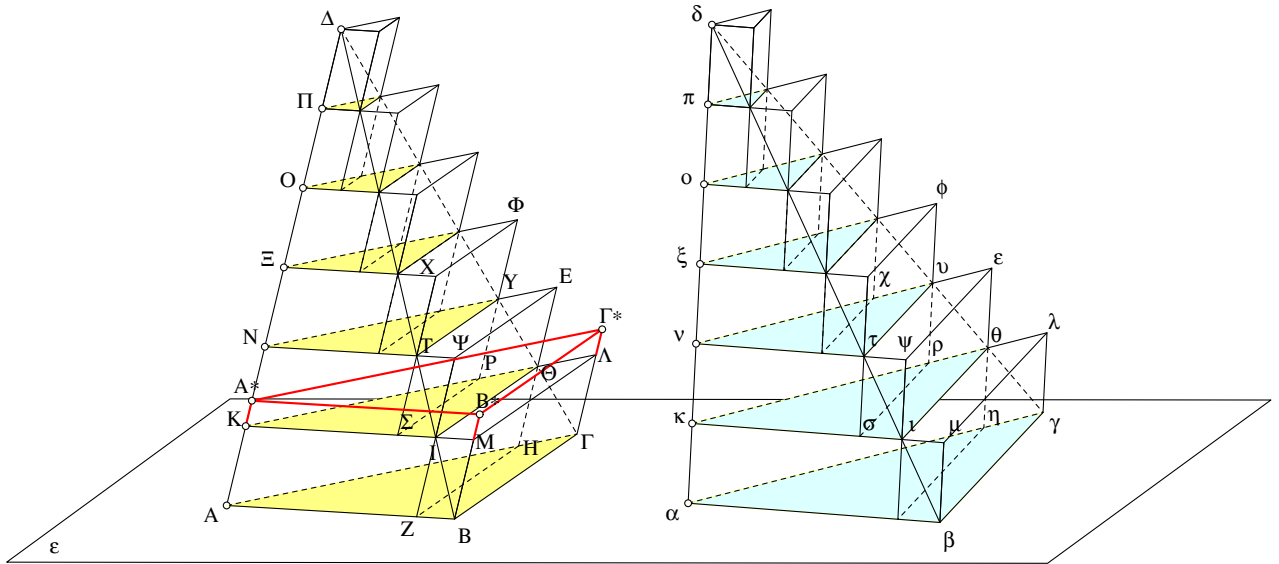
Επιστρέφοντας λοιπόν στην απόδειξη, οι λόγοι των όγκων των δύο σωμάτων θα είναι

$$\frac{o(\Pi_2)}{o(\Pi'_2)} = \frac{\mu \cdot o_1}{\mu \cdot o'_1} = \frac{o_1}{o'_1} = \frac{\epsilon \cdot \frac{\nu}{\nu}}{\epsilon' \cdot \frac{\nu}{\nu}} = \frac{\epsilon}{\epsilon'},$$

ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.7.1 Γιά δύο πρίσματα Π, Π' με βάσεις ίσων εμβαδών και ίσα ύψη ο όγκος των αντίστοιχων σωμάτων $o(\Pi_1) = o(\Pi'_1)$ και $o(\Pi_2) = o(\Pi'_2)$.

Θεώρημα 9.7.1 Δύο τριγωνικές πυραμίδες του ιδίου ύψους και ιδίου εμβαδού βάσης έχουν τον ίδιο όγκο.



Σχήμα 731: Σύγκριση πυραμίδων μέσω των προσεγγίσεων

Απόδειξη: Τοποθέτησε τις δύο πυραμίδες $AB\Gamma\Delta$ και $\alpha\beta\gamma\delta$ με την βάση τους στο ίδιο επίπεδο ϵ . Έστω ότι οι βάσεις τους έχουν το ίδιο εμβαδόν ϵ και ότι έχουν το ίδιο ύψος ν , αλλά η πρώτη $AB\Gamma\Delta$ έχει μεγαλύτερο όγκο: $o(AB\Gamma\Delta) > o(\alpha\beta\gamma\delta)$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Προς τούτο κατασκεύασε πρίσμα $\Pi_\omega = AB\Gamma\Delta - \alpha\beta\gamma\delta$ με βάση $AB\Gamma$ που έχει όγκο ίσο με την διαφορά $\omega = o(AB\Gamma\Delta) - o(\alpha\beta\gamma\delta)$. Κατόπιν κατασκεύασε για τα δύο πρίσματα τα σώματα Π_1, Π_2 της Πρότασης 9.7.1 για ακέραιο ν έτσι ώστε το $\frac{\nu}{\nu}$ να είναι μικρότερο του ύψους του πρίσματος Π_ω . Τότε και ο αντίστοιχος όγκος του βασικού πρίσματος θα είναι

$$o(AB\Gamma\Delta K M) < o(\Pi_\omega).$$

Από την άλλη μεριά η διαφορά των όγκων των δύο πυραμίδων θα είναι

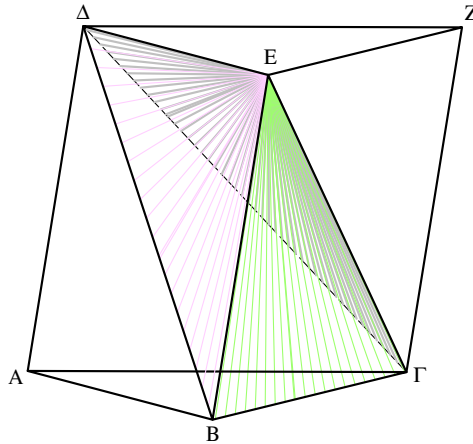
$$o(\Pi_\omega) = o(AB\Gamma\Delta) - o(\alpha\beta\gamma\delta) < o(\Pi_2) - o(\Pi'_1) = o(\Pi_2) - o(\Pi_1) = o(AB\Gamma\Delta K M).$$

Μιά ανισότητα που αντιφάσκει στην προηγούμενη. Ανάλογη αντίφαση παίρνουμε και από την υπόθεση ότι $o(AB\Gamma\Delta) < o(\alpha\beta\gamma\delta)$. Συνεπώς θα πρέπει $o(AB\Gamma\Delta) = o(\alpha\beta\gamma\delta)$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 9.7.2 Ο όγκος τριγωνικής πυραμίδας $AB\Gamma\Delta$ δίδεται από τον τύπο

$$o(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\epsilon(AB\Gamma)v,$$

όπου $\epsilon(AB\Gamma)$ το εμβαδόν της βάσης της και v το ύψος της πυραμίδας.



Σχήμα 732: όγκος πυραμίδας $o(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\epsilon(AB\Gamma)v$

Απόδειξη: Από τις κορυφές B και Γ της βάσης φέρε παράλληλες και ίσες προς την ακμή $A\Delta$ και σχημάτισε το τριγωνικό πρίσμα $AB\Gamma Z\Delta E$. Φέρε κατόπιν την διαγώνιο GE . Το πρίσμα που δημιουργείται χωρίζεται σε τρεις πυραμίδες: την αρχική $AB\Gamma\Delta$, την $B\Gamma\Delta E$ και την $\Gamma\Delta E Z$. Οι τρεις πυραμίδες αυτές έχουν τον ίδιο όγκο. Η $B\Gamma\Delta E$ και $\Gamma\Delta E Z$ με βάσεις τα ίσα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $\Gamma E Z$ και κοινή κορυφή στο Δ έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος άρα τον ίδιο όγκο. Αλλά και η $\Delta E Z \Gamma$ έχει ίση βάση με την αρχική και ίσο ύψος. Αφού οι τρεις πυραμίδες έχουν τον ίδιο όγκο, κάθε μία τους θα είναι το $1/3$ του πρίσματος, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε στο τελευταίο σχήμα την θέση της πυραμίδας $B\Gamma\Delta E$ στο τριγωνικό πρίσμα. Οι απέναντι ακμές της $B\Gamma$ και ΔE είναι ασύμβατες και τα επίπεδα $AB\Gamma$ και $\Delta E Z$ είναι τα μοναδικά (Πρόταση 7.4.2) παράλληλα επίπεδα που περιέχουν αυτές τις ασύμβατες. Η κοινή κάθετος αυτών των δύο ασυμβάτων έχει μήκος την απόσταση των δύο επιπέδων δηλαδή το ύψος του πρίσματος $AB\Gamma\Delta E Z$. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.7.3 Ο όγκος της πυραμίδας με απέναντι ακμές $B\Gamma$ και ΔE ισούται με

$$\frac{1}{6}|B\Gamma||\Delta E|v\eta\mu(\phi),$$

όπου v το μήκος της κοινής καθέτου των (ασυμβάτων) $B\Gamma$ και ΔE και ϕ η γωνία μεταξύ των $B\Gamma$ και ΔE .

Πόρισμα 9.7.2 Δοθέντων δύο ασυμβάτων ευθειών a και β καθώς και ευθυγράμμων τμημάτων $B\Gamma$ και ΔE σταθερών μηκών και ολισθενόντων αντίστοιχα επ' αυτών των ευθειών, το τετράεδρο $B\Gamma\Delta E$ έχει όγκο ανεξάρτητο της θέσης τους επί των a και β .

Σχόλιο-2 Η παράγραφος αυτή, βασισμένη στην ανάλογη του Legendre [Leg37, σ. 134]), έχει ενδιαφέρον εκτός των άλλων διότι χρησιμοποιεί όλα τα χαρακτηριστικά του ορίου χωρίς να καταφεύγει στον αναλυτικό προσδιορισμό του. Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε όρια η απόδειξη του τύπου του όγκου της πυραμίδας θα είχε τελειώσει σχεδόν αμέσως μετά την πρώτη πρόταση της παραγράφου. Πράγματι η Πρόταση 9.7.1 φανερώνει ότι ο όγκος του σώματος Π_2 (όπως και του Π_1) είναι μιά προσέγγιση του όγκου της πυραμίδας με σφάλμα μικρότερο του $\frac{\epsilon\nu}{\nu}$. Άρα αυξάνοντας το ν και περνώντας στο όριο θα έχουμε τον ζητούμενο τύπο. Ο υπολογισμός στην Πρόταση 9.7.2 δείχνει κατόπιν ότι ο όγκος του Π_2 είναι ίσος με

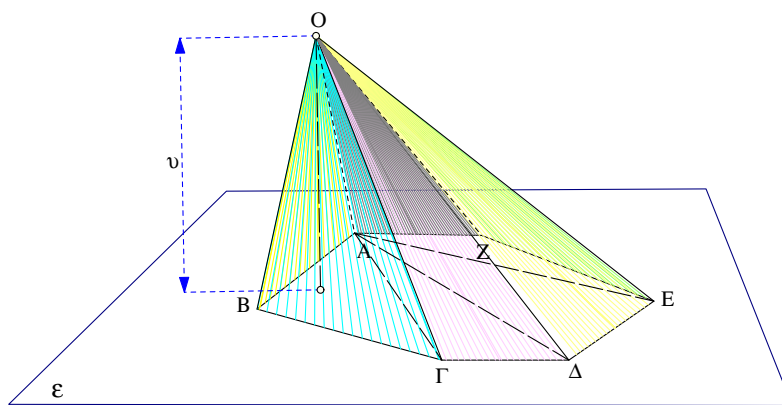
$$o(\Pi_2) = \frac{\mu\epsilon\nu}{\nu} = \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2}\epsilon\nu.$$

Το συμπέρασμα προκύπτει παίρνοντας το όριο του κλάσματος

$$\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(2 + \frac{1}{\nu}\right) \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι στην ουσία μεταφορά της μεθόδου της εξάντλησης του Αρχιμήδη στην περίπτωση των απλών αυτών στερεών του χώρου.

Θεώρημα 9.7.3 Ο όγκος μιάς πυραμίδας είναι το ένα τρίτο του γινομένου του εμβαδού της βάσης της επί το ύψος της.

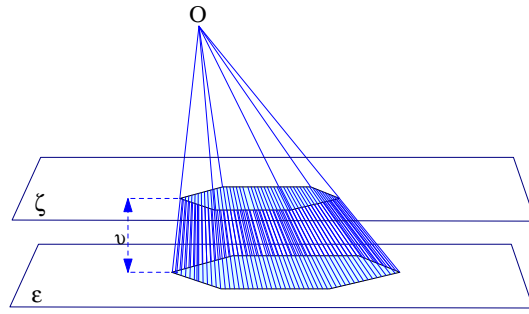


Σχήμα 733: Όγκος πυραμίδας

Απόδειξη: Από μιά κορυφή λ.χ. την A της βάσης ABΓΔ... της πυραμίδας φέρε όλες τις διαγώνιες προς τις άλλες κορυφές. Το πρίσμα χωρίζεται σε τριγωνικά πρίσματα με το ίδιο ύψος και το συμπέρασμα βγαίνει αθροίζοντας τους όγκους των τριγωνικών πυραμίδων βάσει του προηγούμενου θεωρήματος, ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.7.3 Ο όγκος κόλουρης πυραμίδας ύψους ν με μεγάλη βάση εμβαδού ϵ_1 και μικρή βάση εμβαδού ϵ_2 είναι ίσος με

$$o = \frac{1}{3}\nu \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}).$$



Σχήμα 734: Όγκος κόλουρης πυραμίδας

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα, θεωρώντας την κόλουρη πυραμίδα ως διαφορά (ως προς τον όγκο) των δύο πυραμίδων με βάσεις τις δύο βάσεις της κόλουρης πυραμίδας. Έτσι, αν η είναι το ύψος της πυραμίδας με την μικρή βάση, ο ζητούμενος όγκος θα είναι

$$o = \frac{1}{3}(\eta + v)\epsilon_1 - \frac{1}{3}(\eta\epsilon_2) = \frac{1}{3}(v\epsilon_1 + \eta(\epsilon_1 - \epsilon_2)).$$

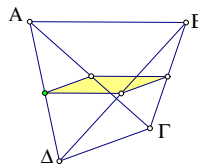
Όμως τα πολύγωνα στα δύο παράλληλα επίπεδα είναι όμοια (Πόρισμα 7.7.1), συνεπώς ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των πλευρών τους, που με την σειρά του ισούται με τον λόγο των τετραγώνων

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\eta^2}{(v + \eta)^2} \Rightarrow \eta = \frac{v\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}.$$

Αντικαθιστώντας το η στον προηγούμενο τύπο και κάνοντας πράξεις προκύπτει το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Άσκηση 9.7.1 Δείξε ότι η τριγωνική πυραμίδα με που έχει μιά τρισσορθογώνιο τρίεδρο (κορυφή της οποίας και οι τρεις έδρες είναι ορθογώνια τρίγωνα) με ακμές μήκους δ έχει όγκο $\frac{\delta^3}{6}$.

Άσκηση 9.7.2 Δείξε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιάς πυραμίδας είναι μεγαλύτερο του εμβαδού της βάσης της.

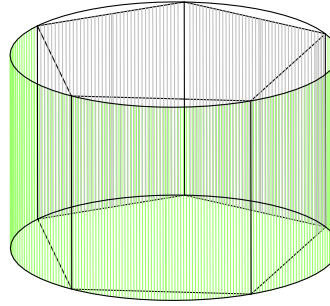


Σχήμα 735: Τομή τριγωνικής πυραμίδας κατά παραλληλόγραμμο

Άσκηση 9.7.3 Δείξε ότι ένα επίπεδο παράλληλο προς δύο απέναντι ακμές AB και $\Gamma\Delta$ τετραέδρου το τέμνει κατά παραλληλόγραμμο. Δείξε επίσης ότι υπάρχει ένα ακριβώς τέτοιο επίπεδο που τέμνει το τετράεδρο κατά ρόμβο. Πότε ο ρόμβος αυτός είναι τετράγωνο;

9.8 Όγκοι κυλίνδρων

Ο όγκος ενός κυλίνδρου δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα και σύμφωνα με τις βασικές ιδιότητες του όγκου (Παράγραφος 9.5), αφού αυτές καθορίζουν πλήρως τον όγκο, αλλά μόνο για πολύεδρα. Έτσι καταφεύγουμε, για μία ακόμη φορά, στα όρια και προσεγγίζουμε τον κύλινδρο με εγγεγραμμένα σε αυτόν πρίσματα του ίδιου ύψους $υ$ με αυτό του κυλίνδρου. Περιοριζόμαστε σε κανονικά πρίσματα εγγεγραμμένα στον κύλινδρο και ορίζουμε τον **Όγκο του κυλίνδρου** ως όριο των όγκων των κανονικών εγγεγραμμένων στον κύλινδρο πρισμάτων καθώς αυξάνονται οι έδρες τους.



Σχήμα 736: Όγκος κυλίνδρου

Πρόταση 9.8.1 Ο όγκος κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.

Απόδειξη: Για τον υπολογισμό του εμβαδού χρησιμοποιούμε την παλιά καλή γνωστή ακολουθία κανονικών πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ (6.2) που εγγράφονται στην βάση του κυλίνδρου, αρχίζοντας από το εγγεγραμμένο τετράγωνο (Π_1) και διπλασιάζοντας σε κάθε βήμα το πλήθος των κορυφών. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς μας (Λήμμα 6.5.1), το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στον κύκλο ακτίνας ρ πολυγώνου με μ το πλήθος πλευρές είναι

$$\mu \left(\frac{\rho^2}{2} \eta \mu \left(\frac{2\pi}{\mu} \right) \right).$$

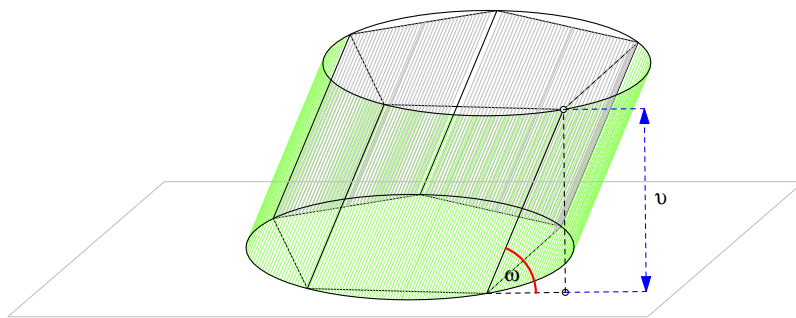
Συνάγεται (Πρόταση 9.6.1) ότι ο όγκος του πρίσματος πάνω από αυτό το πολύγωνο με ύψος $υ$ είναι

$$υ \mu \left(\frac{\rho^2}{2} \eta \mu \left(\frac{2\pi}{\mu} \right) \right).$$

Επειδή το ύψος παραμένει σταθερό συνάγεται ότι το όριο της προηγούμενης παράστασης καθώς αυξάνεται το μ ($= 2^n$) θα είναι το γινόμενο του ύψους επί το εμβαδόν του κύκλου, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η απόδειξη ισχύει και όταν οι γενέτειρες είναι όχι κάθετες στο επίπεδο του κύκλου της βάσης αλλά πλάγιες. Το μόνο που αλλάζει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ύψος του κυλίνδρου, που δεν ταυτίζεται πλέον με το μήκος της γενέτειρας, αλλά δίδεται από τον τύπο

$$υ = \delta \eta \mu(\omega),$$



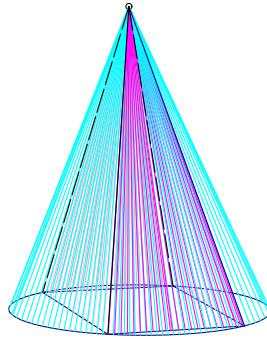
Σχήμα 737: Όγκος πλάγιου κυκλικού κυλίνδρου

όπου δ το μήκος της γενέτειρας του πλάγιου κυλίνδρου και ω η γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα με το επίπεδο του κύκλου της βάσης. Έτσι η προηγούμενη πρόταση, όπως διατυπώθηκε, ισχύει τόσο για ορθούς κυκλικούς κυλίνδρους όσο και για πλάγιους.

Σχόλιο-2 Η κάθετη τομή (με επίπεδο ορθογώνιο στις γενέτειρες) ενός πλάγιου κυλίνδρου με βάση κύκλο δεν είναι κύκλος (είναι έλλειψη).

9.9 Όγκοι κώνων

Όπως στον κύλινδρο έτσι και στον κώνο ο υπολογισμός του όγκου του γίνεται προσεγγίζοντας τον κώνο με εγγεγραμμένες κανονικές πυραμίδες. Το σενάριο το έχουμε συναντήσει αρκετές φορές. Στον κύκλο της βάσης εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ αρχίζοντας με το τετράγωνο και διπλασιάζοντας διαδοχικά τις κορυφές από το ένα στο επόμενο πολύγωνο. Ορίζουμε τον **Όγκο του κώνου** ως το όριο των όγκων των πυραμίδων με βάση τα πολύγωνα Π_n και ύψος το ύψος του κώνου.

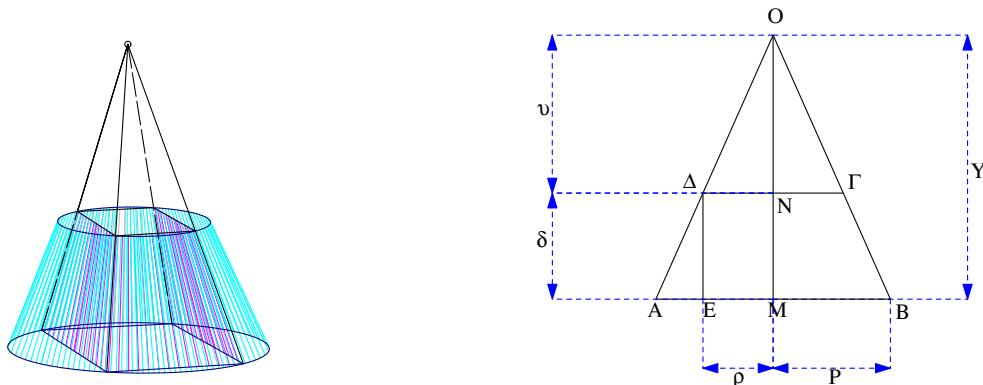


Σχήμα 738: Όγκος κώνου

Πρόταση 9.9.1 Ο όγκος κώνου ισούται με το $1/3$ του το γινομένου του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 9.8.1, ο.ε.δ.

Σχόλιο Η πρόταση ισχύει και για πλάγιους κώνους και όχι μόνον ορθούς. Η διατύπωση της προηγούμενης πρότασης είναι αρκετά γενική ώστε να συμπεριλαμβάνει και αυτούς. Η απόδειξη για τους πλάγιους είναι η ίδια με αυτήν για τους ορθούς. Ο όγκος κόλουρου



Σχήμα 739: Όγκος κόλουρου κώνου

κώνου υπολογίζεται αφαιρώντας από τον όγκο του κώνου με την μεγάλη βάση τον όγκο του κώνου με την μικρή βάση.

Πρόταση 9.9.2 Ο όγκος του κόλουρου κώνου ισούται με το

$$\frac{1}{3}(1 - \kappa^3)\epsilon\upsilon,$$

όπου ϵ είναι το εμβαδόν της μεγάλης βάσης, υ το ύψος του κώνου της μεγάλης βάσης και κ ο λόγος της ακτίνας της μικρής βάσης προς αυτήν της μεγάλης.

Απόδειξη: Αν ο λόγος των ακτίνων είναι κ , τότε ο λόγος των εμβαδών του μικρού κύκλου προς τον μεγάλο είναι κ^2 . Επίσης ο λόγος του ύψους του μικρού κώνου προς το ύψος του μεγάλου είναι (λόγω ομοιότητας τριγώνων) και αυτός κ . Ο τύπος προκύπτει αμέσως γράφοντας το μικρό ύψος $\upsilon' = \kappa\upsilon$ και το μικρό εμβαδόν $\epsilon' = \kappa^2\epsilon$ και αντικαθιστώντας αυτά στον τύπο της διαφοράς των όγκων των δύο κώνων, ο.ε.δ.

Η επόμενη πρόταση δίνει τον όγκο του κόλουρου κώνου συναρτήσει των βασικών στοιχείων του που είναι οι δύο ακτίνες των βάσεων του P , ρ και το ύψος του δ .

Πρόταση 9.9.3 Ο όγκος ο του κόλουρου κώνου με ακτίνα μεγάλης βάσης P , ακτίνα μικρής βάσης ρ και ύψος δ είναι

$$o = \frac{\pi\delta}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη στηρίζεται στον βασικό τύπο του όγκου του κόλουρου κώνου, ως διαφορά των όγκων δύο κώνων

$$o = \frac{\pi}{3}(P^2Y - \rho^2\upsilon),$$

όπου Y και υ τα ύψη του κώνου με την μεγάλη βάση και την μικρή βάση αντίστοιχα. Το σχήμα-739 δείχνει τα στοιχεία του τριγώνου που προκύπτει τέμνοντας τον κόλουρο κώνο με επίπεδο που διέρχεται από τον άξονά του OM . Η τομή αυτή είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, που προεκτείνοντας τις πλευρές του οδηγεί στο ισοσκελές ABO . Από την ομοιότητα των τριγώνων $A\Delta E$ και ΔON έχουμε

$$\frac{P - \rho}{\delta} = \frac{\rho}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{\rho\delta}{P - \rho}.$$

Χρησιμοποιώντας επίσης την

$$Y = \upsilon + \delta,$$

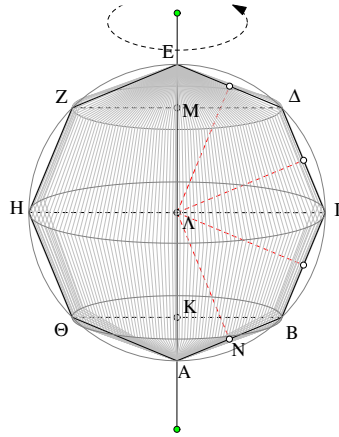
έχουμε

$$\begin{aligned} o &= \frac{\pi}{3}(P^2Y - \rho^2\upsilon) = \frac{\pi}{3}(P^2(\upsilon + \delta) - \rho^2\upsilon) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(P^2\left(\frac{\rho\delta}{P - \rho} + \delta\right) - \rho^2\frac{\rho\delta}{P - \rho}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(P^2\left(\frac{P\delta}{P - \rho}\right) - \rho^2\frac{\rho\delta}{P - \rho}\right) \\ &= \frac{\pi\delta}{3}\left(\frac{P^3 - \rho^3}{P - \rho}\right) \\ &= \frac{\pi\delta}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho), \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

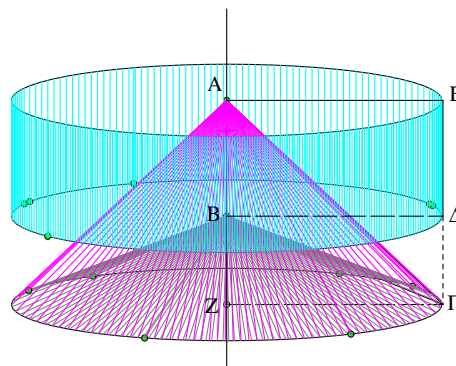
9.10 Όγκος της σφαίρας

Όπως στον κύλινδρο και στον κώνο έτσι και στην σφαίρα ο υπολογισμός του όγκου της γίνεται προσεγγίζοντάς τον με τον όγκο σωμάτων που προκύπτουν από κανονικά πολύγωνα. Μία προσέγγιση της σφαίρας ακτίνας ρ παράγεται από την περιστροφή κανονικού πολυγώνου



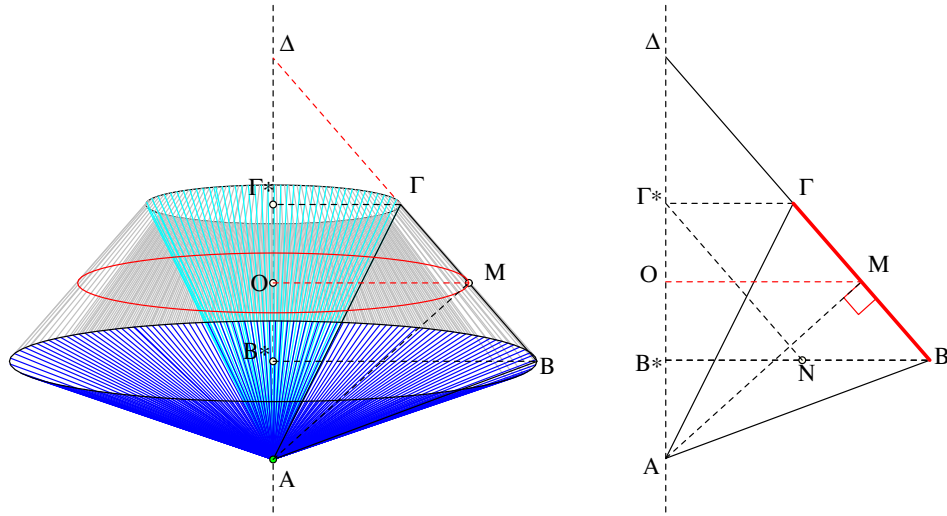
Σχήμα 740: Προσέγγιση της σφαίρας

εγγεγραμμένου σε κύκλο κ ακτίνας ρ . Ας συμβολίζουμε πάλι με $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην Παράγραφο 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο (Π_1) εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον κ και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Κατά την περιστροφή ενός τέτοιου πολυγώνου περί την διάμετρο AE , που υποθέτουμε ότι συμπίπτει με μία διαγώνιο του πολυγώνου, παράγεται ένα στερεό, ο όγκος του οποίου χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε αυτόν της σφαίρας. Οι επόμενες προτάσεις οδηγούν στον υπολογισμό αυτού του όγκου καθώς και στο όριο που οι όγκοι αυτοί τείνουν καθώς αυξάνονται οι πλευρές τους.



Σχήμα 741: Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής τριγώνου περί πλευράν

Πρόταση 9.10.1 Ο όγκος του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή τριγώνου $AB\Gamma$ περί την βάση του AB ισούται με το $1/3$ του όγκου του κυλίνδρου που προκύπτει κατά την περιστροφή του ορθογωνίου $AB\Delta E$ με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το τρίγωνο.



Σχήμα 743: Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής ισοσκελούς τριγώνου

Πόρισμα 9.10.1 Ο όγκος o του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ περί άξονα διερχόμενο από την κορυφή του A και μη τέμνοντα την βάση του $B\Gamma$ ισούται με

$$o = \frac{2}{3}\pi|AM|^2|B^*\Gamma^*|,$$

όπου M το μέσον της $B\Gamma$ και B^*, Γ^* οι προβολές των B, Γ στον άξονα περιστροφής.

Απόδειξη: Κατά την προηγούμενη πρόταση ο όγκος του εν λόγω στερεού θα είναι

$$o = \frac{2}{3}\epsilon(AB\Gamma)(2\pi|OM|).$$

Όταν το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($|AB| = |A\Gamma|$), τότε η AM είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και τα ορθογώνια τρίγωνα AMO και NT^*B^* , με N επί της BB^* έτσι ώστε $|BN| = |\Gamma\Gamma^*|$, είναι όμοια. Συνάγεται ότι

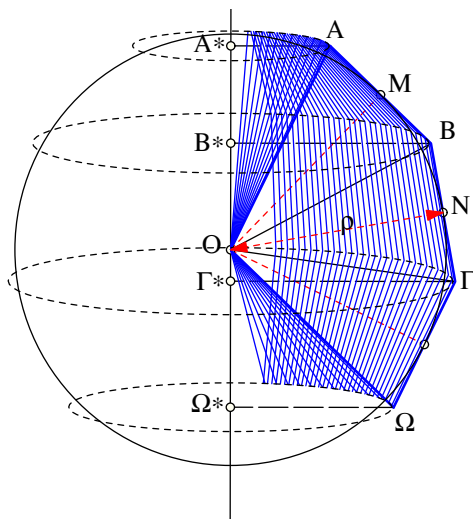
$$\frac{|OM|}{|AM|} = \frac{|B^*\Gamma^*|}{|NT^*|} = \frac{|OM|}{|AM|} = \frac{|B^*\Gamma^*|}{|B\Gamma|} \Rightarrow |OM| = \frac{|AM||B^*\Gamma^*|}{|B\Gamma|}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο ο όγκος του στερεού γράφεται

$$\begin{aligned} o &= \frac{2}{3}\epsilon(AB\Gamma)(2\pi|OM|) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}|B\Gamma||AM|\right)(2\pi|OM|) \\ &= \frac{2}{3}\pi|AM|^2|B^*\Gamma^*|, \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Είναι εύκολο να δούμε ότι ο τύπος του τελευταίου πορίσματος ισχύει και στην περίπτωση που η $B\Gamma$ δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής, δηλαδή η $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $A\Delta$.



Σχήμα 744: Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής

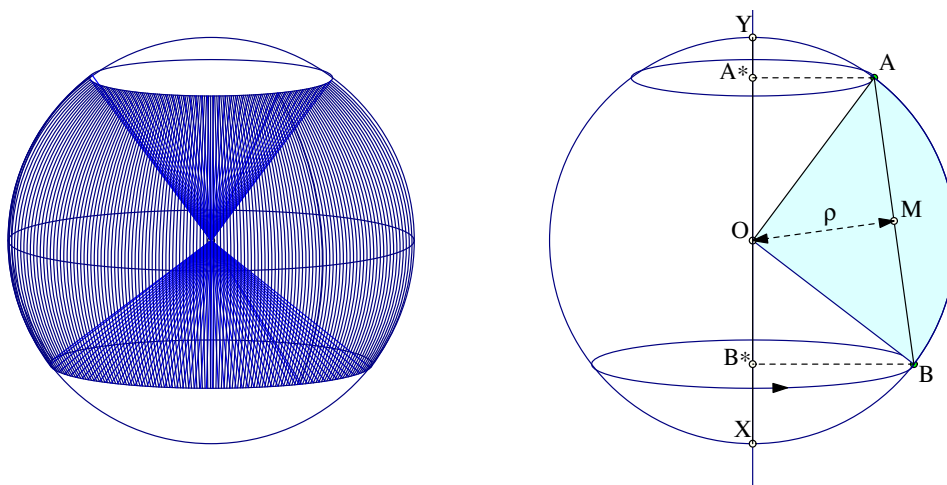
Πρόταση 9.10.3 Έστω ότι το πολύγωνο αποτελούμενο από τις ακτίνες OA , $O\Omega$ και τμήμα άλλου πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E \dots \Omega$ με ίσες πλευρές και εγγεγραμμένου σε κύκλο κ , περιστρέφεται περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο O του κ και μή τέμνοντα το τμήμα. Τότε το στερεό που παράγεται έχει όγκο

$$o = \frac{2}{3}\pi\rho^2|A^*\Omega^*|,$$

όπου A^* , Ω^* οι προβολές των A και Ω στον άξονα περιστροφής και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα σε κάθε ένα από τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$, ... και αθροίζοντας τους τύπους για τους παραγόμενους όγκους, ο.ε.δ.

Σφαιρικός τομέας ονομάζεται το στερεό που παράγεται κατά την περιστροφή ενός κυκλικού τομέα κύκλου κ που περιστρέφεται περί ευθεία XY του επιπέδου του διερχόμενου από το κέντρο O του κύκλου και μη τέμνουσα τον κυκλικό τομέα.



Σχήμα 745: Υπολογισμός όγκου σφαιρικού τομέα

Πόρισμα 9.10.2 Ο όγκος του σφαιρικού τομέα τόξου AB κύκλου κ ακτίνας ρ που περιστρέφεται γύρω από διάμετρο του κ που δεν τέμνει τον τομέα είναι ίσος με

$$o = \frac{2}{3}\pi\rho^2|A^*B^*|,$$

όπου A^* και B^* οι προβολές των άκρων του τόξου AB στον άξονα περιστροφής.

Απόδειξη: Ως όγκο του εν λόγω στερεού θεωρούμε το όριο των όγκων των στερεών που παράγονται με τον τρόπο που περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση από τα πολύγωνα $OAB\Gamma\Delta\ldots\Omega$ τα εγγεγραμμένα στον κύκλο κ , καθώς αυξάνεται το πλήθος των ίσων πλευρών του πολυγώνου $AB\Gamma\ldots\Omega$. Τότε η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο πολύγωνο αυτό κύκλου τείνει προς την ακτίνα ρ του κύκλου κ και ο τύπος προκύπτει από τον τύπο της προηγούμενης πρότασης αντικαθιστώντας στην θέση του ρ την ακτίνα του κύκλου κ , ο.ε.δ.

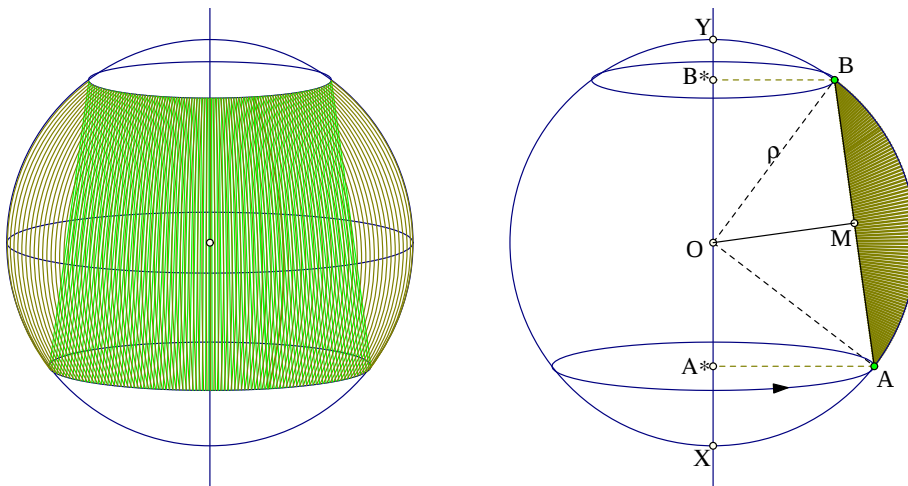
Πόρισμα 9.10.3 Ο όγκος σφαίρας ακτίνας ρ είναι

$$o = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την σφαίρα παραγόμενη από περιφέρεια ακτίνας ρ που περιστρέφεται περί την διάμετρό της AE . Στον κύκλο αυτό εγγράφουμε τα πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ έτσι ώστε η AE να είναι διαγώνιός τους. Έστω o_n ο όγκος του στερεού Σ_n που προκύπτει περιστρέφοντας το Π_n περί την διαγώνιο AE και έστω ρ_n η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο Π_n κύκλου. Κατά την Πρόταση 9.10.3 θα έχουμε

$$o_n = \frac{2}{3}\pi\rho_n^2|A^*E^*| = \frac{2}{3}\pi\rho_n^2|AE| = \frac{4}{3}\pi\rho_n^2.$$

Ο όγκος της σφαίρας είναι το όριο των o_n και αυτό εξαρτάται, σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο, από το όριο των ακτίνων ρ_n των εγγεγραμμένων κύκλων. Καθώς όμως αυξάνει το n η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ρ_n τείνει προς την ακτίνα του περιγεγραμμένου ρ , εξ ου και το συμπέρασμα, ο.ε.δ.



Σχήμα 746: Υπολογισμός όγκου σφαιρικού δακτυλίου

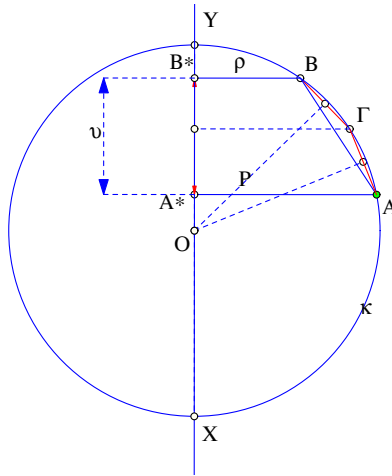
Ο **Σφαιρικός δακτύλιος** είναι το στερεό που περικλείεται μεταξύ ενός κόλουρου κώνου εγγεγραμμένου στην σφαίρα και την σφαίρα. Προκύπτει κατά την περιστροφή ενός κυκλικού τμήματος κύκλου κ περί διάμετρο του κύκλου XY που δεν τέμνει το κυκλικό τμήμα.

Πόρισμα 9.10.4 Ο όγκος σφαιρικού δακτυλίου που παράγεται από τόξο AB κύκλου κέντρου O ακτίνας ρ είναι

$$o = \frac{2}{3}\pi|A^*B^*|(\rho^2 - |OM|^2) = \frac{1}{6}\pi|A^*B^*||AB|^2,$$

όπου A^*, B^* οι προβολές των άκρων του τοξου AB στον άξονα περιστροφής και M το μέσον του τόξου.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει υπολογίζοντας την διαφορά $o_1 - o_2$ δύο όγκων. Ο πρώτος (o_1) είναι ο όγκος του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή του κυκλικού τομέα που ορίζει το τόξο AB . Ο δεύτερος o_2 είναι ο όγκος του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή του τριγώνου OAB . Οι δύο όγκοι υπολογίζονται στα πορίσματα 9.10.2 και 9.10.1 αντίστοιχα, ο.ε.δ.



Σχήμα 747: Ορισμός όγκου σφαιρικής ζώνης

Θεωρούμε ότι η σφαιρική ζώνη παράγεται από την περιστροφή του επιπέδου σχήματος A^*ABB^* που ορίζεται από τόξο AB κύκλου κ και τις προβολές των άκρων του σε μία διάμετρο XY που δεν το τέμνει. Το σχήμα αυτό περιστρέφουμε περί την διάμετρο XY (σχήμα-747), οπότε προκύπτει ένα στερεό που είναι μέρος της σφαίρας και ορίζεται τέμνοντας την σφαίρα με δύο επίπεδα σε απόσταση $u = |A^*B^*|$. Θεωρούμε τον **Όγκο της σφαιρικής ζώνης** ως άθροισμα των όγκων $o_1 + o_2$ του κόλουρου κώνου (o_1) που παράγεται κατά την περιστροφή του τραπεζίου A^*ABB^* και του όγκου του σφαιρικού δακτυλίου (o_2) που παράγεται κατά την περιστροφή του τόξου AB .

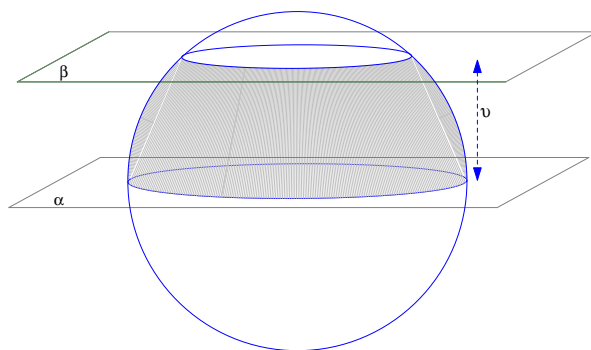
Πρόταση 9.10.4 Ο όγκος της σφαιρικής ζώνης που παράγεται από το τόξο AB του κύκλου ακτίνας ρ ισούται με

$$o = \frac{1}{2}\pi v(P^2 + \rho^2) + \frac{1}{6}\pi v^3,$$

όπου v το ύψος της σφαιρικής ζώνης και P, ρ οι ακτίνες της μεγάλης και της μικρής βάσης αντίστοιχα.

Απόδειξη: Ο όγκος του κόλουρου κώνου δίδεται κατά την Πρόταση 9.9.3

$$o_1 = \frac{\pi v}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho),$$



Σχήμα 748: Όγκος σφαιρικής ζώνης

όπου $v = |A^*B^*|$ το ύψος του. Χρησιμοποιώντας και το Πόρισμα 9.10.4 βρίσκουμε ότι ο ογκος ο της σφαιρικής ζώνης είναι

$$\begin{aligned}
 o &= o_1 + o_2 = \frac{\pi v}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho) + \frac{1}{6}\pi v|AB|^2 \\
 &= \frac{1}{6}\pi v(2(P^2 + \rho^2 + P\rho) + |AB|^2) \\
 &= \frac{1}{6}\pi v(2P^2 + 2\rho^2 + 2P\rho + (P - \rho)^2 + v^2) \\
 &= \frac{1}{6}\pi v(3P^2 + 3\rho^2 + v^2) \\
 &= \frac{1}{2}\pi v(P^2 + \rho^2) + \frac{1}{6}\pi v^3,
 \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

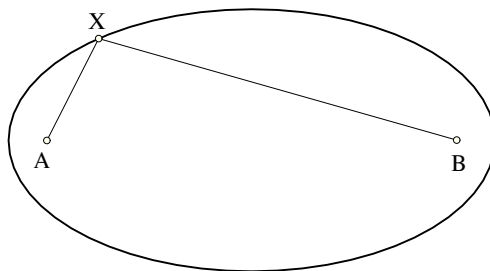
Σχόλιο-2 Ας σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι όλοι αυτοί οι υπολογισμοί όγκων στερεών που παράγονται από περιστροφή, δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις υπολογισμών ολοκληρωμάτων, όπως αυτά ορίζονται στον *Απειροστικό Λογισμό*. Εκεί αναπτύσσεται μία εννιαία μέθοδος υπολογισμού που μπορεί να εφαρμοσθεί σε πολύ περισσότερα στερεά απ' όσα εξετάσαμε εδώ. Στο βιβλίο του Spivak δίδονται όλοι αυτοί οι υπολογισμοί μας και ακόμη περισσότεροι [Σπί04, σελ. 326] ως ασκήσεις εφαρμογής των γενικών μεθόδων του απειροστικού λογισμού. Οι γενικές αυτές μέθοδοι ωστόσο, στηρίζονται στις ιδέες που αναπτύξαμε εδώ και που οφείλονται στον Εύδοξο και κυρίως στον Αρχιμήδη.

Κεφάλαιο 10

Κωνικές Τομές

10.1 Κωνικές τομές

Οι τομές κώνικης επιφάνειας Σ με επίπεδο ε κάθετο στον άξονά της και μη διερχόμενο από την κορυφή της O είναι κύκλοι (Πρόταση 8.9.2). Όταν το επίπεδο δεν είναι κάθετο στον άξονα της Σ οι τομές που προκύπτουν είναι ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές. Οι ελλείψεις προκύπτουν, όπως θα δούμε, από τομές με επίπεδα που τέμνουν όλες τις γενέτειρες της Σ . Μιά **Έλλειψη** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X τα οποία έχουν



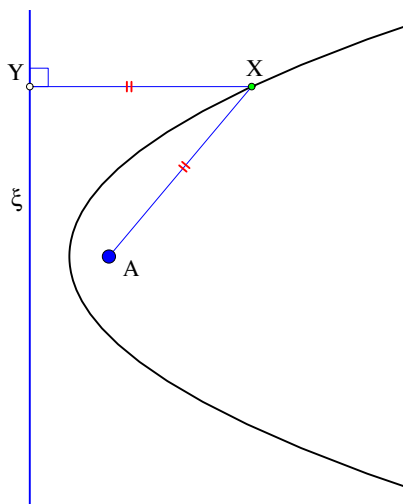
Σχήμα 749: Έλλειψη ($|XA| + |XB| = \lambda$)

σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία A και B .

$$|XA| + |XB| = \lambda.$$

Τα σημεία A και B λέγονται **Εστίες** της έλλειψης. Ελλείψεις προκύπτουν επίσης όταν τμηθεί ορθός κυκλικός κύλινδρος με επίπεδο μη-κάθετο (και μη παράλληλο) στις γενέτειρές του. Οι κύκλοι μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση ελλείψεων, των οποίων τα σταθερά σημεία A και B συμπίπτουν.

Οι παραβολές προκύπτουν από τομές με επίπεδα που είναι παράλληλα προς κάποιο εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας (Παράγραφος 8.9). Η **Παραβολή** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X τα οποία έχουν την ίδια απόσταση από σταθερό σημείο A και σταθερή ευθεία ξ . Το σημείο A λέγεται **Εστία** της παραβολής και η ευθεία ξ



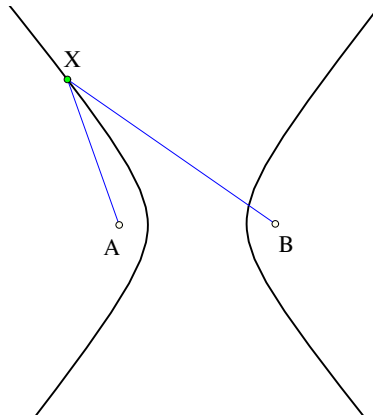
Σχήμα 750: Παραβολή ($|XA| = |XY|$)

λέγεται **Διευθετούσα** της παραβολής.

Τέλος οι υπερβολές προκύπτουν από τομές με επίπεδα που είναι παράλληλα προς δύο ακριβώς γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας. Η **Υπερβολή** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X τα οποία έχουν σταθερή διαφορά αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία A και B .

$$||XA| - |XB|| = \lambda.$$

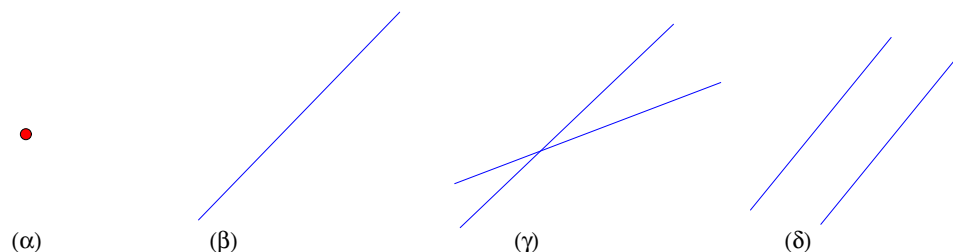
Και πάλι τα σημεία A και B ονομάζονται **Εστίες** της υπερβολής.



Σχήμα 751: Υπερβολή ($||XA| - |XB|| = \lambda$)

Τα τρία αυτά είδη καμπυλών (ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές) ονομάζονται συλλογικά **Γνήσιες Κωνικές Τομές** και προκύπτουν ως τομές κωνικής επιφάνειας με επίπεδο μη διερχόμενο διά της κορυφής O . Οι ελλείψεις και οι υπερβολές έχουν, όπως θα δούμε, δύο άξονες συμμετρίας καθώς και κέντρο συμμετρίας και λέγονται **Κωνικές με κέντρο**. Η υπερβολή ωστόσο έχει μόνο άξονα συμμετρίας αλλά όχι κέντρο συμμετρίας.

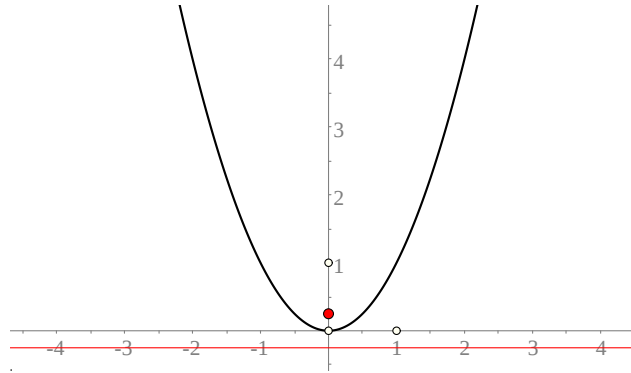
Όταν το επίπεδο, με το οποίο τέμνουμε την κωνική επιφάνεια, ε διέρχεται από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας, τότε προκύπτουν, ανάλογα με την κλίση του ϵ , οι επόμενες καμπύλες, με μία καταχρηστική έννοια του όρου: (α) ένα σημείο (το ϵ περιέχει τότε το O και κανένα άλλο σημείο της Σ), (β) δύο τεμνόμενες ευθείες (το ϵ τέμνει την Σ κατά δύο γενέτειρες) και (γ) μία ευθεία (το ϵ εφαπτεται της Σ). Όπως ανέφερα ήδη, ο όρος **καμπύλη** χρησιμοποιείται, κατ' αρχήν, καταχρηστικά για αυτές τις περιπτώσεις. Συλλογικά αυτές οι ιδιόζουσες περιπτώσεις τομών ονομάζονται **Ιδιόμορφες κωνικές τομές**. Σε αυτές προσμετρώνται και ζεύγη παραλλήλων ευθειών, θεωρούμενα ότι προκύπτουν από τομή κυλίνδρου με επίπεδο παράλληλο προς τις γενέτειρές του.



Σχήμα 752: Τα τέσσερα είδη ιδιόμορφων κωνικών τομών

Σχόλιο Συνήθως ο μαθητής συναντά τις κωνικές τομές, πολύ πριν της γνωρίσει από την γεωμετρική σκοπιά, στην μορφή γραφικών παραστάσεων απλών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, την παραβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = x^2,$$

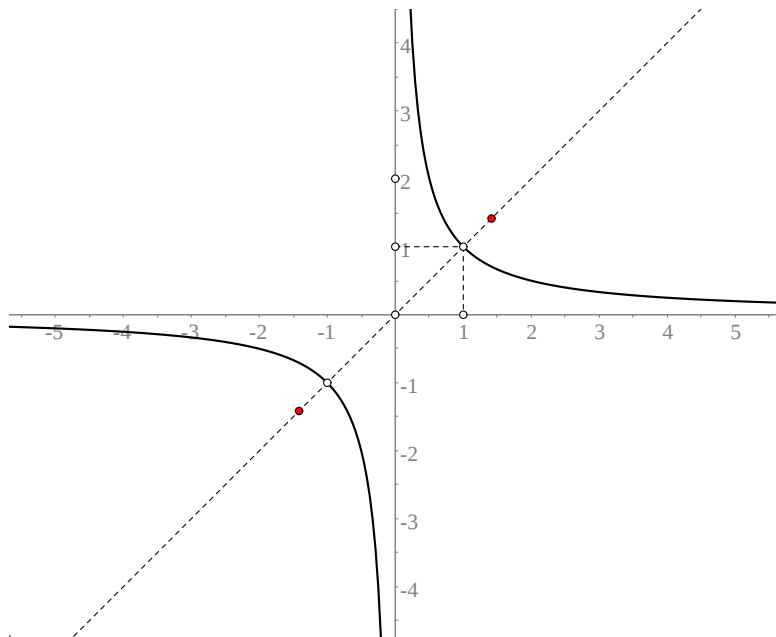


Σχήμα 753: Παραβολή ως γραφική της $y = x^2$

της οποίας η εστία είναι στο σημείο $y = \frac{1}{4}$ του y -άξονα και η διευθετούσα είναι η παράλληλη του x -άξονα από το σημείο του y -άξονα $y = -\frac{1}{4}$.

Συναντά επίσης την υπερβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \frac{1}{x},$$



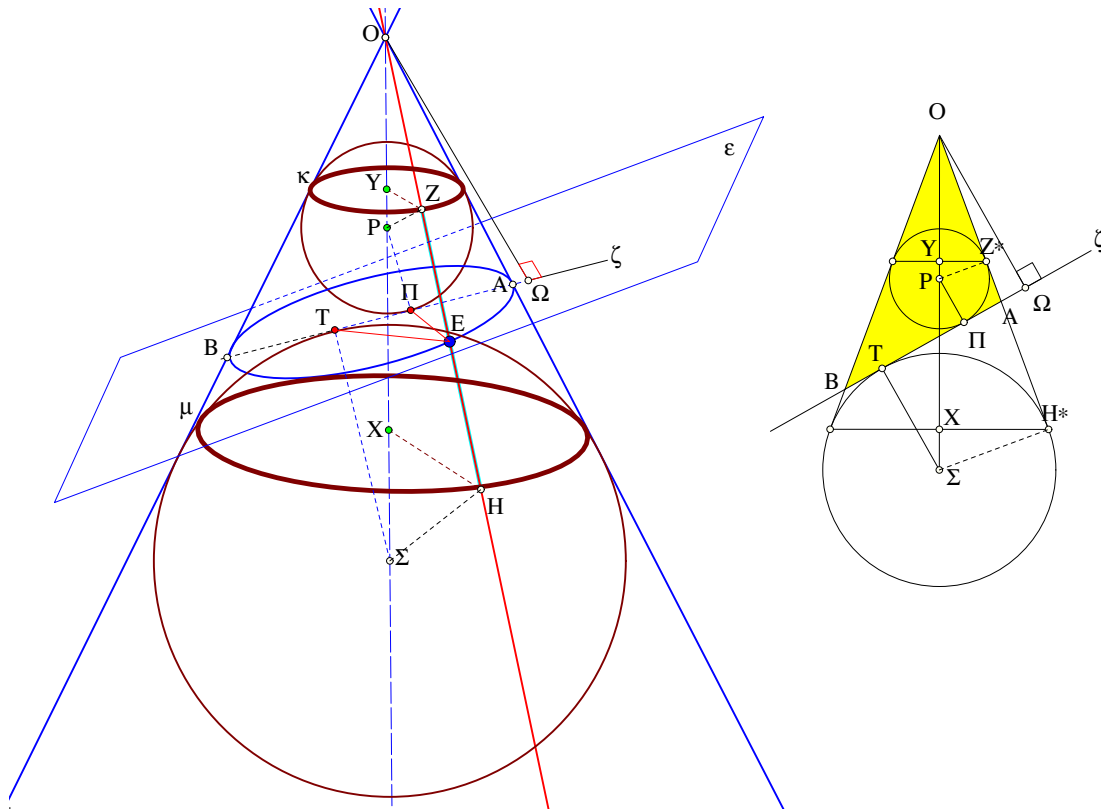
Σχήμα 754: Παραβολή ως γραφική της $y = \frac{1}{x}$

που είναι υπερβολή διερχόμενη από τα σημεία $\pm(1, 1)$ και με εστίες στα σημεία $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

10.2 Οι σφαίρες του Dandelin

Οι **Σφαίρες του Dandelin** (1794-1847) διευκολύνουν τον συσχετισμό των κωνικών τομών με τους γεωμετρικούς τόπους, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Πρόκειται απλά για σφαίρες εγγεγραμμένες σε κωνικές ή κυλινδρικές επιφάνειες και ταυτόχρονα εφαπτόμενες ενός άλλου επιπέδου ε . Οι επόμενες προτάσεις δείχνουν ότι κάθε επίπεδο ε που τέμνει μία τέτοια επιφάνεια ορίζει δύο (ή μία σε ορισμένες περιπτώσεις που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο) σφαίρες που λέγονται **Σφαίρες Dandelin** του επιπέδου ε . Αποφασιστικής σημασίας σε αυτήν την παράγραφο είναι η Πρόταση 8.9.5, κατά την οποία κάθε επίπεδο ε , μη-διερχόμενο από την κορυφή O κωνικής επιφάνειας, τέμνει (α) ή όλες τις γενέτειρες, (β) ή όλες εκτός από δύο, (γ) ή όλες εκτός από μία. Εδώ θα εξετάσουμε τις δύο πρώτες περιπτώσεις. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε και την τρίτη.

Πρόταση 10.2.1 Έστω επίπεδο ε τέμνον όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας K . Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της κωνικής επιφάνειας και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου ε .



Σχήμα 755: Σφαίρες του Dandelin

Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα OX της κωνικής επιφάνειας K και την κάθετο $O\Omega$ από την κορυφή O του κώνου προς το επίπεδο ε . Έστω ότι η τομή του ε και του ϑ είναι η ευθεία ζ . Εκ κατασκευής η ζ είναι κάθετη στην $O\Omega$ και τέμνει τις δύο γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας K που περιέχονται στο ϑ στα σημεία A και B . Ορίζεται λοιπόν στο επίπεδο ϑ τρίγωνο OAB και επομένως ο εγγεγραμμένος και παρεγγεγραμμένος κύκλος του στην γωνία AOB με κέντρα αντίστοιχα P και Σ . Οι σφαίρες με κέντρα τα P και Σ

και ακτίνες αυτές του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου, ΡΠ και ΣΤ αντίστοιχα, είναι οι ζητούμενες. Δείχνω ότι η μία από αυτές, η Ρ(ΡΠ) είναι εφαπτόμενη του κώνου. Πράγματι, αν ΟΗ είναι μία άλλη γενέτειρα και Ζ η προβολή του Ρ σε αυτήν, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΡΖΟ και ΡΖ*Ο, όπου Ζ* η προβολή του Ρ στην ΟΑ, είναι ίσα. Τούτο διότι το Ρ είναι επί το άξονος της κωνικής επιφάνειας, άρα έχει την ίδια απόσταση από τις γενέτειρες, συνεπώς $|PZ| = |PZ^*|$. Επίσης τα δύο ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα ΟΡ κοινή, είναι συνεπώς ίσα. Αυτό συνεπάγεται ότι η ΟΗ είναι εφαπτόμενη της σφαίρας στο σημείο Ζ και αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η σφαίρα Σ(ΣΤ) είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Το ότι οι σφαίρες αυτές είναι και εφαπτόμενες στο επίπεδο ε συνάγεται αμέσως λ.χ. για την Ρ(ΡΠ), από το γεγονός ότι η ΡΠ είναι και κάθετος στο επίπεδο ε, ως παράλληλη της ΟΩ, που έχει αυτήν την ιδιότητα. Συνεπώς το επίπεδο ε είναι εφαπτόμενο της σφαίρας Ρ(ΡΠ) ως κάθετο στο άκρο μιάς ακτίνας της, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.2.1 Τα σημεία τομής επιπέδου ε, που τέμνει όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας Κ, αποτελούν μία έλλειψη με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο ε.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Πρόταση 8.11.3). Αν Ε σημείο της τομής του ε και της Κ, τότε η γενέτειρα ΟΕ είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν Π και Τ είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών Ρ(ΡΠ) και Σ(ΣΤ) με το επίπεδο ε, τότε και οι ΕΠ και ΕΤ είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι $|ΕΠ| = |ΕΖ|$ και $|ΕΤ| = |ΕΗ|$, όπου Ε και Ζ τα σημεία επαφής της γενέτειρας ΟΕ με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

$$|ΕΤ| + |ΕΠ| = |ΕΖ| + |ΕΗ| = |ΖΗ|,$$

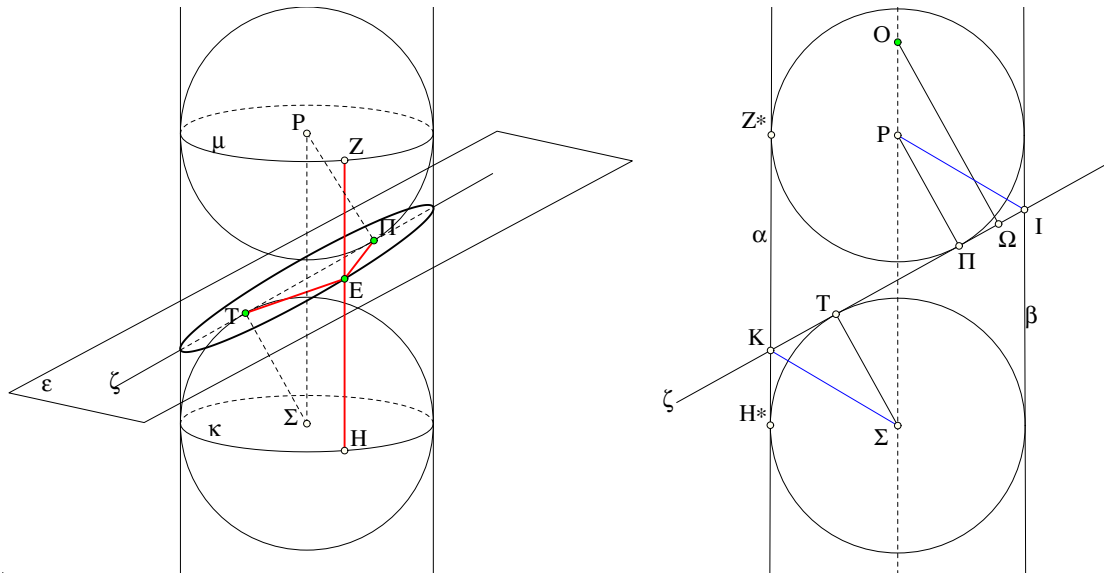
το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κόλουρου κώνου που σχηματίζεται από τους κύκλους κ και μ, κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

Πρόταση 10.2.2 Έστω επίπεδο ε τέμνον όλες τις γενέτειρες κυλινδρικής επιφάνειας Κ. Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της Κ και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου ε.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 10.2.1. Το επίπεδο του χαρτιού στο σχήμα-756 είναι το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα η της κυλινδρικής επιφάνειας και την κάθετο ΟΩ στο επίπεδο ε από τυχόν σημείο Ο του άξονα. Το επίπεδο ϑ τέμνει την κυλινδρική επιφάνεια Κ κατά δύο (παράλληλες) γενέτειρες α και β. Τέμνει επίσης το επίπεδο ε κατά ευθεία ζ. Φέρνοντας τις διχοτόμους ΚΣ, ΙΡ των γωνιών που σχηματίζει η ζ με τις α, β και τις τομές αυτών Ρ, Σ με τον άξονα η, ορίζουμε τους κύκλους Ρ(ΡΠ) και Σ(ΣΤ) που εφάπτονται ταυτόχρονα των α, β και ζ. Οι σφαίρες Ρ(ΡΠ) και Σ(ΣΤ) είναι οι ζητούμενες. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της Πρότασης 10.2.1, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.2.2 Τα σημεία τομής επιπέδου ε, που τέμνει όλες τις γενέτειρες κυλινδρικής επιφάνειας Κ, αποτελούν μία έλλειψη με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο ε.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Πρόταση 8.11.3). Αν Ε σημείο της τομής του ε και της Κ, τότε η γενέτειρα ΕΖ είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν Π και Τ είναι τα σημεία επαφής



Σχήμα 756: Σφαίρες του Dandelin για τομή κυλίνδρου με επίπεδο

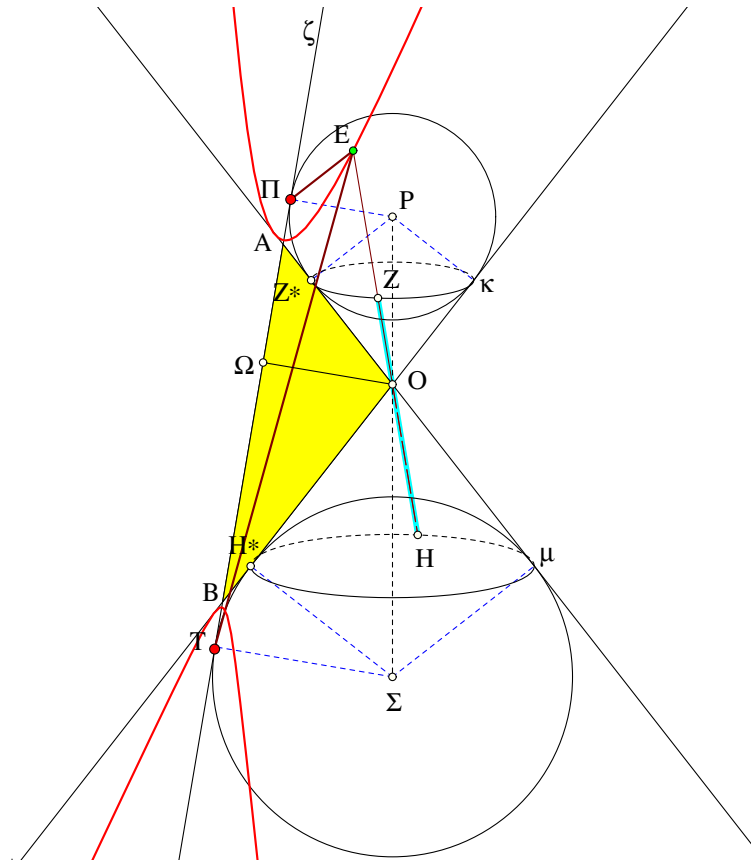
των σφαιρών $P(\Pi)$ και $\Sigma(\Sigma\Gamma)$ με το επίπεδο ε , τότε και οι $E\Pi$ και ET είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι $|E\Pi| = |EZ|$ και $|ET| = |EH|$, όπου E και Z τα σημεία επαφής της γενέτειρας OE με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

$$|ET| + |E\Pi| = |EZ| + |EH| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κυλίνδρου που σχηματίζεται από τους κύκλους κ και μ , κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κυλινδρική επιφάνεια επιφάνεια, ο.ε.δ.

Πρόταση 10.2.3 Έστω επίπεδο ε τέμνον όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας K εκτός από δύο. Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της K και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου ε .

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 10.2.1. Το επίπεδο του χαρτιού στο σχήμα-757 είναι το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα της κωνικής επιφάνειας K και την κάθετο $O\Omega$ από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας προς το επίπεδο ε . Έστω ότι η τομή του ε και του ϑ είναι η ευθεία ζ . Εκ κατασκευής η ζ είναι κάθετη στην $O\Omega$ και τέμνει τις δύο γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας που περιέχονται στο ϑ στα σημεία A και B . Ορίζεται λοιπόν στο επίπεδο ϑ τρίγωνο OAB και επομένως οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι του με κέντρα αντίστοιχα P και Σ . Οι σφαίρες με κέντρα τα P και Σ και ακτίνες αυτές των παρεγγεγραμμένων, $P\Pi$ και $\Sigma\Gamma$ αντίστοιχα, είναι οι ζητούμενες. Δείχνω ότι η μία από αυτές, η $P(\Pi)$ είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Πράγματι, αν OH είναι μία άλλη γενέτειρα και Z η προβολή του P σε αυτήν, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα PZO και PZ^*O , όπου Z^* η προβολή του P στην OA , είναι ίσα. Τούτο διότι το P είναι επί το άξονος του κώνου, άρα έχει την ίδια απόσταση από τις γενέτειρες, συνεπώς $|PZ| = |PZ^*|$. Επίσης τα δύο ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα OP κοινή, είναι συνεπώς ίσα. Αυτό συνεπάγεται ότι η OH είναι εφαπτόμενη της σφαίρας στο σημείο Z και αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η σφαίρα $\Sigma(\Sigma\Gamma)$ είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Το ότι οι σφαίρες αυτές είναι και εφαπτόμενες στο επίπεδο ε συνάγεται αμέσως λ.χ. για την $P(\Pi)$,



Σχήμα 757: Σφαίρες του Dandelin II

από το γεγονός ότι η RP είναι και κάθετος στο επίπεδο ε , ως παράλληλη της $O\Omega$, που έχει αυτήν την ιδιότητα. Συνεπώς το επίπεδο ε είναι εφαπτόμενο της σφαίρας $P(P\Pi)$ ως κάθετο στο άκρο μιάς ακτίνας της, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.2.3 Τα σημεία τομής επιπέδου ε , που τέμνει όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας K εκτός από δύο, αποτελούν μία υπερβολή με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο ε .

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Πρόταση 8.11.3). Αν E σημείο της τομής του ε και της K , τότε η γενέτειρα OE είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν Π και T είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών $P(P\Pi)$ και $\Sigma(\Sigma T)$ με το επίπεδο ε , τότε και οι $E\Pi$ και ET είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι $|E\Pi| = |EZ|$ και $|ET| = |EH|$, όπου E και Z τα σημεία επαφής της γενέτειρας OE με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

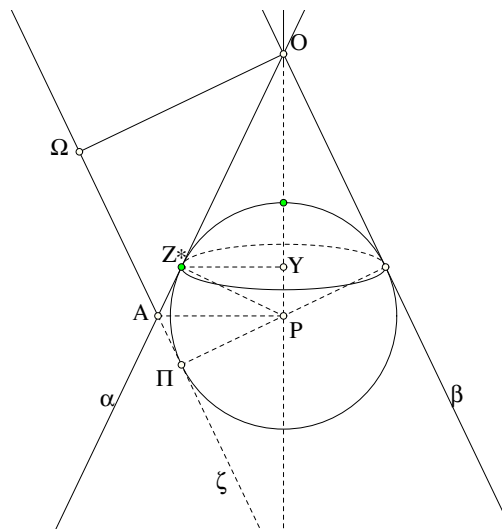
$$|ET| - |E\Pi| = |EH| - |EZ| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κόλπου κώνου (ένωση των δύο κώνων με κοινή κορυφή το O) που σχηματίζεται από τους κύκλους κ και μ , κατά τους οποίους εφαπτόνται οι δύο σφαίρες με την κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

10.3 Διευθετούσες

Εκτός από την παραβολή, στην οποία η διευθετούσα παίζει σημαντικό ρόλο για τον συνηθισμένο χαρακτηρισμό της ως γεωμετρικό τόπο, διευθετούσες ορίζονται και για τα άλλα είδη κωνικών τομών με ιδιότητες παρόμοιες με αυτήν της διευθετούσας της παραβολής. Στην παράγραφο αυτή συσχετίζουμε πρώτα την διευθετούσα της παραβολής με την αντίστοιχη σφαίρα του Dandelin και κατόπιν εξετάζουμε την γενίκευσή της για τις άλλες κωνικές τομές.

Πρόταση 10.3.1 Έστω επίπεδο ε παράλληλο προς εφαπτόμενο επίπεδο κωνικής επιφάνειας K . Υπάρχει τότε μία σφαίρα εφαπτόμενη της K και ταυτόχρονα εφαπτόμενη του επιπέδου ε .



Σχήμα 758: Σφαίρα του Dandelin II

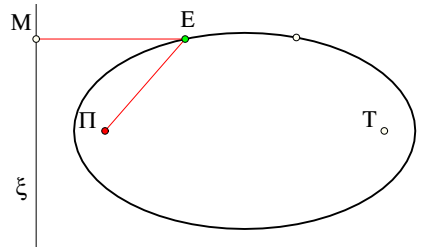
Απόδειξη: Όπως και στις προτάσεις της προηγούμενης παραγράφου, θεωρούμε το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα της κωνικής επιφάνειας K και την κάθετο $O\Omega$ από την κορυφή O της K στο δοθέν επίπεδο ε (στο σχήμα-758 το ϑ ταυτίζεται με το επίπεδο του χαρτιού). Τα επίπεδα ϑ και ε τέμνονται κατά ευθεία ζ . Η ευθεία αυτή είναι παράλληλος της γενέτειρας β που περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο το παράλληλο του ε . Το ϑ περιέχει επίσης την συμμετρική της β ως προς τον άξονα γενέτειρα α και μάλιστα, λόγω της παραλληλίας των ζ και β , το τρίγωνο με πλευρές τις α , ζ και τον άξονα είναι ισοσκελές. Μεταβαίνοντας λοιπόν στο επίπεδο σχήμα το περιεχόμενο στο ϑ ευρίσκουμε κύκλο $P(P\Pi)$ με κέντρο επί του άξονος και ταυτόχρονα εφαπτόμενο των δύο παραλλήλων ζ και β , καθώς και της άλλης γενέτειρας α της Σ που περιέχεται στο ϑ . Προς τούτο αρκεί να θεωρήσουμε την κάθετο προς τον άξονα OP από το σημείο τομής των α και ζ . Αυτή διχοτομεί την γωνία στο A μεταξύ των α και ζ και ορίζει κύκλο $P(P\Pi)$ ταυτόχρονα εφαπτόμενο των α , β και ζ . Η σφαίρα $P(P\Pi)$ είναι η ζητούμενη. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 10.2.1, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.3.1 Τα σημεία τομής κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ε , παράλληλου προς εφαπτόμενο επίπεδο της K , αποτελούν μία παραβολή με εστία το σημείο επαφής Π της σφαίρας του Dandelin με το επίπεδο ε και διευθετούσα την ευθεία ξ κατά την οποία το ε τέμνει το επίπεδο η του κύκλου των σημείων επαφής της σφαίρας με την κωνική επιφάνεια.

για κάθε σημείο E της έλλειψης ο λόγος των αποστάσεων

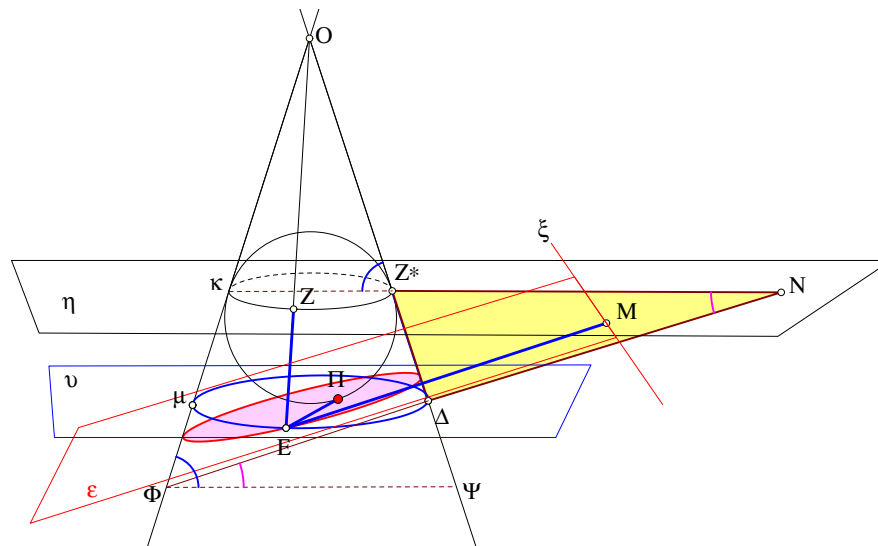
$$\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa < 1,$$

να είναι σταθερός. Το M συμβολίζει εδώ την προβολή του E στην ξ .



Σχήμα 760: Ιδιότητα έλλειψης $\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa < 1$

Απόδειξη: Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον ορισμό της έλλειψης ως τομής κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ϵ και μία από τις σφαίρες του Dandelin. Η εστία Π είναι το σημείο επαφής του ϵ με την σφαίρα και το τυχόν σημείο E της έλλειψης ορίζει μία γενέτειρα EO της K καθώς και ένα επίπεδο ν διερχόμενο διά του E και κάθετο στον άξονα της K , το οποίο τέμνει την K κατά κύκλο μ . Επίσης τα σημεία επαφής της σφαίρας και της κωνικής



Σχήμα 761: Η διευθετούσα ξ της έλλειψης

επιφάνειας ορίζουν κύκλο κ περιεχόμενο σε επίπεδο η παράλληλο του ν . Τα δύο επίπεδα ν και η αποτεμνουν έναν κόλouro κώνου από την κωνική επιφάνεια. Η $E\Pi$ ισούται με την γενέτειρα EZ του κόλουρου κώνου. Έστω τώρα ξ ή ευθεία κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα ϵ και η και M η προβολή του E στην ξ . Θεωρούμε το επίπεδο ϑ που παράγεται από τον άξονα της K και την κάθετο από το O στο επίπεδο ϵ . Το ϑ τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά δύο γενέτειρες $O\Phi$ και $O\Psi$ συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα. Το ϑ ορίζει επίσης και την γενέτειρα ΔZ^* του προηγούμενου κόλουρου κώνου, της οποίας το μήκος

$$|\Delta Z^*| = |EZ| = |E\Pi|.$$

Φέρουμε από το Δ παράλληλο της EM μέχρι να τμήσει το επίπεδο η στο σημείο N . Ισχύει και $|EM| = |\Delta N|$ διότι αυτά είναι τμήματα παραλλήλων περιοριζόμενα από παράλληλα επίπεδα (Πρόταση 7.2.6). Το τρίγωνο $Z^*\Delta N$ εξαρτάται από την θέση του σημείου E , εν τούτοις παραμένει όμοιο εαυτώ, συνεπώς ο λόγος των πλευρών του

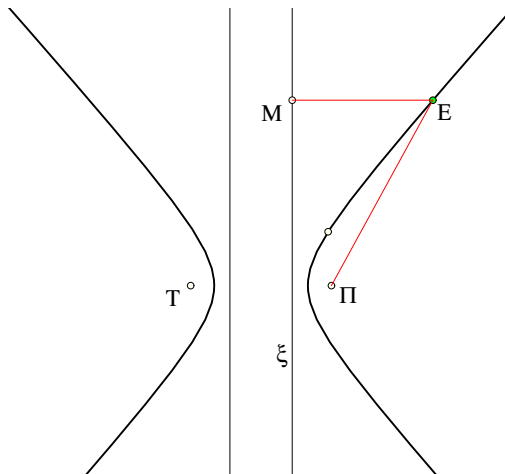
$$\kappa = \frac{|\Delta Z^*|}{|\Delta N|} = \frac{|E\Pi|}{|EM|}$$

παραμένει σταθερός. Το ότι το $\kappa < 1$ έπεται εύκολα από το ότι η γωνία $|\Delta N Z^*| < |\Delta Z^* N|$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.3.3 Δοθείσης υπερβολής, σε κάθε εστία της Π αντιστοιχεί ευθεία ξ , έτσι ώστε γιά κάθε σημείο E της υπερβολής ο λόγος των αποστάσεων

$$\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa > 1,$$

να είναι σταθερός. Το M συμβολίζει εδώ την προβολή του E στην ξ .

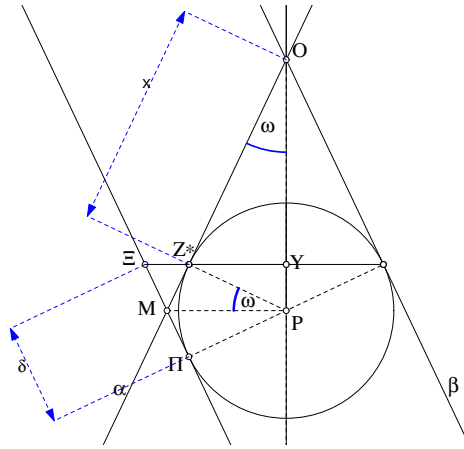


Σχήμα 762: Ιδιότητα υπερβολής $\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa > 1$

Απόδειξη: Γιά την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον ορισμό της υπερβολής ως τομής κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ϵ και μία από τις σφαίρες του Dandelin. Η εστία Π είναι το σημείο επαφής του ϵ με την σφαίρα και το τυχόν σημείο E της υπερβολής ορίζει μιά γενέτειρα EO της K καθώς και ένα επίπεδο υ διερχόμενο διά του E και κάθετο στον άξονα της K , το οποίο τέμνει την K κατά κύκλο μ . Επίσης τα σημεία επαφής της σφαίρας και της κωνικής επιφάνειας ορίζουν κύκλο χ περιεχόμενο σε επίπεδο η παράλληλο του υ . Τα δύο επίπεδα υ και η αποτέμνουν έναν κόλouro κώνου από την κωνική επιφάνεια. Η $E\Pi$ ισούται με την γενέτειρα EZ του κόλουρου κώνου. Έστω τώρα ξ ή ευθεία κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα ϵ και η και M η προβολή του E στην ξ . Θεωρούμε το επίπεδο ϑ που παράγεται από τον άξονα της K και την κάθετο από το O στο επίπεδο ϵ . Το ϑ τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά δύο γενέτειρες $O\Phi$ και $O\Psi$ συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα. Το ϑ ορίζει επίσης και την γενέτειρα ΔZ^* του προηγούμενου κόλουρου κώνου, της οποίας το μήκος

$$|\Delta Z^*| = |EZ| = |E\Pi|.$$

με τό άνοιγμά της και με την σφαίρα που καθορίζει την θέση της εστίας της. Αναφερόμενοι στο σχήμα της Πρότασης 10.3.1, θεωρούμε την τομή του με το επίπεδο θ , ως προς το οποίο το όλο σχήμα αυτής της πρότασης είναι συμμετρικό. Προσδιορίζουμε το δ συναρτήσει του



Σχήμα 766: Παραβολή ως κωνική τομή

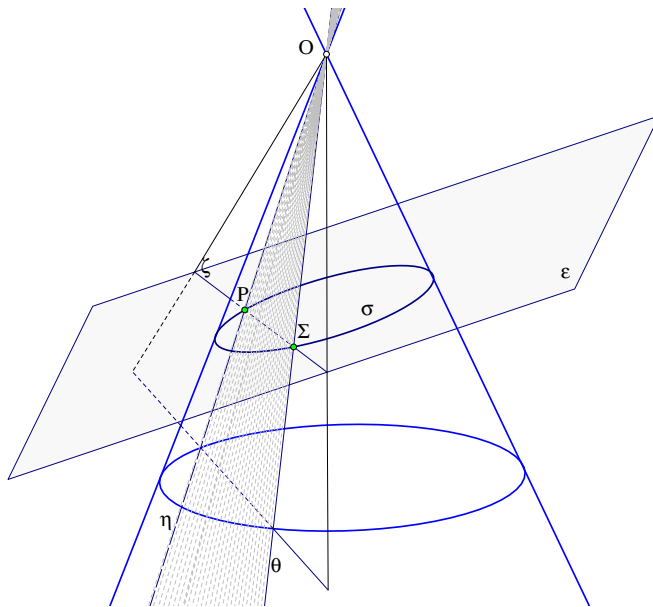
ανοίγματος ω της κωνικής επιφάνειας και του μήκους x της εφαπτόμενης από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας προς την σφαίρα του Dandelin. Προφανώς ισχύει

$$\delta = 2|EM| = 2|MP| = 2|MZ^*| = 2|PZ^*|\epsilon\phi(\omega) = 2x\epsilon\phi(\omega)^2.$$

Συνεπώς, για κάθε κωνική επιφάνεια (άνοιγμα ω), δοθέντος του δ ευρίσκομε, λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση, την θέση x στην γενέτειρα, στην οποία θα εφάπτεται η σφαίρα που ορίζει το επίπεδο ϵ και την αντίστοιχη κωνική τομή που θα συμπίπτει με την παραβολή.

10.4 Γενικά χαρακτηριστικά κωνικών

Υπάρχουν ορισμένα χαρακτηριστικά των κωνικών τομών που είναι κοινά για ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές. Άλλα πάλι εξαρτώνται από την ειδική φύση της κωνικής τομής, που προσδιορίζεται από την εκκεντρότητά της κ . Στην παραγραφο αυτή θα εξετάσουμε κάποιες ιδιότητες κοινές, που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό αυτών των καμπυλών ως τομών κωνικής επιφάνειας με επίπεδο. Και τα τρία είδη κωνικών έχουν μία τουλάχιστον εστία, μία αντίστοιχη διευθετούσα και εκκεντρότητες: $\kappa < 1$, $\kappa = 1$ και $\kappa > 1$, που χαρακτηρίζουν αντίστοιχα την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή. Σε ορισμένες ιδιότητες η εκκεντρότητα παίζει ρόλο γενικό, χωρίς να υπεισέρχεται σε αυτές το μέγεθός της. Απλά χρησιμοποιείται τότε το ότι, ο λόγος της απόστασης από την εστία, προς την απόσταση από την αντίστοιχο διευθετούσα, είναι σταθερός. Στα επόμενα θεωρούμε την κωνική σ που ορίζεται από την τομή κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ε , μη διερχομένου διά της κορυφής O της κωνικής επιφάνειας. Μία θεμελιώδης ιδιότητα των κωνικών τομών εκφράζεται με το επόμενο θεώρημα.



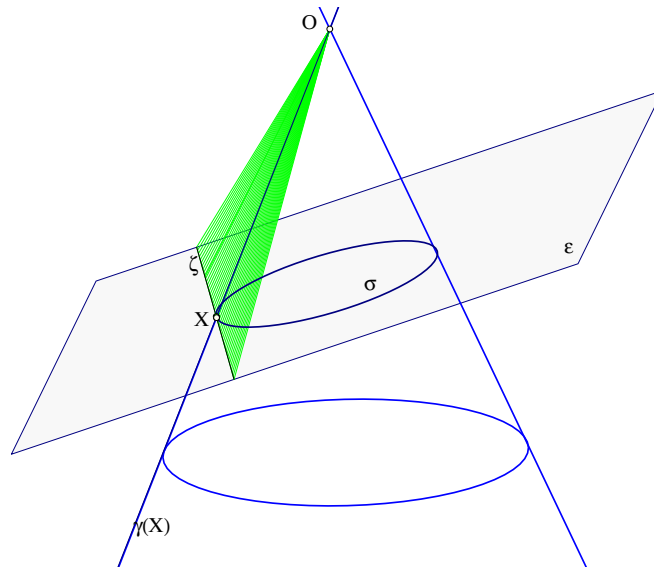
Σχήμα 767: Τομή κωνικής και ευθείας

Θεώρημα 10.4.1 Κάθε ευθεία ζ στο επίπεδο ε της κωνικής την τέμνει, το πολύ, σε δύο σημεία.

Απόδειξη: Κάθε ευθεία ζ στο επίπεδο της κωνικής ορίζει, μαζί με την κορυφή O του κώνου, ένα επίπεδο το οποίο αποτελείται από την κωνική επιφάνεια δύο το πολύ γενέτειρες η , θ . Τα κοινά σημεία της κωνικής και της ευθείας ζ θα είναι πάνω σ' αυτές τις γενέτειρες, συνεπώς δεν μπορεί να είναι περισσότερα από δύο, ο.ε.δ.

Εφαπτόμενη της κωνικής σ σε ένα σημείο της X λέγεται η ευθεία ζ που αποτελείται στο επίπεδο ε της κωνικής το εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας, το οποίο εφάπτεται αυτής κατά μήκος της γενέτειρας $\gamma(X)$ που ορίζεται από το X .

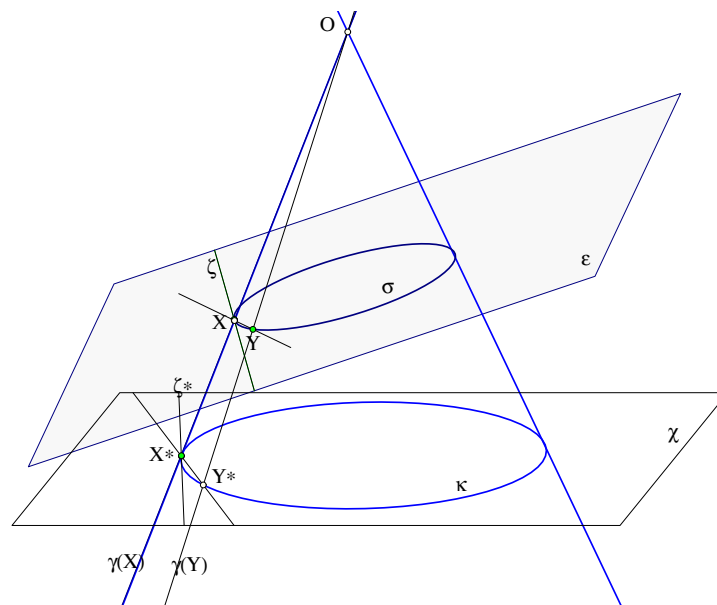
Θεώρημα 10.4.2 Σε κάθε σημείο X της κωνικής υπάρχει μία ακριβώς εφαπτόμενη αυτής.



Σχήμα 768: Εφαπτόμενη ζ κωνικής στο X

Απόδειξη: Η απόδειξη ανάγεται στην αντίστοιχη ιδιότητα της κωνικής επιφάνειας. Κάθε σημείο X της κωνικής που είναι τομή του επιπέδου ϵ και της κωνικής επιφάνειας K , περιέχεται σε μία ακριβώς γενέτειρα $\gamma(X)$ του κώνου η οποία είναι κοινή με ένα ακριβώς εφαπτόμενο επίπεδο ϑ του κώνου (Παράγραφος 8.9). Η τομή των επιπέδων ϑ και ϵ ορίζει την μία και μοναδική ευθεία ζ διά του X που έχει την ιδιότητα της εφαπτόμενης, ο.ε.δ.

Πρόταση 10.4.1 Η εφαπτόμενη ζ κωνικής σ σε σημείο X αυτής συμπίπτει με την οριακή θέση ευθείας XY διερχομένης από το X και ένα δεύτερο σημείο Y της κωνικής, καθώς το Y τείνει να συμπίπτει με το X .

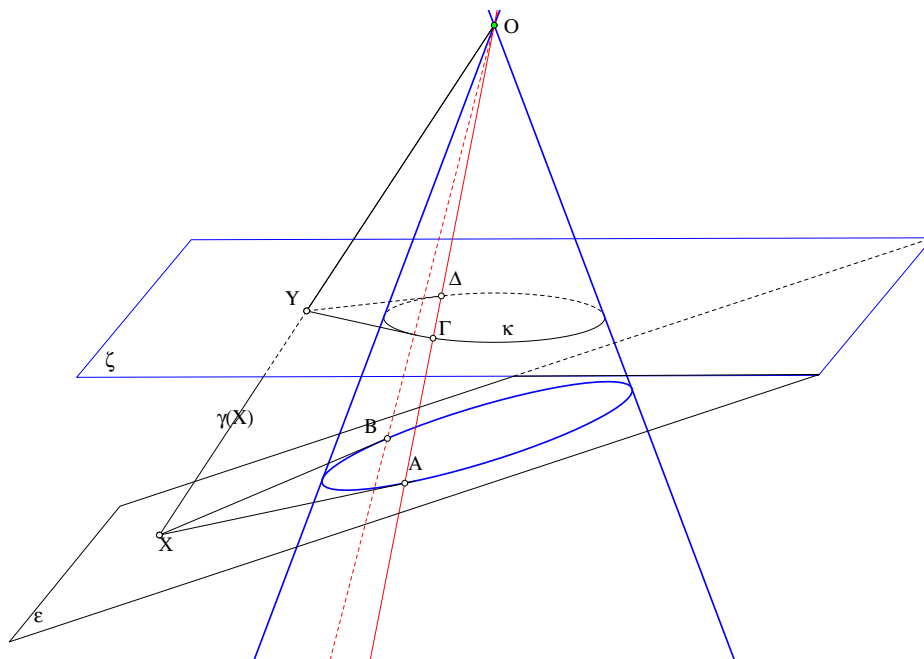


Σχήμα 769: Εφαπτόμενη ως οριακή θέση τέμνουσας

Απόδειξη: Η απόδειξη ανάγεται στην αντίστοιχη ιδιότητα του κύκλου. Κάθε σημείο X της κωνικής, που είναι τομή του επιπέδου ϵ και της κωνικής επιφάνειας K , περιέχεται σε μία ακριβώς γενέτειρα $\gamma(X)$. Δύο σημεία X, Y της κωνικής και οι αντίστοιχες γενέτειρες $\gamma(X), \gamma(Y)$ ορίζουν επίπεδο θ που τέμνει το ϵ κατά την ευθεία XY . Ένα επίπεδο χ κάθετο στον άξονα της κωνικής επιφάνειας την τέμνει κατά κύκλο κ και το θ τέμνει τον κύκλο αυτό στα σημεία X^* και Y^* . Καθώς το Y τείνει στο X , στον κύκλο κ , το Y^* τείνει προς το X^* και η X^*Y^* τείνει προς την εφαπτόμενη ζ^* του κύκλου κ στο σημείο X^* . Το θ τείνει τότε να συμπίσει με το εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας που διέρχεται από το X^* και επομένως η τομή του με το ϵ τείνει να συμπίσει με την τομή του εφαπτομένου επιπέδου κατά μήκος της $\gamma(X)$ με το ϵ , που είναι η εφαπτόμενη ζ στο X , ο.ε.δ.

Τα κοινά σημεία του εσωτερικού της κωνικής επιφάνειας και του επιπέδου ϵ που αποτέμνει την κωνική κ λέγονται **Εσωτερικά σημεία** της κωνικής, τα δε υπόλοιπα **Εξωτερικά σημεία** της κωνικής. Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ορίζεται από δύο σημεία τομής κωνικής κ με ευθεία ϵ λέγεται **Χορδή** της κωνικής.

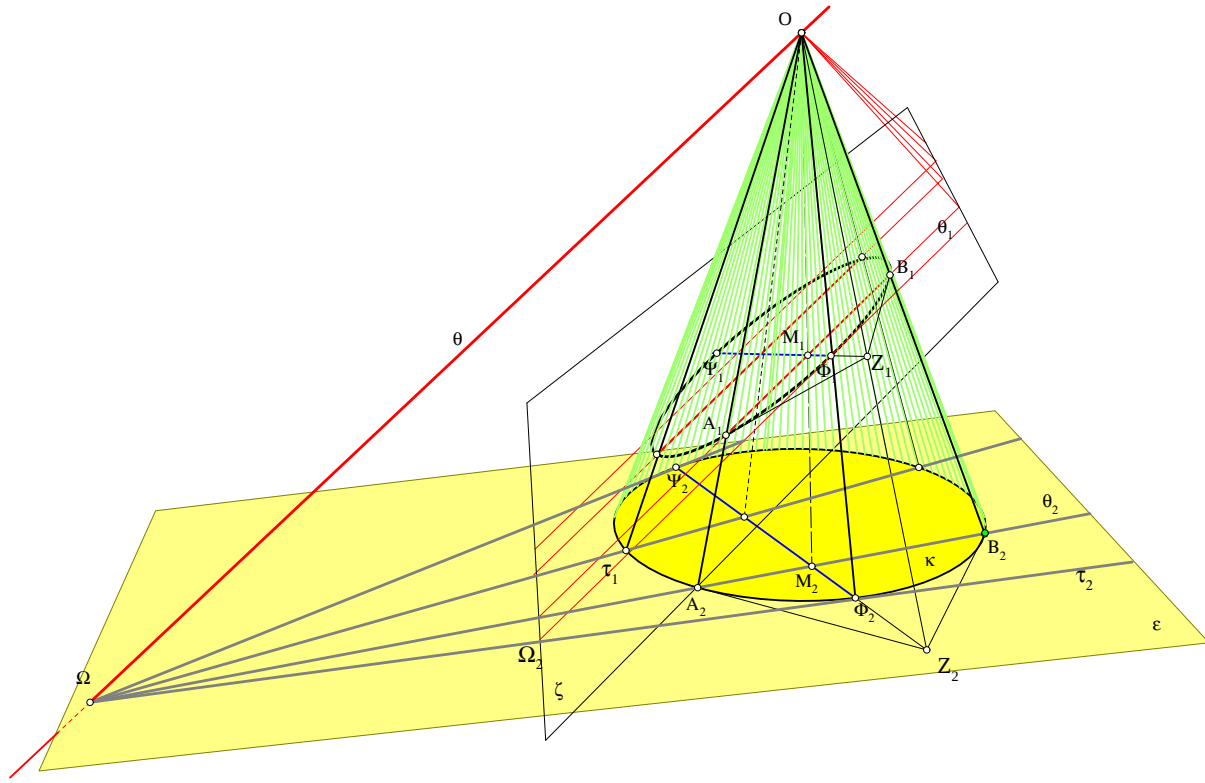
Πρόταση 10.4.2 Από κάθε εξωτερικό σημείο της κωνικής άγονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτήν.



Σχήμα 770: Εφαπτόμενες κωνικής από εξωτερικό σημείο

Απόδειξη: Αν το X είναι εξωτερικό σημείο στο επίπεδο ϵ της κωνικής, τότε η γενέτειρα $\gamma(X)$ ορίζει σε ένα κάθετο επίπεδο ζ ένα αντίστοιχο σημείο Y . Το ζ τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά κύκλο κ και το Y είναι εκτός του κύκλου, συνεπώς άγονται δύο εφαπτόμενες $Y\Gamma$ και $Y\Delta$ προς τον κύκλο. Οι εφαπτόμενες αυτές μαζί με το O ορίζουν δύο επίπεδα που τέμνουν το ϵ κατά δύο ευθείες XA, XB της κωνικής. Επειδή κάθε εφαπτόμενη της κωνικής ορίζει με παρόμοιο τρόπο, αυτές είναι οι μοναδικές εφαπτόμενες από το X , ο.ε.δ.

Πρόταση 10.4.3 Τα μέσα των χορδών κωνικής τομής που είναι παράλληλες προς ευθεία θ περιέχονται σε ευθεία ξ . Εάν η κωνική έχει εφαπτόμενες παράλληλες προς την θ , τότε η ξ διέρχεται και από τα σημεία επαφής αυτών των εφαπτομένων.

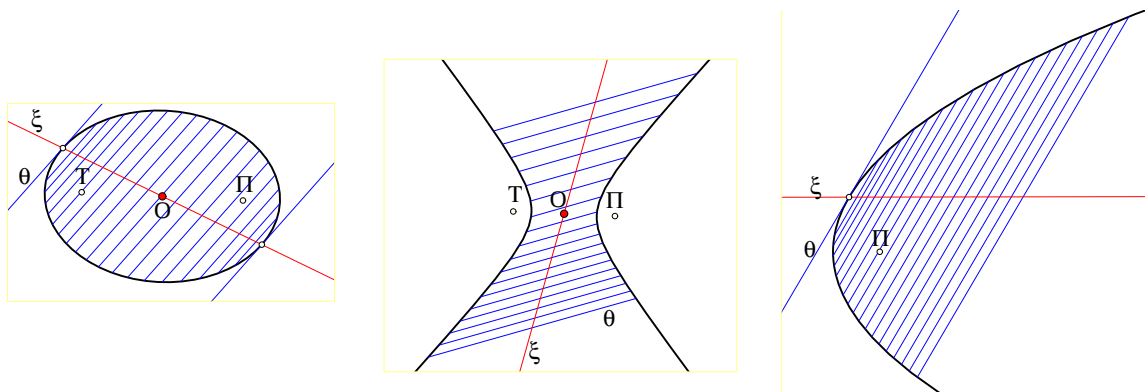


Σχήμα 771: Τα μέσα παραλλήλων χορδών κωνικών

Απόδειξη: Έστω ότι η κωνική προκύπτει ως τομή κωνικής επιφάνειας K με επίπεδο ζ . Παράλληλες χορδές A_1B_1 της κωνικής, ορίζουν, μαζί με την κορυφή O , επίπεδα η_1 . Τα επίπεδα αυτά θα τέμνονται κατά ευθεία θ , διερχόμενη από το O και παράλληλο όλων αυτών των χορδών (Πρόταση 7.1.8). Έστω Ω το σημείο τομής της θ και επιπέδου ε , καθέτου στον άξονα της κωνικής επιφάνειας, που αποτελείται από αυτήν κύκλο κ . Τα επίπεδα η_1 που στο ζ ορίζουν τις παράλληλες χορδές, τέμνουν το επίπεδο ε κατά ευθείες, που συντρέχουν στο σημείο Ω . Κάθε μία τέτοια ευθεία ορίζει και μία αντίστοιχη χορδή του κύκλου κ . Έτσι στις αρχικές χορδές A_1B_1 της κωνικής τομής αντιστοιχούμε χορδές A_2B_2 του κύκλου, οι προεκτάσεις των οποίων είναι ευθείες διερχόμενες διά του Ω . Έστω $\Phi_2\Psi_2$ η πολική του Ω ως προς τον κύκλο κ . Οι ευθείες $\Omega\Phi_2, \Omega\Psi_2$ είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου κ από το Ω και η τομή των επιπέδων τους (με το O) ορίζει τις εφαπτόμενες της κωνικής που είναι παράλληλες προς τις χορδές A_1B_1 . Επίσης, για κάθε ευθεία διά του Ω , που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A_2, B_2 , και την πολική στο M_2 , έχουμε ότι $(A_2B_2M_2\Omega) = -1$, συνεπώς και η δέσμη των ευθειών $OA_2, OB_2, OM_2, O\Omega$ του επιπέδου η_1 , που διέρχεται από αυτά τα σημεία θα είναι αρμονική, άρα θα τέμνει και κάθε άλλη ευθεία του επιπέδου αυτών των ευθειών σε ζεύγη αρμονικών συζυγών σημείων. Όμως η ευθεία θ_1 είναι παράλληλη προς την $\theta = O\Omega$ άρα οι άλλες τρεις θα τέμνουν την θ_1 σε δύο ίσα τμήματα και το M_1 θα είναι το μέσον του A_1B_1 . Όμως τα σημεία M_2 και M_1 περιέχονται στο επίπεδο των τριών σημείων O, Φ_2, Ψ_2 , που τέμνει το επίπεδο ζ κατά την ευθεία $\Phi_1\Psi_1$. Συνεπώς τα μέσα όλων αυτών των χορδών A_1B_1 περιέχονται στην ευθεία $\xi = \Phi_1\Psi_1$. Επιπλέον οι εφαπτόμενες της κωνικής στα Φ_1, Ψ_1 είναι και αυτές

παράλληλες προς τις χορδές A_1B_1 , ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η απόδειξη της τελευταίας πρότασης μπορεί να γίνει με την βοήθεια εξισώσεων σε δύο γραμμές. Ωστόσο το σχήμα 771 έχει ενδιαφέρον από πολλές απόψεις. Η ευθεία θ είναι παράλληλος προς το επίπεδο της κωνικής τομής. Παρόμοια οι ανάλογες της θ ευθείες, που ορίζουν χορδές A_1B_1 της κωνικής παράλληλες προς διάφορες διευθύνσεις, περιέχονται όλες σε ένα επίπεδο ζ' παράλληλο του ζ και διερχόμενο από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας. Το επίπεδο αυτό τέμνει το επίπεδο ϵ του προηγούμενου σχήματος, που περιέχει τον κύκλο κ , κατά ευθεία ν . Ορίζεται συνεπώς ο πόλος N της ν ως προς τον κύκλο κ . Ανάλογα με την κλίση του επιπέδου ζ της κωνικής, ο πόλος N είναι ή εσωτερικό σημείο του κύκλου ή επί του κύκλου ή εξωτερικό σημείο του. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην έλλειψη, η δεύτερη στην παραβολή και η τρίτη στην υπερβολή. Η ευθεία ON αποδεικνύεται εύκολα ότι τέμνει το επίπεδο της κωνικής στο κέντρο της M ή στο άπειρο στην περίπτωση της παραβολής. Οι λεγόμενες **Διάμετροι** της κωνικής, δηλαδή οι χορδές της διά του κέντρου της M , αντιστοιχούν σε παράλληλες των ευθειών θ που διέρχονται διά του M . Έτσι, στην περίπτωση της υπερβολής, στην οποία υπάρχουν δύο γενέτειρες σ και τ της κωνικής επιφάνειας παράλληλες προς το επίπεδο ζ , οι γενέτειρες αυτές θα ορίζουν το επίπεδο ζ' . Τότε η ευθεία ν της τομής των ζ' και ϵ θα τέμνει τον κύκλο κ σε δύο σημεία Γ και Δ και ο πόλος N της ν ως προς κ θα είναι εκτός του κύκλου. Θα άγονται λοιπόν από το N δύο εφαπτόμενες προς τον κ , οι οποίες, μαζί με το O θα ορίζουν δύο επίπεδα διά του O . Τα επίπεδα αυτά θα τέμνουν το ζ κατά δύο ευθείες που δεν συναντούν την κωνική (εφάπτονται της κωνικής στα σημεία που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής Γ και Δ του κύκλου με τις εφαπτόμενες από το N . Στα Γ και Δ όμως αντιστοιχούν τα σημεία της κωνικής στο άπειρο). Αυτές είναι οι λεγόμενες **ασύμπτωτες** της υπερβολής, για τις οποίες θα μιλήσουμε παρακάτω. Παρόμοιοι συσχετισμοί μεταξύ επιπέδων χαρακτηριστικών των κωνικών και χαρακτηριστικών που συνδέονται με τον χώρο και την κωνική επιφάνεια, μέσω της οποίας ορίζεται η κωνική, μπορούν να γίνουν σε πολλές περιπτώσεις. Συνήθως η περιγραφή των χαρακτηριστικών αυτών μέσω εξισώσεων είναι πολύ απλούστερη από την περιγραφή μέσω σχημάτων του χώρου, για τα οποία έχουμε μιά σχετική αδυναμία σχεδιασμού και πρέπει περισσότερο να τα φανταζόμαστε παρά να τα σχεδιάζουμε.

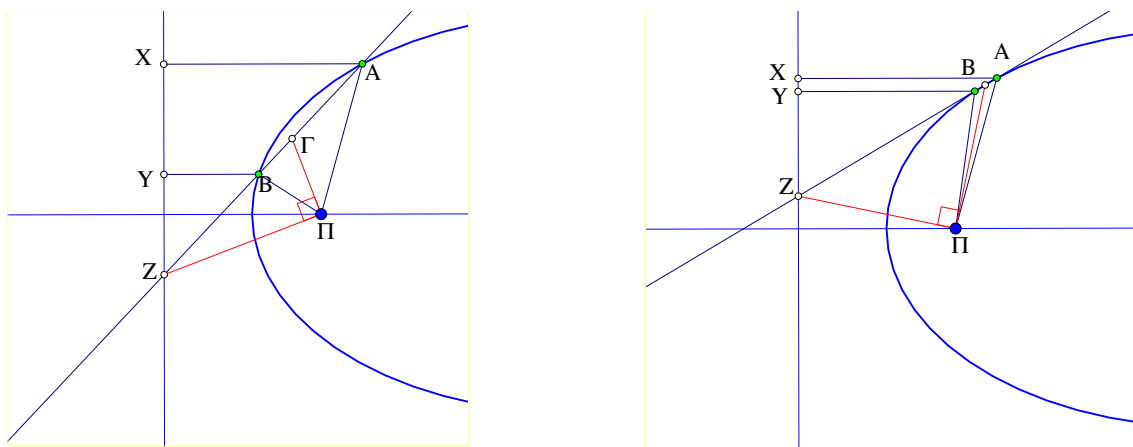


Σχήμα 772: Συζυγείς κατευθύνσεις θ και ξ

Σχόλιο-2 Το σχήμα 772 δίνει την εικόνα στο επίπεδο των χορδών κωνικής που είναι παράλληλες προς ευθεία θ . Τα μέσα τους περιέχονται σε χορδή ξ . Στην έλλειψη, για κάθε ευθεία θ υπάρχουν εφαπτόμενες της παράλληλης της θ και η χορδή ξ διέρχεται από τα ση-

μεία επαφής αυτών των εφαπτομένων. Στην υπερβολή, όπως φαίνεται και από το σχήμα, δεν υπάρχουν πάντοτε εφαπτόμενες προς δοθείσα κατεύθυνση (της θ στο σχήμα). Στην παραβολή, εκτός της κατεύθυνσης του άξονα συμμετρίας της (Πρόταση 10.5.2), για όλες τις άλλες κατευθύνσεις υπάρχει μία ακριβώς εφαπτόμενη παράλληλη προς αυτήν. Το σχήμα δείχνει επίσης, ότι για κωνικές που έχουν κέντρο συμμετρίας, το οποίο λέγεται **Κέντρο της κωνικής** (τέτοιο έχουν μόνο οι ελλείψεις (Πρόταση 10.6.1) και οι υπερβολές (Πρόταση 10.7.1)), οι χορδές ξ που διέρχονται από τα μέσα παραλλήλων χορδών διέρχονται και από το κέντρο της κωνικής. Αποδεικνύεται ότι οι κατευθύνσεις των θ και ξ έχουν πανομοιότυπες ιδιότητες: Εάν οι χορδές οι παράλληλες προς την κατεύθυνση θ έχουν τα μέσα τους σε χορδή παράλληλη προς κατεύθυνση ξ , τότε και οι χορδές οι παράλληλες προς την ξ έχουν τα μέσα τους σε χορδή παράλληλη προς την κατεύθυνση θ . Τέτοια ζευγάρια κατευθύνσεων, όπως τα θ και ξ , λέμε ότι αποτελούν ζεύγη **Συζυγών κατευθύνσεων** της κωνικής. Η παραβολή παρουσιάζει την ιδιομορφία να έχει την ειδική κατεύθυνση του άξονα συμμετρίας της, συζυγή προς κάθε άλλη κατεύθυνση. Στον κύκλο, που είναι ειδική περίπτωση έλλειψης, για κάθε κατεύθυνση θ , η συζυγής της συμπίπτει με την κάθετο προς την θ κατεύθυνση ξ , καθώς τα μέσα παραλλήλων χορδών του κύκλου περιέχονται σε διάμετρο κάθετο προς τις χορδές (Πόρισμα 2.1.3).

Πρόταση 10.4.4 Το τμήμα AZ της εφαπτομένης κωνικής μεταξύ του σημείου επαφής της A και της τομής της Z με την διευθετούσα φαίνεται από την αντίστοιχη εστία υπό ορθή γωνία.



Σχήμα 773: Ιδιότητα τέμνουσας κωνικής

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικά σημεία A, B κωνικής, τις προβολές τους X, Y στην διευθετούσα της εστίας Π και το σημείο τομής Z της AB με την διευθετούσα. Λόγω της βασικής σχέσης

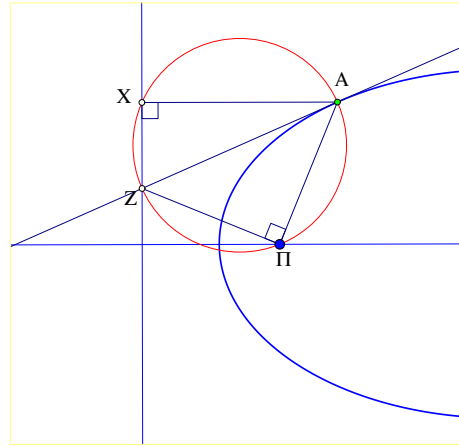
$$\frac{|A\Pi|}{|AX|} = \frac{|B\Pi|}{|BY|} = \kappa,$$

όπου κ η εκκεντρότητα της κωνικής και του ότι τα τρίγωνα ZAX και ZBY είναι όμοια, έπεται ότι

$$\frac{|A\Pi|}{|B\Pi|} = \frac{|ZA|}{|ZB|}.$$

Συνεπώς η ΠZ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας ΑΠΒ . Η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας ΑΠΒ είναι κάθετη στην εξωτερική και περιέχεται μεταξύ των ΠA και ΠB . Επομένως,

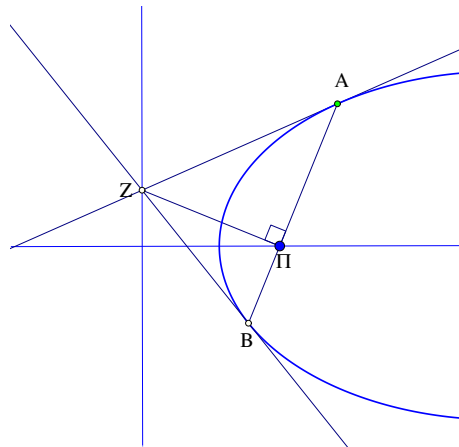
όταν το B τείνει να συμπίψει με το A , το ίδιο θα συμβαίνει και με το ίχνος Γ της εσωτερικής διχοτόμου και στην οριακή θέση, κατά την οποία η AZ γίνεται η εφαπτόμενη στο A (Πρόταση 10.4.1), η γωνία $Z\Pi A$ θα είναι ορθή, ο.ε.δ.



Σχήμα 774: Κύκλος με διάμετρο την AZ

Πόρισμα 10.4.1 Ο κύκλος που διέρχεται από σημείο A κωνικής, την προβολή του X σε διευθετούσα και την αντίστοιχη εστία Π , διέρχεται και από το σημείο τομής Z της εφαπτόμενης στο A και της διευθετούσας.

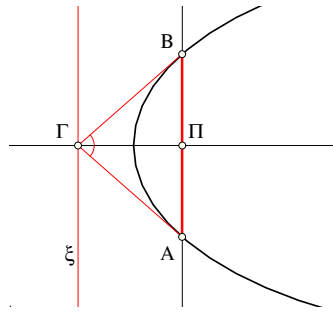
Απόδειξη: Κατά την προηγούμενη πρόταση το τετράπλευρο $AXZ\Pi$ θα είναι εγγράψιμο, ως έχον δύο απέναντι γωνίες ορθές, ο.ε.δ.



Σχήμα 775: Εφαπτόμενες στα άκρα εστιακής χορδής

Πόρισμα 10.4.2 Οι εφαπτόμενες κωνικής στα άκρα χορδής της AB , που διέρχεται από την εστία Π , τέμνονται επί της αντίστοιχης διευθετούσας.

Απόδειξη: Κατά το προηγούμενο πόρισμα, το σημείο τομής της διευθετούσας και της εφαπτόμενης στο A , αλλά και στο B , θα συμπίπτει με το σημείο τομής Z της διευθετούσας και της καθέτου ΠZ της AB στο Π , ο.ε.δ.



Σχήμα 776: Παράμετρος της κωνικής

Άσκηση 10.4.1 Δείξε ότι η χορδή AB που διέρχεται από την εστία Π κωνικής και είναι παράλληλη της αντίστοιχης διευθετούσας ξ , ορίζει μέσω των εφαπτομένων στα άκρα της ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή Γ στην διευθετούσα ξ . Δείξε ότι η γωνία στο Γ είναι ορθή για την παραβολή, οξεία για την έλλειψη και αμβλεία για την υπερβολή.

Το μήκος $|\Pi A|$ στην προηγούμενη άσκηση λέγεται **Ημιπαράμετρος εύρους** της κωνικής (Semi latus rectum της κωνικής). Η απόσταση $p = |\Pi \Gamma|$ λέγεται **Εστιακή παράμετρος** της κωνικής.

10.5 Η Παραβολή

Η παραβολή μπορεί να θεωρηθεί ως η απλούστερη περίπτωση κωνικής τομής. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο (Άσκηση 10.3.1), το σχήμα της προσδιορίζεται πλήρως από έναν θετικό αριθμό δ , που δίδει την απόσταση PM της εστίας της από την διευθετούσα. Η σταθερά δ συμπίπτει με την εστιακή παράμετρο και συχνά αναφέρεται ως **Παράμετρος της παραβολής**.

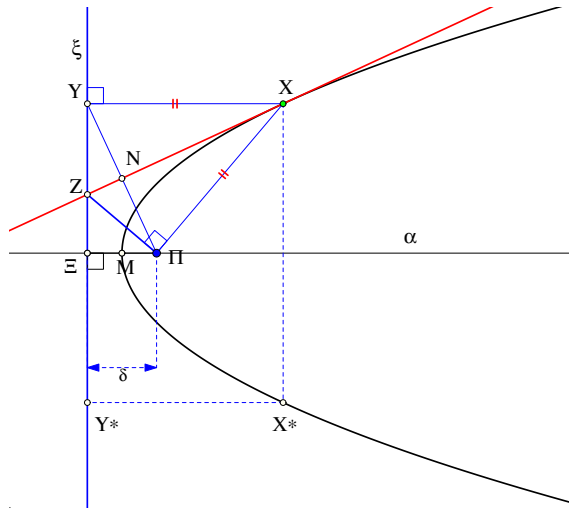
Πρόταση 10.5.1 Δύο παραβολές είναι ίσες τότε και μόνον, όταν έχουν την ίδια παράμετρο.

Απόδειξη: Εδώ η ισότητα πρέπει να νοηθεί ως τοποθέτηση των δύο σχημάτων ώστε να συμπίσουν. Η απόδειξη είναι προφανής και ανάγεται στο ότι ένα σύστημα από μία ευθεία ξ και ένα σημείο Π εκτός αυτής μπορεί να τοποθετηθεί πάνω σε ένα άλλο παρόμοιο, έτσι ώστε τα δύο συστήματα να συμπίσουν, τότε και μόνον, όταν η απόσταση των σημείων από τις αντίστοιχες ευθείες είναι η ίδια, ο.ε.δ.

Στα επόμενα το Π συμβολίζει την εστία και το ξ την διευθετούσα της παραβολής. Επίσης θεωρούμε και τον **Άξονα της παραβολής** που είναι η ευθεία α η διερχόμενη διά του Π και κάθετη στην διευθετούσα ξ . Μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα λέγεται **Διάμετρος της παραβολής**.

Πρόταση 10.5.2 Έστω Π η εστία και ξ η διευθετούσα μίας παραβολής.

- (1) Η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονά της.
- (2) Γιά κάθε σημείο X της παραβολής και την προβολή του Y επί της διευθετούσας, το X ευρίσκεται στην μεσοκάθετο XN του τμήματος PY .
- (3) Η XN είναι εφαπτόμενη της παραβολής στο X .



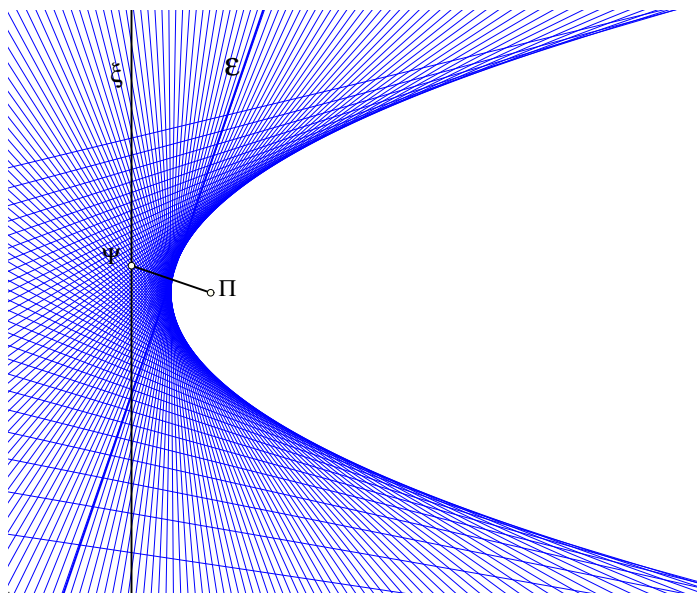
Σχήμα 777: Παραβολής πρώτες ιδιότητες

Απόδειξη: Το (1) προκύπτει αμέσως από τον ορισμό της παραβολής. Αν X είναι σημείο της παραβολής και X^* το συμμετρικό του ως προς τον άξονά της α θα ικανοποιεί τον ορισμό της ίδιας παραβολής.

Το (2) προκύπτει αμέσως από το ότι, εξ ορισμού, το τρίγωνο PXY είναι ισοσκελές.

Το (3): Λόγω του ότι η XN είναι μεσοκάθετος της PY , τα τρίγωνα ZPX και ZYX είναι ίσα, άρα η γωνία ZPX είναι ορθή και συνεπώς η ZX θα συμπίπτει με την εφαπτόμενη από το X (Πρόταση 10.4.4), ο.ε.δ.

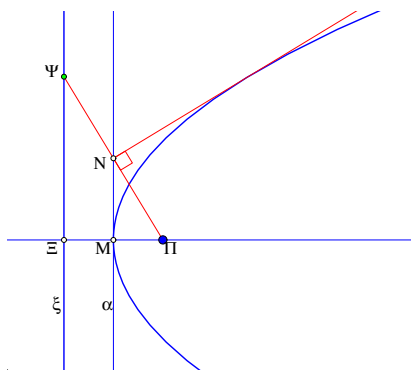
Μία συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι το ότι η παραβολή είναι, ως λέγεται, η **Περιβάλλουσα** των μεσοκαθέτων ευθειών ε των τμημάτων $\Pi\Psi$, όπου το Π είναι σταθερό και το Ψ κινείται επί ευθείας ξ . Τούτο σημαίνει ότι, όλες αυτές οι ευθείες, που παράγονται για τις διάφορες θέσεις του Ψ , είναι εφαπτόμενες της παραβολής που έχει εστία το Π και διευθετούσα την ξ . Το μέσον M της καθέτου $\Pi\Xi$, από την εστία Π στην διευθετούσα ξ



Σχήμα 778: Παραβολή ως περιβάλλουσα

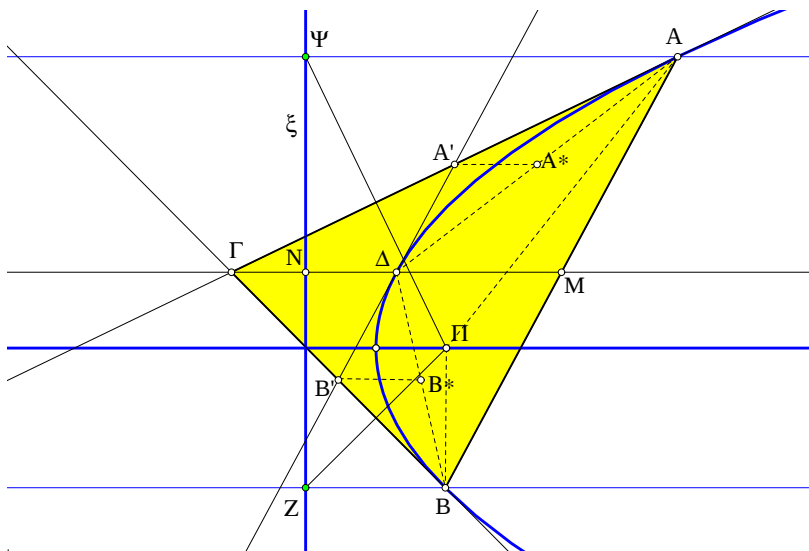
παραβολής, είναι σημείο της παραβολής και λέγεται **Κορυφή της παραβολής**.

Άσκηση 10.5.1 Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων N των τμημάτων $\Pi\Psi$, από την εστία προς σημείο Ψ της διευθετούσας είναι η εφαπτόμενη της παραβολής στην κορυφή της M .



Σχήμα 779: Παραβολή περιβάλλουσα πλευράς ορθής γωνίας

Άσκηση 10.5.2 Ορθή γωνία ΠNX μεταβάλλεται έτσι ώστε η κορυφή της N να κινείται επί ευθείας a και η μία πλευρά της να διέρχεται από σταθερό σημείο Π . Δείξε ότι η άλλη πλευρά της NX παραμένει εφαπτόμενη παραβολής με εστία στο Π και εφαπτόμενη στην κορυφή της παραβολής την ευθεία a .



Σχήμα 780: Αρχιμήδειο τρίγωνο

Αρχιμήδειο τρίγωνο της παραβολής λέγεται ένα τρίγωνο του οποίου δύο πλευρές είναι εφαπτόμενες της παραβολής και η τρίτη πλευρά είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία επαφής αυτών των δύο εφαπτομένων. Ο Αρχιμήδης, με μία διαδικασία πρότυπο αθροίσματος άπειρης σειράς προσδιόρισε το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής που περιέχεται μέσα σε ένα τέτοιο τρίγωνο. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε αυτό το εμβαδόν με μία διαφορετική μέθοδο ([Doe65, σ. 239]), που δίνει την αφορμή να γνωρίσουμε μερικές θεμελιώδεις ιδιότητες της παραβολής.

Πρόταση 10.5.3 Γιά κάθε Αρχιμήδειο τρίγωνο $AB\Gamma$ με σημεία επαφής στα A και B η διάμεσος ΓM είναι παράλληλη του άξονα της παραβολής και τέμνει την παραβολή στο μέσον Δ της ΓM , στο οποίο η εφαπτόμενη της παραβολής είναι παράλληλη της βάσης $B\Gamma$.

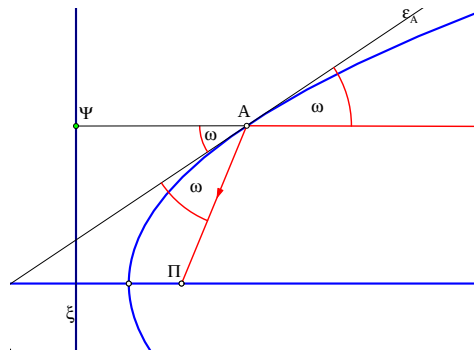
Απόδειξη: Φέρε από τα A και B τις καθέτους $A\Psi$ και BZ στην διευθετούσα ξ . Από τον ορισμό της παραβολής, τα τρίγωνα ΠBZ και $\Pi A\Psi$ είναι ισοσκελή και οι $A\Gamma$ και $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενες (Πρόταση 10.5.2) και ταυτόχρονα μεσοκάθετες των $\Pi\Psi$ και ΠZ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο $\Pi Z\Psi$ λοιπόν, οι μεσοκάθετες $A\Gamma$ και $B\Gamma$ των $\Pi\Psi$ και ΠZ συναντώνται στο Γ . Άρα και η μεσοκάθετος ΓN της τρίτης πλευράς $Z\Psi$ θα διέρχεται από το Γ και θα είναι παράλληλος του άξονα. Στο τραπέζιο $A\Psi ZB$ η ΓN είναι παράλληλος προς τις παράλληλες πλευρές του και διέρχεται από το μέσον N της μίας πλευράς του, άρα θα διέρχεται και από το μέσον M της άλλης πλευράς του. Αυτό δείχνει τον πρώτο ισχυρισμό της πρότασης. Γιά τον δεύτερο, θεωρήσε την εφαπτόμενη στο σημείο τομής Δ της διαμέσου ΓM και της παραβολής. Έστω ότι η εφαπτόμενη αυτή τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα σημεία A' και B' αντίστοιχα. Τότε σχηματίζονται πάλι δύο Αρχιμήδεια τρίγωνα: το $\Delta A'A$ και το $\Delta B'B$, των οποίων οι διάμεσοι $A'A^*$ και $B'B^*$ θα είναι παράλληλοι του άξονος της παραβολής. Συνάγεται ότι και τα A' και B' είναι τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.5.1 (Τετραγωνισμός παραβολής του Αρχιμήδη) Το τμήμα της παραβολής που περιέχεται σε ένα Αρχιμήδειο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν τα $2/3$ του εμβαδού $\epsilon(AB\Gamma)$ του τριγώνου.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης. Πράγματι, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι μέσα στο χωρίο της παραβολής και το $A'B'\Gamma$ είναι έξω και έχει εμβαδόν $\epsilon(A'B'\Gamma) = \epsilon(AB\Delta)/2$. Μπορώ να θεωρήσω ότι πετώ το τρίγωνο $A'B'\Gamma$ και κρατώ το $AB\Delta$. Κατόπιν επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία με τα νέα Αρχιμήδεια τρίγωνα $A\Delta A'$ και $BB'\Delta$ πετώντας πάλι το μισό εμβαδόν αυτού που κρατώ. Τα τρίγωνα που πετώ είναι αυτά που δεν συνεισφέρουν στο εμβαδόν του χωρίου. Τα τρίγωνα που κρατώ είναι αυτά που συνεισφέρουν και συνεχίζω επ' άπειρον με ολοένα μικρότερα τρίγωνα πετώντας ένα μέρος τους $\epsilon(\pi)$ και κρατώντας ένα άλλο $\epsilon(\kappa)$, πάντοτε όμως στην αναλογία $\epsilon(\pi) = \epsilon(\kappa)/2$. Στο όριο της άπειρης διαδικασίας θα έχω εξαντλήσει όλο το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου πετώντας το $\epsilon(\Pi) = \epsilon(K)/2$ του μέρους που κρατώ. Το εμβαδόν $\epsilon(K)$ που θα έχει απομείνει θα είναι ακριβώς το εμβαδόν του χωρίου της παραβολής που με ενδιαφέρει. Επειδή $\epsilon(\Pi) + \epsilon(K) = \epsilon(AB\Gamma)$, έπεται ότι $\frac{1}{2}\epsilon(K) + \epsilon(K) = \epsilon(AB\Gamma)$, ο.ε.δ.

Άσκηση 10.5.3 Δείξε ότι τα μέσα M παραλλήλων χορδών AB παραβολής περιέχονται σε ευθεία ϵ παράλληλη του άξονος και ότι η ϵ τέμνει την παραβολή σε σημείο Δ , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλος προς αυτές τις χορδές.

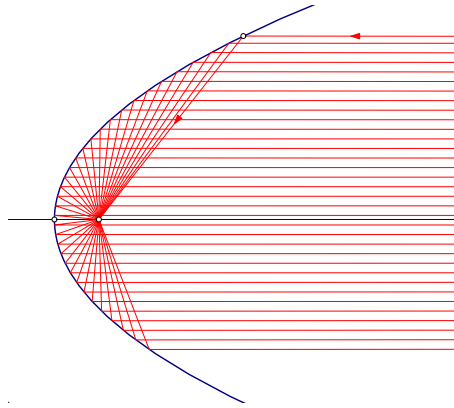
Υπόδειξη: Άμεση συνέπεια της Πρότασης 10.5.3, κατά την οποία το μέσον M της χορδής είναι στην διάμεσο ΓM του Αρχιμήδειου τριγώνου που ορίζεται από την χορδή, η δε διάμεσος αυτή είναι παράλληλος του άξονος και διέρχεται από το σημείο Δ στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλος της χορδής. Επομένως όλες οι χορδές θα έχουν το μέσον τους επί της παραλλήλου του άξονος που διέρχεται από το σημείο Δ , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη της χορδής. Τώρα ότι υπάρχει ένα τέτοιο Δ , δηλαδή ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτόμενη έχει μία δεδομένη κατεύθυνση, έπεται από το ότι, εξ ορισμού, η παραβολή έχει όλα τα σημεία της από την ίδια μεριά κάθε εφαπτομένης της.



Σχήμα 781: Παραβολικό κάτοπτρο

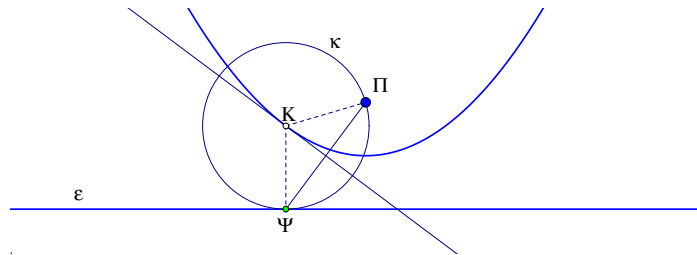
Άσκηση 10.5.4 Δείξε ότι μία ακτίνα προσπίπτουσα σε παραβολή παράλληλα προς τον άξονά της, ανακλώμενη, διέρχεται από την εστία της.

Υπόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού, κατά τον οποίο το ίχνος Ψ της ακτίνας επί της διευθετούσης και το τμήμα $A\Pi$ στο σημείο ανάκλασης A σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο $A\Pi\Psi$, του οποίου η διχοτόμος στο A συμπίπτει με την εφαπτόμενη ϵ_A στο A .



Σχήμα 782: Παραβολικό κάτοπτρο II

Άσκηση 10.5.5 Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων κύκλων, εφαπτομένων δοθείσης ευθείας ε και διερχομένων από δοθέν σημείο Π εκτός της ε , είναι η παραβολή με εστία στο Π και διευθετούσα την ευθεία ε .

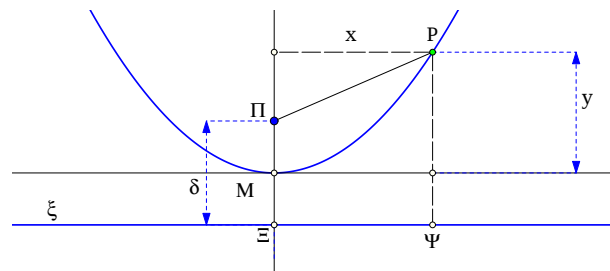


Σχήμα 783: Παραβολή ως τόπος κέντρων κύκλων

Άσκηση 10.5.6 Δείξε ότι οι αποστάσεις x, y ενός σημείου P της υπερβολής, από τον άξονά της και την εφαπτόμενη στην κορυφή της αντίστοιχα, ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 = 2\delta \cdot y,$$

όπου δ η παράμετρος της παραβολής.



Σχήμα 784: Παραβολή μέσω εξίσωσης

Υπόδειξη: $|P\Pi| = |P\Psi| \Leftrightarrow (y + \frac{\delta}{2})^2 = x^2 + (y - \frac{\delta}{2})^2$.

10.6 Η έλλειψη

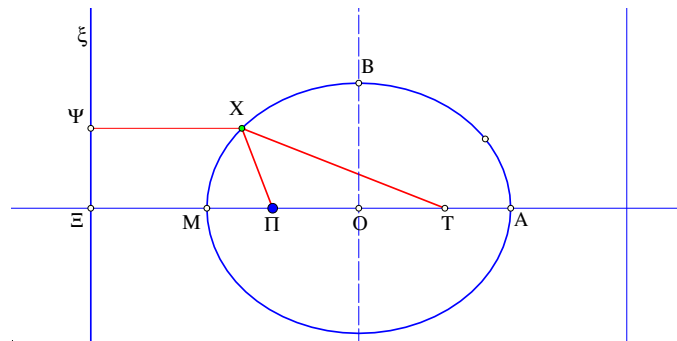
Το σχήμα της έλλειψης καθορίζεται πλήρως από δύο αριθμούς: την **Εστιακή απόσταση** που ορίζεται ως η απόσταση των δύο εστιών Π και T της έλλειψης και την σταθερά $\lambda > |\Pi T|$ που δίδει το άθροισμα των αποστάσεων του τυχόντος σημείου X της έλλειψης από τις εστίες

$$|XT| + |X\Pi| = \lambda.$$

Δύο άλλοι αριθμοί που καθορίζουν επίσης πλήρως το σχήμα της έλλειψης είναι: η απόσταση $p = |\Pi \Xi|$ μίας εστίας της Π από την αντίστοιχη διευθετούσα ξ (η **εστιακή παράμετρος της έλλειψης**) και η εκκεντρότητα $\kappa < 1$ για την οποία ισχύει

$$\frac{|X\Pi|}{|X\Psi|} = \kappa,$$

όπου Ψ είναι η προβολή στην διευθετούσα του τυχόντος σημείου X της έλλειψης.



Σχήμα 785: Δύο τρόποι ορισμού έλλειψης

Πρόταση 10.6.1 Η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς την ευθεία ΠT που ορίζεται από τις εστίες της και επίσης συμμετρική ως προς την μεσοκάθετο του ΠT . Το μέσον O του ΠT είναι κέντρο συμμετρίας της έλλειψης.

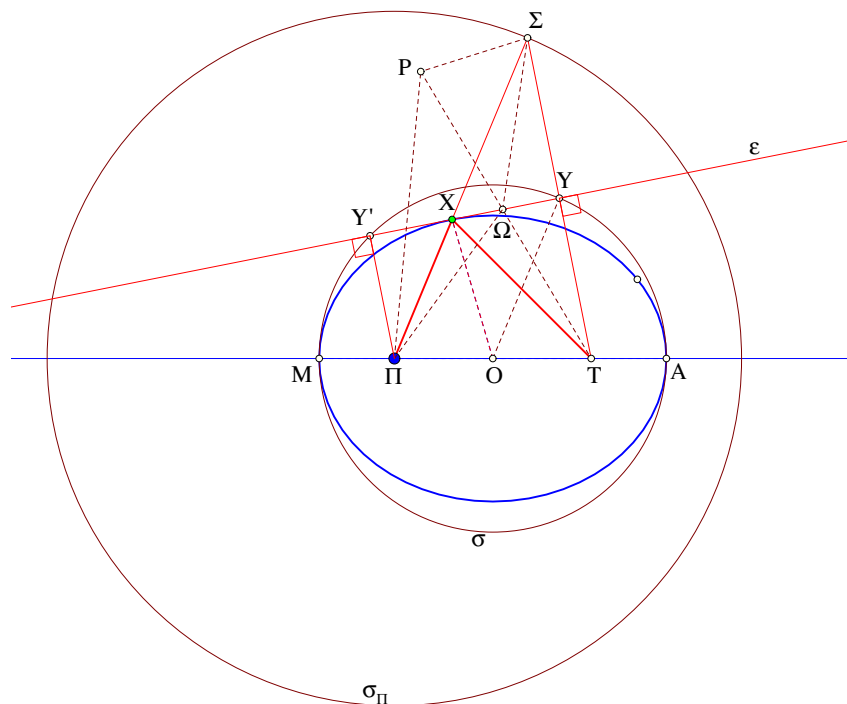
Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού (Παράγραφος 10.1) της έλλειψης. Άν το σημείο X έχει αποστάσεις από τις εστίες που ικανοποιούν την $|X\Pi| + |XT| = \lambda$, εύκολα βλέπουμε ότι και τα συμμετρικά του X ως προς τις δύο ευθείες που αναφέρονται, καθώς και το σημείο O θα ικανοποιούν την ίδια ισότητα, άρα θα είναι σημεία της έλλειψης, ο.ε.δ.

Η ευθεία ΠT και η μεσοκάθετος του ΠT λέγονται **Άξονες συμμετρίας** της έλλειψης. Τα μήκη των δύο ευθυγράμμων τμημάτων OA και OB (αλλά συχνά και τα ίδια τα ευθύγραμμα τμήματα ή/και ολόκληρες οι ευθείες OA και OB) που αποτεμνει η έλλειψη στους άξονες ονομάζονται αντίστοιχα **Μεγάλος άξονας** και **Μικρός άξονας** της έλλειψης. Το σημείο τομής τους O λέγεται **Κέντρο της έλλειψης**. Οι χορδές της έλλειψης που διέρχονται από το κέντρο της ονομάζονται **Διάμετροι της έλλειψης**.

Πρόταση 10.6.2 Οι διευθετούσες είναι κάθετες στην ευθεία των εστιών ΠT και συμμετρικά κείμενες ως προς το κέντρο της έλλειψης. Το σημείο τομής Ξ της διευθετούσας και η αντίστοιχη εστία Π είναι σημεία αρμονικά συζυγή των A και M στα οποία η έλλειψη τέμνει τον άξονα ΠT .

Βοηθητικός ή και **Μείζων κύκλος** της έλλειψης λέγεται ο κύκλος με κέντρο το κέντρο O της έλλειψης και ακτίνα τον μεγάλο άξονα a . Οι κύκλοι με κέντρα τις εστίες της έλλειψης και ακτίνα $2a$ ονομάζονται **Διευθετούντες κύκλοι** της έλλειψης.

- Πρόταση 10.6.4** (1) Έστω Σ τυχόν σημείο του διευθετούντος κύκλου σ_{Π} της έλλειψης με κέντρο στην εστία Π και δεύτερη εστία στο T . Η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΣT τέμνει την $\Sigma\Pi$ σε σημείο X της έλλειψης.
 (2) Η ε είναι εφαπτόμενη της έλλειψης και το X είναι το σημείο επαφής της ε .
 (3) Η έλλειψη περιέχεται ολόκληρη στην μεριά της εφαπτομένης της που περιέχει και τις εστίες της έλλειψης.
 (4) Η έλλειψη περιέχεται ολόκληρη στο εσωτερικό του βοηθητικού κύκλου της σ .
 (5) Η εφαπτόμενη ε στο X διχοτομεί την παραπληρωματική της γωνίας ΠXT .
 (6) Οι προβολές Y και Y' των εστιών στην εφαπτόμενη ε περιέχονται στον βοηθητικό κύκλο της έλλειψης.
 (7) Το γινόμενο $|TY||\Pi Y'|$ είναι σταθερό και ίσο με b^2 .



Σχήμα 787: Βοηθητικός και διευθετών κύκλος έλλειψης

Απόδειξη: Το (1) είναι συνέπεια του ορισμού αφού $|\Pi X| + |XT| = |\Pi X| + |X\Sigma| = 2a$.

Γιά το (2) ας θεωρήσουμε σημείο Ω της ε , διαφορετικό του X . Λόγω της μεσοκαθέτου

$$|\Omega\Pi| + |\Omega T| = |\Pi\Omega| + |\Omega\Sigma| > |\Pi\Sigma| = 2a.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι η τριγωνική για το τρίγωνο $\Pi\Sigma\Omega$. Η ανισότητα δείχνει ότι το Ω δεν ανήκει στην έλλειψη, άρα το X είναι το μοναδικό σημείο της ε κοινό με την έλλειψη.

Γιά το (3) ας θεωρήσουμε τυχόν σημείο P από την άλλη μεριά της ε αυτής που περιέχει τις εστίες. Έστω Ω το σημείο τομής της PT με την ε . Ισχύει

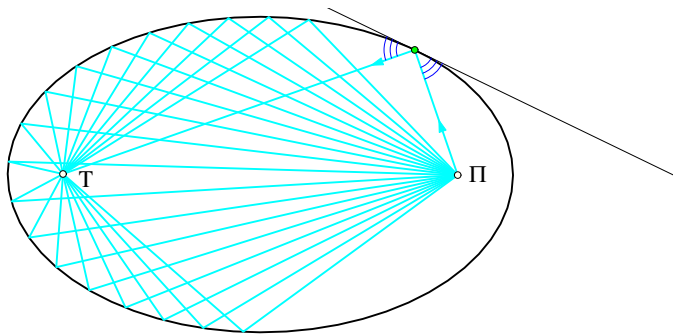
$$|P\Pi| + |PT| = |P\Pi| + |P\Omega| + |\Omega T| = |P\Pi| + |P\Omega| + |\Omega\Sigma| > |P\Pi| + |P\Sigma| > |\Pi\Sigma| = 2a.$$

Άρα το P δεν ανήκει στην έλλειψη. Οι δύο τελευταίες ανισότητες είναι οι τριγωνικές για τα τρίγωνα $P\Sigma\Omega$ και $\Pi P\Sigma$.

Το (4) οφείλεται στο ότι η OX είναι διάμεσος του τριγώνου PXT και συνεπώς $|OX| < \frac{1}{2}(|XP| + |XT|) = a$ (Άσκηση 1.14.3).

Το (5) οφείλεται στο ότι το τρίγωνο $TX\Sigma$ είναι ισοσκελές, άρα η μεσοκάθετος ε της ΣT διχοτομεί την γωνία στην κορυφή του.

Το (6), για το σημείο Y οφείλεται στο ότι η OY συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\Sigma\Pi T$, άρα $|OY| = \frac{|\Pi\Sigma|}{2} = a$. Ανάλογα αποδεικνύεται η ιδιότητα και για την προβολή Y' του Π πάνω στην ε . Το (7) προκύπτει προεκτείνοντας την TY έως ότου τμήσει τον κύκλο σ σε σημείο Y^* . Λόγω της συμμετρίας της έλλειψης ως προς O , οι TY^* και PY' είναι ίσες και το γινόμενο $|TY||PY'| = |TY||TY^*|$ είναι ίσο (εκτός προσήμου) με την δύναμη της εστίας T ως προς τον μέζονα κύκλο σ , ο.ε.δ.



Σχήμα 788: Ανακλαστική ιδιότητα εστιών έλλειψης

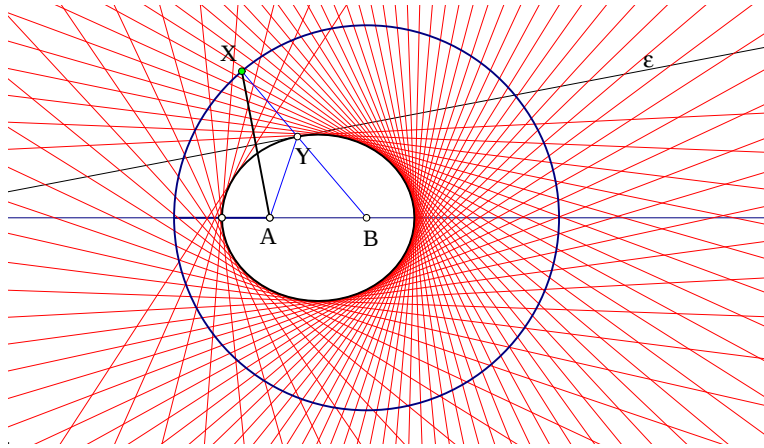
Σχόλιο Από την ιδιότητα (5) προκύπτει ότι οι ακτίνες φωτός, που εκπέμπονται από μία εστία της έλλειψης, προσπίπτουσες στην έλλειψη και ανακλώμενες στα σημεία της, έτσι ώστε προσπίπτουσα και ανακλώμενη ακτίνα να σχηματίζουν την ίδια γωνία με την εφαπτόμενη, διέρχονται από την άλλη εστία.

Άσκηση 10.6.1 Δείξε ότι η μεσοκάθετος ενός τμήματος AX , με A σταθερό και X μεταβαλλόμενο επί κύκλου $\kappa(B, \rho)$, είναι εφαπτόμενη έλλειψης με εστίες στο A και στο κέντρο του κύκλου B και μεγάλο άξονα την ακτίνα ρ του κύκλου.

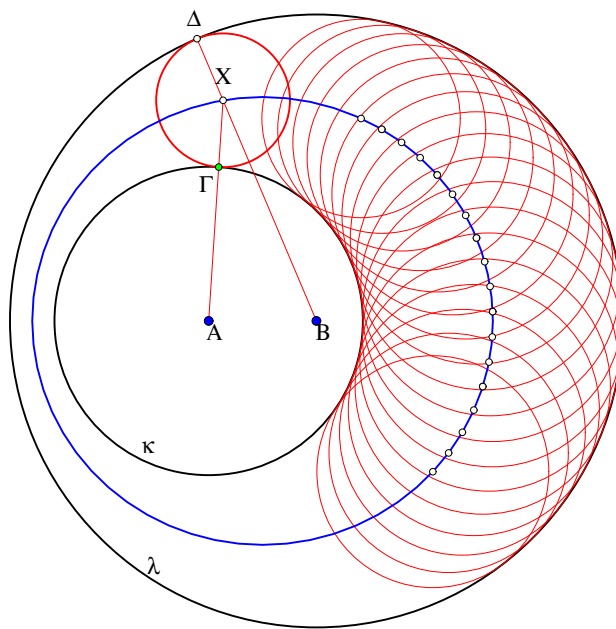
Υπόδειξη: Θεώρησε την τομή Y της μεσοκαθέτου με την BX . Το άθροισμα $|XA| + |XB|$ είναι σταθερά ίσο με ακτίνα ρ του κύκλου κ .

Άσκηση 10.6.2 Δίδονται δύο μη συγκεντρικοί κύκλοι $\kappa(A, \rho)$ και $\lambda(B, \rho')$, εκ των οποίων ο πρώτος περιέχεται ολόκληρος εντός του δεύτερου. Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων X κύκλων που εφάπτονται ταυτόχρονα των κ και λ είναι έλλειψη με εστίες τα A και B και μεγάλο άξονα το ημιάθροισμα των ακτίνων των δύο κύκλων.

Υπόδειξη: Το σημείο επαφής Γ ενός κύκλου που εφάπτεται του κ είναι επί της διακέντρου AG . Το ίδιο συμβαίνει και με το σημείο επαφής Δ του κύκλου με τον άλλο κύκλο λ . Τότε



Σχήμα 789: Περιβάλλουσα των μεσοκαθέτων των τμημάτων AX



Σχήμα 790: Έλλειψη ως τόπος κέντρων κύκλων εφαπτομένων δύο άλλων

το μήκος

$$|XA| + |XB| = |A\Gamma| + |\Gamma X| + |XB| = |A\Gamma| + |XB| + |X\Delta| = \rho + \rho'.$$

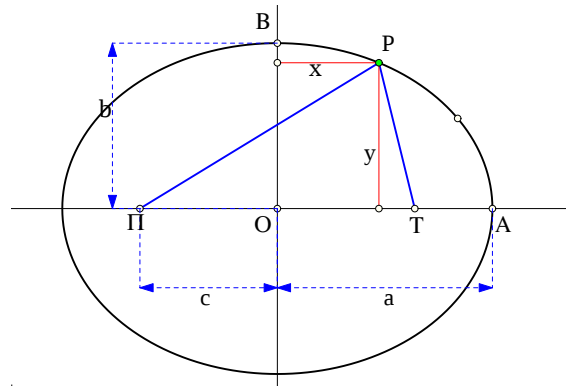
Άσκηση 10.6.3 Δείξε ότι αν x, y είναι οι αποστάσεις σημείου P έλλειψης από τον μικρό και μεγάλο άξονα αντίστοιχα, τότε ισχύει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

όπου a, b αντίστοιχα ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της έλλειψης.

Υπόδειξη: Η εξίσωση $|PP| + |PT| = 2a$ εκφράζεται συναρτήσει των x και y με την

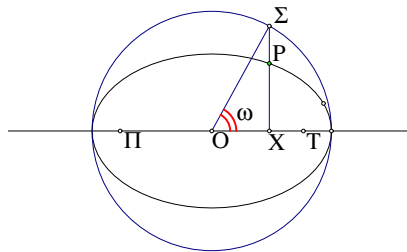
$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$



Σχήμα 791: Έλλειψη μέσω εξίσωσης

Υψώνοντας τα δύο μέλη στο τετράγωνο, απομονώνοντας την ρίζα και ξαναυψώνοντας ώστε αυτή να εξαλειφθεί, οδηγούμεθα στον αναφερόμενο τύπο, λαμβανομένου υπόψη και του $a^2 = b^2 + c^2$.

Άσκηση 10.6.4 Δείξε ότι η ημιπαράμετρος εύρους της έλλειψης είναι $\frac{b^2}{a} = \kappa \cdot p$, όπου κ η εκκεντρότητα της έλλειψης και p η εστιακή παράμετρος αυτής.



Σχήμα 792: Εκκεντρική γωνία

Εκκεντρική γωνία στο σημείο P έλλειψης ονομάζεται η γωνία $\omega = |\angle XO\Sigma|$ που σχηματίζεται από τον μεγάλο άξονα και την ακτίνα OΣ του βοηθητικού κύκλου στο σημείο Σ, στο οποίο η κάθετη από το P στον μεγάλο άξονα τέμνει την έλλειψη.

Άσκηση 10.6.5 Έστω P σημείο της έλλειψης ε και X η προβολή του P στον μεγάλο άξονα. Έστω επίσης Σ το σημείο τομής της XP με την έλλειψη και από την ίδια μεριά με το P ως προς τον μεγάλο άξονα. Δείξε ότι:

$$(1) \frac{|PX|}{|\Sigma X|} = \frac{b}{a},$$

$$(2) y = |PX| = b \eta \mu(\omega), \text{ όπου } \omega \text{ η εκκεντρική γωνία του } P.$$

10.7 Η υπερβολή

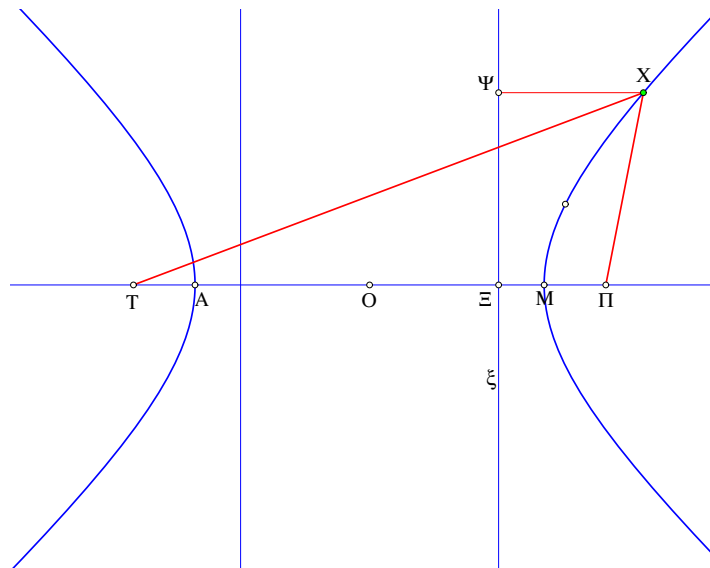
Το σχήμα της υπερβολής, όπως και αυτό της έλλειψης, καθορίζεται πλήρως από δύο αριθμούς: την **Εστιακή απόσταση** που ορίζεται ως η απόσταση των δύο εστιών Π και T της υπερβολής και την σταθερά $\lambda < |PT| = 2\delta$ που δίδει την διαφορά των αποστάσεων του τυχόντος σημείου X της υπερβολής από τις εστίες

$$||XT| - |X\Pi|| = \lambda.$$

Δύο άλλοι αριθμοί που καθορίζουν επίσης πλήρως το σχήμα της υπερβολής είναι: η απόσταση $p = |\Pi\Xi|$ μίας εστίας της Π από την αντίστοιχη διευθετούσα ξ (η **εστιακή παράμετρος** της υπερβολής) και η εκκεντρότητα $\kappa > 1$ για την οποία ισχύει

$$\frac{|X\Pi|}{|X\Psi|} = \kappa,$$

όπου Ψ είναι η προβολή στην διευθετούσα του τυχόντος σημείου X της υπερβολής.



Σχήμα 793: Δύο τρόποι ορισμού υπερβολής

Πρόταση 10.7.1 Η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς την ευθεία PT που ορίζεται από τις εστίες της και επίσης συμμετρική ως προς την μεσοκάθετο του PT . Το μέσον O του PT είναι κέντρο συμμετρίας της υπερβολής.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού (Παράγραφος 10.1) της υπερβολής. Άν το σημείο X έχει αποστάσεις από τις εστίες που ικανοποιούν την $||X\Pi| - |XT|| = \lambda$, εύκολα βλέπουμε ότι και τα συμμετρικά του X ως προς τις δύο ευθείες που αναφέρονται, καθώς και το σημείο O θα ικανοποιούν την ίδια ισότητα, άρα θα είναι σημεία της υπερβολής, ο.ε.δ.

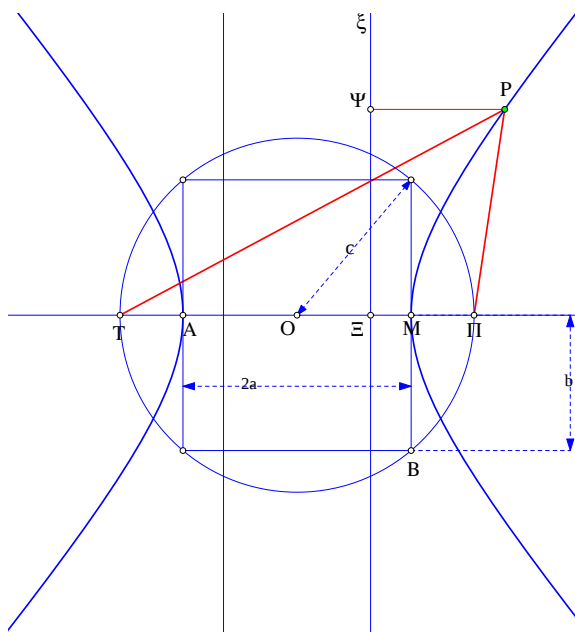
Η ευθεία PT που ενώνει τις δύο εστίες και η μεσοκάθετος του PT λέγονται **Άξονες συμμετρίας** της υπερβολής. Το σημείο τομής τους O λέγεται **Κέντρο της υπερβολής**. Οι χορδές της υπερβολής που διέρχονται από το κέντρο της ονομάζονται **Διάμετροι της υπερβολής**.

Πρόταση 10.7.2 Οι διευθετούσες είναι κάθετες στην ευθεία των εστιών $ΠΤ$ και συμμετρικά κείμενες ως προς το κέντρο της υπερβολής. Το σημείο τομής $Ξ$ της διευθετούσας και η αντίστοιχη εστία $Π$ είναι σημεία αρμονικά συζυγή των A και M , στα οποία η υπερβολή τέμνει τον άξονα $ΠΤ$.

Απόδειξη: Η κάθετότητα προκύπτει από την συμμετρία ως προς τον άξονα $ΟΑ$. Αν το X ανήκει στην υπερβολή, τότε και το συμμετρικό του X' , ως προς αυτόν τον άξονα, θα ανήκει στην υπερβολή. Επειδή τα $XΠ$ και $X'Π$ έχουν το ίδιο μήκος και τα $XΨ$ και $X'Ψ'$ θα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία και θα έχουν το ίδιο μήκος, άρα το $XΨΨ'X'$ θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, αφού τα M και A θα ικανοποιούν

$$\frac{|MΠ|}{|MΞ|} = \frac{|AΠ|}{|AΞ|} = \kappa,$$

άρα τα A και M θα είναι αρμονικά συζυγή ως προς $Ξ$ και $Π$. Συνεπώς (Άσκηση 1.17.2) και τα $Ξ, Π$ θα είναι αρμονικά συζυγή των A και M , ο.ε.δ.



Σχήμα 794: Βασικές σχέσεις στην υπερβολή

Το επόμενο τυπολογίο συσχετίζει τα διάφορα μήκη τμημάτων που χαρακτηρίζουν την υπερβολή. Συχνά χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί

$$a = |OA|, \quad b = |MB|, \quad c = |OΠ| = \frac{|ΠΤ|}{2}.$$

Πρόταση 10.7.3

$$a = |OA| = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2a = |AM|, \quad (10.7)$$

$$c = \frac{|\Pi T|}{2}, \quad b = |MB| \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2, \quad (10.8)$$

$$|M\Pi| = c - a, \quad |A\Pi| = c + a \Rightarrow |M\Xi| = \frac{c - a}{\kappa}, \quad |A\Xi| = \frac{c + a}{\kappa}, \quad (10.9)$$

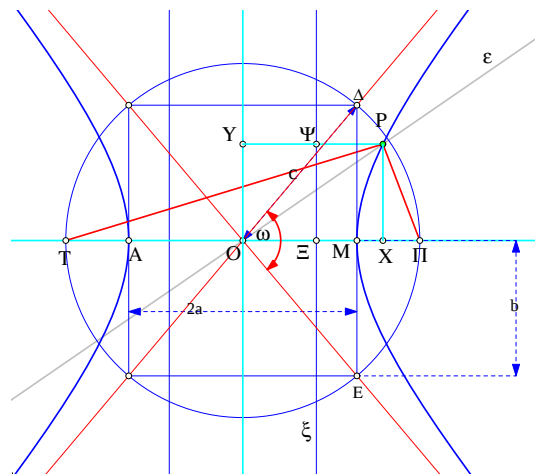
$$|\Pi\Xi| = |\Pi M| + |M\Xi| = (c - a) + \frac{c - a}{\kappa} = \frac{1 + \kappa}{\kappa}(c - a), \quad (10.10)$$

$$\kappa = \frac{c}{a} \Rightarrow |\Pi\Xi| = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa}a = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}, \quad (10.11)$$

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2 - 1}p, \quad c = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1}p, \quad p = |\Pi\Xi|. \quad (10.12)$$

Απόδειξη: Τετριμμένες συνέπειες των ορισμών. Η πρώτη της (9.11) προκύπτει από τον λόγο $\kappa = \frac{|A\Pi|}{|A\Xi|}$, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες. Οι τελευταίες δύο σειρές δίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ζευγών αριθμών $(|\Pi\Xi|, \kappa)$ και $(\lambda, |\Pi T|)$ που ορίζουν την υπερβολή με τους δύο συνήθεις τρόπους, ο.ε.δ.

Ένα χαρακτηριστικό της υπερβολής που δεν συναντάμε στα άλλα είδη κωνικών τομών είναι οι **Ασύμπτωτες** της υπερβολής. Αυτές είναι δύο ευθείες που χωρίζουν όλες τις ευθείες διά του κέντρου O της υπερβολής σε δύο ομάδες. Οι ευθείες της πρώτης ομάδας τέμνουν την υπερβολή, ενώ οι ευθείες της δεύτερης ομάδας δεν τέμνουν την υπερβολή.



Σχήμα 795: Ασύμπτωτες της υπερβολής

Πρόταση 10.7.4 *Γιά κάθε υπερβολή υπάρχει μία γωνία ω με κορυφή στο κέντρο της O , έτσι ώστε κάθε ευθεία διά του O και περιεχόμενη σε αυτήν την γωνία να τέμνει την υπερβολή, ενώ κάθε ευθεία διά του O και μη περιεχόμενη στην γωνία να μην την τέμνει.*

Απόδειξη: Γιά την απόδειξη χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.8.6, σύμφωνα με την οποία, τα σημεία P μίας ευθείας ε δια του O χαρακτηρίζονται από έναν σταθερό λόγο $\mu = \frac{|PX|}{|PY|}$, όπου

X και Y οι προβολές του P στους κάθετους άξονες της υπερβολής. Για ένα σημείο μιάς τέτοιας ευθείας, λοιπόν, η απαίτηση να περιέχεται και στην ύπερβολή οδηγεί στην εξίσωση

$$\kappa = \frac{|P\Pi|}{|P\Psi|} = \frac{\sqrt{|PX|^2 + |X\Pi|^2}}{|PY| - |Y\Psi|} \Leftrightarrow |PX|^2 + |X\Pi|^2 = \kappa^2(|PY| - |Y\Psi|)^2.$$

Αν θέσουμε $|PY| = x$, τότε ισχύουν και οι

$$|PX| = \mu \cdot x, \quad |X\Pi|^2 = (c - x)^2, \quad |Y\Psi| = \frac{a}{\kappa}$$

και η προηγούμενη εξίσωση μεταφράζεται σε μία εξίσωση του x .

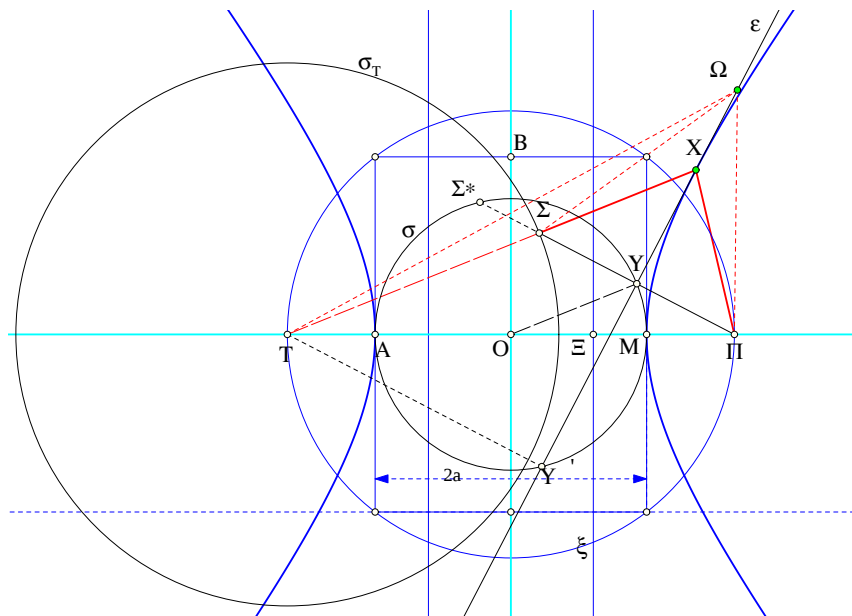
$$x^2(\mu^2 + 1 - \kappa^2) = b^2.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τότε ακριβώς λύση, όταν ισχύει

$$\mu^2 + 1 - \kappa^2 > 0 \Leftrightarrow \mu^2 < \frac{b^2}{a^2},$$

που ισοδυναμεί με το ότι η ευθεία ε τέμνει την κάθετο ΔE της AM σε απόσταση από το M μικρότερη του β , ο.ε.δ.

Η σταθερά a , συχνά και το ευθύγραμμο τμήμα OM ή/και η ίδια η ευθεία OM ονομάζονται **Εγκάρσιος άξονας** της υπερβολής. Αντίστοιχα το μήκος b ή/και ο άξονας συμμετρίας ο κάθετος στον προηγούμενο ονομάζεται **Συζυγής άξονας** της υπερβολής. **Διευθετούντες κύκλοι** της υπερβολής λέγονται οι δύο κύκλοι με κέντρα τις εστίες της και ακτίνα $2a$, όπου a ο μεγάλος άξονας της υπερβολής. Ο κύκλος με κέντρο το κέντρο O της υπερβολής και ακτίνα a λέγεται **Βοηθητικός κύκλος** ή και **Μείζων κύκλος** της υπερβολής.



Σχήμα 796: Βασικές ιδιότητες υπερβολής

Πρόταση 10.7.5 (1) Εστω Σ τυχόν σημείο του βοηθητικού κύκλου σ_T της υπερβολής με κέντρο στην εστία T και δεύτερη εστία στο Π . Η μεσοκάθετος ε του τμήματος $\Sigma\Pi$ τέμνει την $\Sigma\Pi$ σε σημείο X της υπερβολής.

(2) Η ε είναι εφαπτόμενη της υπερβολής και το X είναι το σημείο επαφής της ε .

(3) Η υπερβολή περιέχεται ολόκληρη στο εξωτερικό του μείζονα κύκλου της σ .

(4) Η εφαπτόμενη ε στο X διχοτομεί την γωνία ΠXT .

(5) Οι προβολές Y και Y' των εστιών στην εφαπτόμενη ε περιέχονται στον μείζονα κύκλο της υπερβολής.

(6) Το γινόμενο $|\Pi Y||TY'|$ είναι σταθερό και ίσο με b^2 .

Απόδειξη: Το (1) είναι συνέπεια του ορισμού αφού $|TX| - |X\Pi| = |TX| + |X\Sigma| = 2a$.

Για το (2) ας θεωρήσουμε σημείο Ω της ε , διαφορετικό του X . Λόγω της μεσοκαθέτου

$$|\Omega T| - |\Omega\Pi| = |\Omega T| - |\Omega\Sigma| < |T\Sigma| = 2a.$$

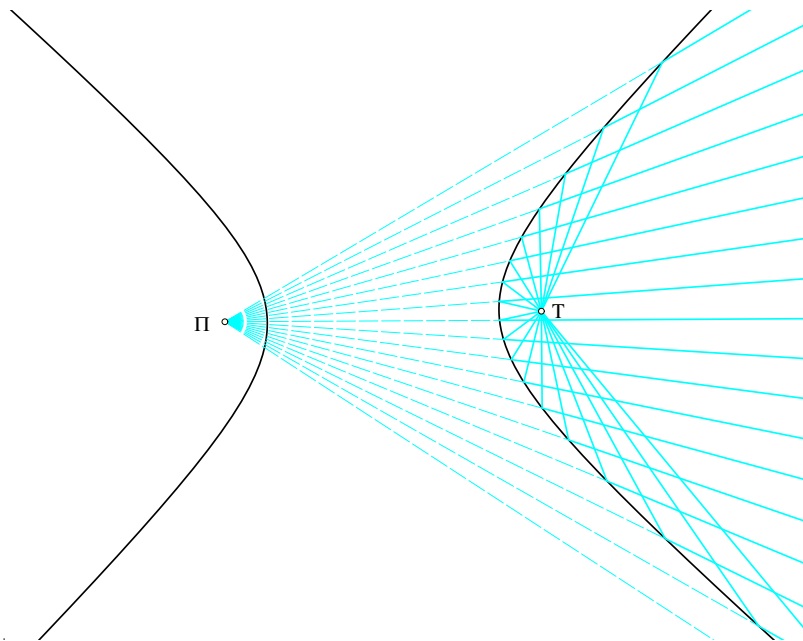
Η τελευταία ανισότητα είναι η τριγωνική για το τρίγωνο $T\Sigma\Omega$. Η ανισότητα δείχνει ότι το Ω δεν ανήκει στην υπερβολή, άρα το X είναι το μοναδικό σημείο της ε κοινό με την υπερβολή.

Το (3) οφείλεται στο ότι η OX είναι διάμεσος του τριγώνου ΠXT και συνεπώς $|OX| > \frac{1}{2}(|XT| - |X\Pi|) = a$ (Άσκηση 1.14.3).

Το (4) οφείλεται στο ότι το τρίγωνο $\Pi X\Sigma$ είναι ισοσκελές, άρα η μεσοκάθετος ε της $\Sigma\Pi$ διχοτομεί την γωνία στην κορυφή του.

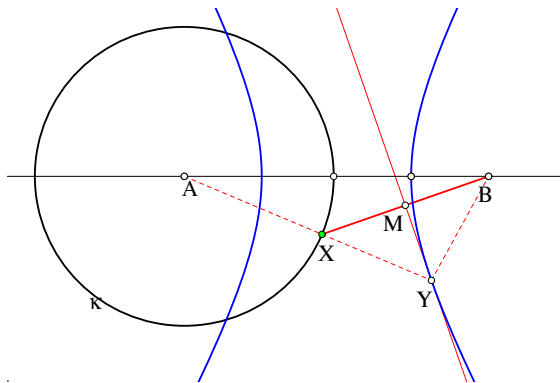
Το (5), για το σημείο Y οφείλεται στο ότι η OY συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\Sigma\Pi T$, άρα $|OY| = \frac{|T\Sigma|}{2} = a$. Ανάλογα αποδεικνύεται η ιδιότητα και για την προβολή Y' του T πάνω στην ε .

Το (6) προκύπτει προεκτείνοντας την ΠY έως ότου τμήσει τον κύκλο σ σε σημείο Y^* . Λόγω της συμμετρίας της υπερβολής ως προς O , οι ΠY^* και TY' είναι ίσες και το γινόμενο $|\Pi Y||TY'| = |\Pi Y||\Pi Y^*|$ είναι ίσο με την δύναμη της εστίας Π ως προς τον μείζονα κύκλο σ , ο.ε.δ.



Σχήμα 797: Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

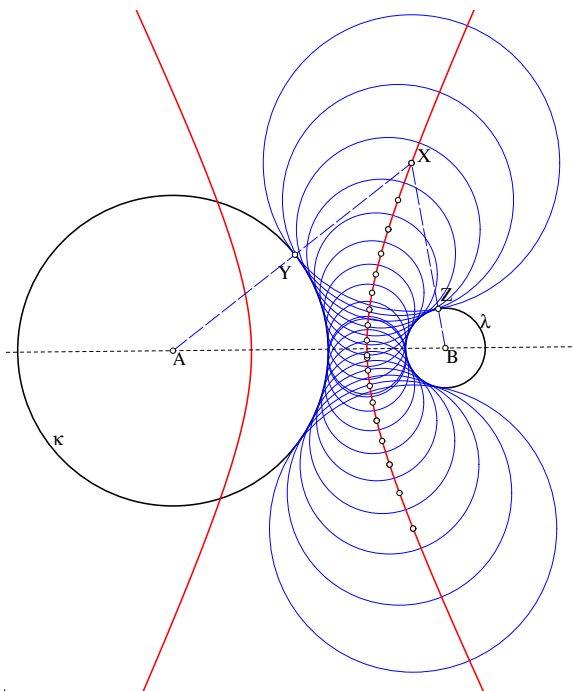
Η τελευταία εικόνα δείχνει την συνέπεια του (4) της προηγούμενης πρότασης, κατά το οποίο ακτίνες κατευθυνόμενες προς μία εστία Π της υπερβολής και ανακλώμενες επ' αυτής συγκεντρώνονται στην άλλη εστία Γ της υπερβολής.



Σχήμα 798: Υπερβολή ως περιβάλλουσα μεσοκαθέτων του BX

Άσκηση 10.7.1 Δοθέντος κύκλου $\kappa(A, \rho)$ και σημείου B εκτός αυτού, δείξε ότι οι μεσοκάθετοι των τμημάτων BX , όπου X σημείο του κύκλου είναι εφαπτόμενες υπερβολής με εστίες τα σημεία A και B και εγκάρσιο άξονα ρ .

Υπόδειξη: Προέκτεινε την AX έως ότου τμήσει την μεσοκάθετο στο Y . Τότε $|YA| - |YB| = |YA| - |YX| = \rho$.



Σχήμα 799: Υπερβολή ως τόπος κέντρων κύκλων

Άσκηση 10.7.2 Δοθέντων κύκλων $\kappa(A, \rho)$ και $\lambda(B, \rho')$ δείξε ότι τα κέντρα τρίτων κύκλων που εφάπτονται και των δύο δοθέντων ευρίσκονται επί υπερβολής με εστίες τα κέντρα A, B των κύκλων και εγκάρσιο άξονα την διαφορά $|\rho - \rho'|$ των ακτίνων.

Βιβλιογραφία

- [M52] Μ, Φ Γ: *Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών)*. Εκδόσεις Καραβία, Αθήναι, 1952.
- [Καν76] Κανέλλος, Σπύρος: *Ευκλείδειος Γεωμετρία*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1976.
- [Παπ81] Παπανικολάου, Χρ: *Ευκλείδειος Γεωμετρία γιά την Β' Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1981.
- [Ντε91] Ντεργιαδής, Νικόλαος: *Μιά απλή γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος του Morley*. Διάσταση, 1:37–38, 1991.
- [Σπί94] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
- [Καπ96] Καπέτης, Γεώργιος: *Γεωμετρία του Τριγώνου, τομ. Α, Β*. Εκδόσεις Ζητη, Θεσσαλονίκη, 1996.
- [Σπί04] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.
- [AB83] A. Bruen, J. Fisher, J. Wilker: *Apollonius by inversion*. Mathematics Magazine, 56:97–103, 1983.
- [Alp00] Alperin, Roger: *A mathematical theory of origami constructions and numbers*. New York Journal of Mathematics, 6:119–133, 2000.
- [AP88] Agazzi, Evandro and Dario Palladino: *Le Geometrie non Euclidee e i Fondamenti della Geometria*. La scuola, Brescia, 1988.
- [Aud02] Audin, Michele: *Geometry*. Springer Verlag, 2002.
- [Bac73] Bachmann, Friedrich: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Verlag, Heidelberg, 1973.
- [Bai88] Bailey, David: *The computation of π to 29,360,000 decimal digits using borweins' quartically convergent algorithm*. Mathematics of Computation, 50:283–296, 1988.
- [Bel07] Belyaev, Oleg: *Fundamentals of Geometry*. Preprint (Internet), 2007.
- [Ber87] Berger, Marcel: *Geometry vols I, II*. Springer Verlag, Heidelberg, 1987.

- [Ber02] Berger, Marcel: *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer Verlag, Heidelberg, 2002.
- [BH07] Barker, William and Roger Howe: *Continuous Symmetry, From Euclid to Klein*. American Mathematical Society, 2007.
- [Bir32] Birkhoff, George: *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*. Annals of Mathematics, 33:329–345, 1932.
- [Bol82] Bold, Benjamin: *Famous Problems of Geometry*. Dover Publications, Inc., New York, 1982.
- [Bon12] Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*. The Open Court Publishing Company, Chicago, 1912.
- [Bot07] Bottema, Oene: *Topics in Elementary Geometry*. Springer Verlag, Heidelberg, 2007.
- [Cai33] Cairns, Stewart: *An axiomatic basis for plane geometry*. Transactions of the American Mathematical Society, 35:234–244, 1933.
- [CG67] Coxeter, H and L Greitzer: *Geometry Revisited*. Math. Assoc. Amer. Washington DC, 1967.
- [Cha65] Chasles, M.: *Traite de Sections Coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1865.
- [Coo16] Coolidge, Julian Lowell: *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford University Press, Oxford, 1916.
- [Cou80] Court, Nathan Altshiller: *College Geometry*. Dover Publications Inc., New York, 1980.
- [Cox61] Coxeter, H: *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1961.
- [Cox68] Coxeter, H S M: *The problem of apollonius*. American Math. Monthly, 75:5–15, 1968.
- [CR96] Courant, Richard and Herbert Robbins: *What is Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [Dan55] Dantzig, Tobias: *The bequest of the Greeks*. George Allen and Unwin Ltd., London, 1955.
- [dC76] Carmo, Manfredo do: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [Der07] Dergiades, Nikolaos: *The soddy circles*. Forum Geometricorum, 7:191–197, 2007.
- [Doe65] Doerrie, Heinrich: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York, 1965.

- [eJPL99] Jean-Pierre Lafon, Pierre Eymard et: *Autour du nombre π* . Hermann Editeurs, Paris, 1999.
- [Eve63] Eves, Howard: *A survey of Geometry*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.
- [Fou05] Fourrey, E.: *Curiosites Geometriques*. Vuibert et Nony editeurs, Paris, 1905.
- [Fur37] Fursenko, V.B.: *Lexicographical account of constructional problems of triangle geometry*. Mathematics in school (in Russian), 5:4–30, 1937.
- [Gal13] Gallatly, William: *The modern geometry of the triangle*. Francis Hodgsonn, London, 1913.
- [Gla20] Glaser, Robert: *Stereometrie*. Walther de Gruyter, 1920.
- [GR04] Gisch, David and Jason Ribando: *Apolloniu's problem: A study of solutions and their connections*. American Journal of Undergraduate Research, 3:15–26, 2004.
- [Hea08] Heath, T: *The thirteen books of Euclid's elements vol. I, II, III*. Cambridge University Press, Cambridge, 1908.
- [Hei85] Heiberg, Johan: *Euclidis Elementa*. Teubner Verlag, 1885.
- [Hil03] Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner Verlag, Leipzig, 1903.
- [Hon95] Honsberger, Ross: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. The Mathematical Association of America, New Library, Washington, 1995.
- [Joh16] Johnson, Roger: *Relating to the simson line or wallace line*. American Math. Monthly, 23:61–62, 1916.
- [Joh60] Johnson, Roger: *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, New York, 1960.
- [Kaz70] Kazarinoff, Nicholas: *Ruler and the Round*. Dover, New York, 1970.
- [KF70] Kolmogorov, A. and S. Fomin: *Introductory Real Analysis*. Dover, New York, 1970.
- [Kle97] Klein, Felix: *Famous Problems of Elementary Geometry*. Ginn and Company, Boston, 1897.
- [Lac93] Lachlan, R.: *Modern Pure Geometry*. Macmillan and Co., London, 1893.
- [Lal52] Lalesco, Trajan: *La Geometrie du triangle*. Librairie Vuibert, Paris, 1952.
- [Leg37] Legendre, Adrien Marie: *Elements de Geometrie, suivis d' un traite de Trigonometrie*. Langlet et compagnie, Bruxelles, 1837.
- [Loo68] Loomis, Elisha Scott: *The Pythagorean Proposition*. The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1968.

- [McI91] Mclelland, William: *A treatise on the Geometry of the Circle*. Macmillan and Co, London, 1891.
- [MP77] Millman, Righard and George Parker: *Elements of differential geometry*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1977.
- [MP94] Mironescu, P. and L. Panaitopol: *The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. Amer. Math. Monthly, 101:58–60, 1994.
- [Mui95] Muirhead, R.: *On the number and nature of the solutions of the apollonian contact problem*. Proc. Edinburgh Math. Society, 14:135–147, 1895.
- [Nie11] Niemeyer, Jo: *A simple construction of the golden section*. Forum Geometricorum, 11:53, 2011.
- [Oxm08] Oxman, Victor: *A purely geometric proof of the uniqueness of a triangle with prescribed angle bisectors*. Forum Geometricorum, 8:197–200, 2008.
- [Ped90] Pedoe, D: *A course of Geometry*. Dover, New York, 1990.
- [PS88] Posamentier, Alfred and Charles Salkind: *Challenging Problems in Geometry*. Dover, New York, 1988.
- [Row17] Row, Sundara: *Geometric Exercises in Paper Folding*. The open court publishing company, Chicago, 1917.
- [sH94] Hahn, Liang shin: *Complex Numbers and Geometry*. Mathematical Association of America, 1994.
- [ST76] Singer, I and J Thorpe: *Lecture notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ste71] Steiner, Jacob: *Gesammelte Werke vol. I, II*. Chelsea Publishing Company, New York, 1971.
- [VY10] Veblen, Oswald and John Young: *Projective Geometry vol. I, II*. Ginn and Company, New York, 1910.
- [Wei03] Weisstein, Eric: *CRC concise encyclopedia of mathematics*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
- [Wel91] Wells, David: *Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Books, 1991.

Ευρετήριο

- (ABΓ), 76
Bachmann, 13
Birkhoff, 12
Bolyai, 54
Brahmagupta, 292, 298
Brianchon, 338
Cairns, 13
Ceva, 319
Dandelin, 489
Desargues, 328
Euler, 276, 280
Fagnano, 306
Fermat, 304
Feuerbach, 278
Gauss, 119, 424
Gergonne, 323
Hilbert, 12
Legendre, 53, 472
Lemoine, 337
Lindemann, 353
Lobatsevski, 54
Malfatti, 275
Morley, 308
Newton, 103
Pascal, 335
Pasch, 27
Saccheri, 52, 53
Simson, 300
Soddy, 287
Steiner, 37, 214
Stewart, 209
Viète, 286
Wallace, 300
- Αόριστες έννοιες, 12
Αθροισμα, 22
Αθροισμα γωνιών τριγώνου, 53, 55
Ακμές της πολυεδρικής γωνίας, 403
Ακμές της πυραμίδας, 403
Ακμές του πολυέδρου, 410
Ακμές τριέδρου, 397
Ακμή της διέδρου, 392
Ακολουθία, 344, 347
Ακρο, 18
Ακτίνα, 74
Ακτίνα σφαίρας, 426
Ακτίνα του κυλίνδρου, 417
Ακτίνα, 354
Αμβλεία, 24, 40
Αμβλυγώνιο, 107
Ανάλυση, 89
Ανάλυση, Σύνθεση, Διερεύνηση, 89
Ανάπτυγμα του κώνου, 425
Ανάπτυγμα του κυλίνδρου, 417
Ανάπτυγμα τριέδρου, 398
Ανοιγμα κώνου, 420
Αντίρροπες, 59
Αντίστροφα σημεία, 255
Αντίστροφη δέσμη, 260
Αντιδιαμετρικά, 428
Αντικέντρο, 139
Αντικείμενες, 18
Αντιομόλογα σημεία, 249
Αντιομοιόθετα, 190
Αντιστροφή, 255
Αντισυμπληρωματικό τρίγωνο, 107
Απέναντι, 26, 324, 414
Απόλυτη Γεωμετρία, 51, 53
Απόσταση, 18
Απόσταση ασυμβάτων, 381
Απόσταση παράλληλης από επίπεδο, 381
Απόσταση παραλλήλων, 98, 149, 180
Απόσταση σημείου από επίπεδο, 380
Απόσταση σημείου από ευθεία, 49
Απόσταση των δύο επιπέδων, 381
Απολλώνιοι κύκλοι, 230
Απολλώνιος, 230, 282
Απολλώνιος κύκλος, 230

- Αριθμοί του Fermat, 119
 Αρμονικά συζυγή, 70
 Αρμονική δέσμη τεσσάρων ευθειών, 315
 Αρμονική Τετράδα, 70
 Αρμονική τετράδα, 183
 Αρνητικό ημιάξονα, 311
 Αρχή, 18, 311
 Αρχιμήδειο αξίωμα, 147
 Αρχιμήδειο τρίγωνο, 510
 Αρχιμήδης, 130, 147, 346
 Ασύμβατα κάθετες, 376, 382, 389, 401
 Ασύμβατες ευθείες, 367, 375, 381, 383
 Ασύμπτωτες υπερβολής, 521
 Ασυμβάτων απόσταση, 381
 Ατρακτος, 436
 Αυτοπολικό τρίγωνο, 327
 Αυξουσα ακολουθία, 344
 Αξίωμα, 12, 15, 18, 20, 27, 55, 147, 344
 Αξίωμα πληρότητας, 344
 Αξίωμα των παραλλήλων, 55, 171
 Αξονας Προοπτικότητας, 328
 Αξονας συμμετρίας, 63
 Αξονας του κώνου, 419
 Αξονας των κέντρων, 235
 Αξονες συμμετρίας έλλειψης, 513
 Αξονες συμμετρίας υπερβολής, 519
 Αξονική συμμετρία, 63

 Βάσεις του κόλουρου κώνου, 424
 Βάσεις του κυλίνδρου, 417
 Βάσεις του πρίσματος, 414
 Βάση της πυραμίδας, 403
 Βάση του κώνου, 419
 Βασικά σημεία, 235
 Βοηθητικός, 515
 Βοηθητικός κύκλος, 522

 Δέσμη ευθειών, 179
 Δέσμη κύκλων, 232, 234
 Δέσμη παραγόμενη από δύο κύκλους, 236
 Διέδρες, 414
 Διέδρες ίσες, 392
 Διέδρες της τριέδρου, 397
 Διέδρες του πολυέδρου, 410
 Διέδρο γωνία, 392
 Διέδρος αμβλεία, 393
 Διέδρος ορθή, 393

 Διέδρος οξεία, 393
 Διέδρος παραπληρωματική, 393
 Διέδρος συμπληρωματική, 393
 Δύναμη της αντιστροφής, 255
 Δύναμη ως προς κύκλο, 218
 Δεύτερο, 22
 Δελτοειδές, 301
 Δευτερεύοντα στοιχεία, 29
 Διάκεντρος, 82
 Διάμεσοι, 409
 Διάμεσος, 28, 36, 54, 61, 105, 145, 150, 154, 210, 221
 Διάμετρο σφαίρας, 426
 Διάμετροι της έλλειψης, 513
 Διάμετροι της υπερβολής, 519
 Διάμετρος, 74, 77
 Διάμετρος της παραβολής, 508
 Διαγώνιο, 324
 Διαγώνιος, 94, 115, 117, 145
 Διαγώνιος παραλληλεππέδου, 414
 Διαμέσων τρίγωνο, 106
 Διερεύνηση, 89
 Διευθετούντες κύκλοι, 515, 522
 Διευθετούσα, 486
 Διευθετούσες της έλλειψης, 497
 Διευθετούσες της υπερβολής, 497
 Διπλό λόγο, 314
 Διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών, 315
 Διχοτόμος, 28, 36, 52, 62, 72, 79, 88, 121, 128, 151, 166, 211, 212, 308
 Διχοτομούνται επίπεδα της διέδρου, 394

 Εδρα, 414
 Εδρες διέδρου, 392
 Εδρες του πολυέδρου, 410
 Εδρες τριέδρου, 397
 Εφαπτόμενη, 78, 88, 219
 Εφαπτόμενη δέσμη, 234
 Εφαπτόμενη της κωνικής, 500
 Εφαπτόμενη της σφαίρας, 429
 Εφαπτόμενο επίπεδο, 421
 Εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας, 427
 Εφαπτόμενοι κύκλοι, 82
 Εφαπτόμενος κώνος, 430
 Εφαπτομενικό τρίγωνο, 267, 337
 Εφεξής, 22
 Εγγεγραμμένη γωνία, 124

- Εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια, 423
 Εγγεγραμμένο τετράπλευρο, 134
 Εγγεγραμμένος, 80
 Εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου, 80
 Εγγράψιμο σε σφαίρα, 434
 Εγκάρσιος άξονας, 522
 Εγκεντρο, 271
 Εγκεντρο του τριγώνου, 280
 Εγκεντρο τριγώνου, 80
 Εις άτοπον απαγωγή, 12, 17, 40, 53
 Εκκεντρότητα, 497, 518
 Εκκεντρα τριγώνου, 270
 Εκκεντρική γωνία, 518
 Ελάσσονες κύκλοι, 427
 Ελλειψη, 486
 Εμβαδόν, 361
 Εμβαδόν κώνου, 446
 Εμβαδόν πολυγώνου, 144
 Εμβαδόν του κώνου, 447
 Εμβαδόν του κυλίνδρου, 446, 447
 Επίκεντρος, 124
 Επίπεδο, 12, 366
 Επιπεδομετρία, 12
 Εστία, 486
 Εστίες, 486, 487
 Εστιακή απόσταση, 513, 519
 Εστιακή παράμετρος, 507, 513, 518
 Εσωτερικά σημεία, 502
 Εσωτερικό, 15, 20
 Εσωτερικό κέντρο, 249
 Εσωτερικό κύκλου, 74
 Εσωτερικό της σφαίρας, 426
 Εσωτερικό της τριέδρου, 397
 Ευθύγραμμο τμήμα, 15
 Ευθεία, 12, 15
 Ευθεία γωνία, 20
 Ευθεία στο Άπειρο, 267, 329, 333, 497
 Ευθεία στο άπειρο, 322
 Ευθεία του Lemoine, 337
 Ευθεία του Newton, 153
 Ευθεία του Simson, 300
 Ευθεία του Euler, 191
 Ευθεία του Newton, 103
 Ευθεία του Pascal, 336
 Εξωτερικά σημεία, 502
 Εξωτερική διχοτόμος, 29, 151
 Εξωτερική γωνία, 29, 39, 56
 Εξωτερικό κέντρο, 249
 Εξωτερικό κύκλου, 74
 Εξωτερικό της σφαίρας, 426
 Φορέας, 16
 Φράγμα, 344
 Γενέτειρες της επιφανείας, 417
 Γενέτειρες του κώνου, 419
 Γεωμετρικός τόπος, 36, 61, 77, 127, 140, 159, 166, 183, 193, 225, 230, 239, 242
 Γνήσιες Κωνικές Τομές, 487
 ΓΠΓ-κριτήριο, 34, 36, 61, 94, 112, 116
 Γωνία, 20
 Γωνία της ατράκτου, 436
 Γωνία του κώνου, 420
 Γωνία των ασυμβάτων, 376
 Γωνία των μεγίστων κύκλων, 436
 Γωνίες πολυγώνου, 115
 Γωνίες του σφαιρικού τριγώνου, 437
 Γωνίες του τριγώνου, 26
 Ημίχωροι, 366
 Ημιεπίπεδα, 15
 Ημιευθεία, 78, 120
 Ημιευθείες, 18, 59
 Ημιπαράμετρος εύρους, 507, 518
 Ημιπεριφέρεια, 120
 Ημιτόνου σφαιρικού τύπος, 443
 Ηρων, 289
 Ιδιόμορφες κωνικές τομές, 487
 Ιπποκράτης, 362
 Ισόπλευρο, 59, 86, 95, 108, 118, 130, 295, 308
 Ισότητα, 12
 Ισα ευθύγραμμα τμήματα, 18
 Ισα πολύγωνα, 115
 Ισα πρίσματα, 414
 Ισα σφαιρικά πολύγωνα, 456
 Ισα σφαιρικά τρίγωνα, 437
 Ισα τρίγωνα, 26
 Ισες Άτρακτοι, 436
 Ισες διέδρες, 392
 Ισες γωνίες, 22
 Ισες σφαίρες, 426
 Ισοί κόλouroι κώνοι, 424

- Ισοί κύκλοι, 74
 Ισοί κύλινδροι, 417
 Ισοί κώνοι, 419
 Ισοσκελές, 32, 35, 36, 41, 42, 66, 74, 75, 129, 161, 165, 223
 Ισοσκελές τραπέζιο, 111

 Θαλής, 173
 Θεώρημα ημιτόνων, 204
 Θεώρημα συνημιτόνου, 205
 Θεώρημα του Ήρωνα, 289
 Θεώρημα του Ceva, 319
 Θεώρημα του Euler, 280
 Θεώρημα του Stewart, 209
 Θεώρημα του Απολλώνιου, 230
 Θεώρημα του Θαλή, 173, 176
 Θεώρημα του Μενελάου, 318
 Θεώρημα του Ναπολέοντος, 307
 Θεώρημα του Πάππου, 157
 Θεώρημα του Πτολεμαίου, 292, 296
 Θεώρημα του Πυθαγόρα, 155, 156, 171
 Θετικό ημιάξονα, 311

 Κάθετα επίπεδα, 393
 Κάθετες, 24, 33
 Κάθετες πλευρές, 32, 43
 Κάθετη στο επίπεδο, 378, 382, 386
 Κάθετος από σημείο, 48, 87
 Κέντρα Ομοιότητας, 248
 Κέντρο βάρους, 105, 190
 Κέντρο δέσμης, 179
 Κέντρο ομοιοθεσίας, 190
 Κέντρο Προοπτικότητας, 328
 Κέντρο σφαίρας, 426
 Κέντρο συμμετρίας, 100
 Κέντρο της έλλειψης, 513
 Κέντρο της αντιστροφής, 255
 Κέντρο της κωνικής, 505
 Κέντρο της συμμετρίας, 65
 Κέντρο της υπερβολής, 519
 Κόλουρη πυραμίδα, 404
 Κόλουρος κώνος, 424
 Κύβος, 415
 Κύκλος, 74
 Κύκλος αντιστροφής, 255
 Κύκλος ομοιότητας, 252
 Κύκλος του Euler, 276
 Κύκλος των εννέα σημείων, 276
 Κύλινδρος, 417
 Κώνος, 419
 $\kappa(O, \rho)$, 74
 Κανονικά πολύεδρα, 410
 Κανονικές πολυεδρικές γωνίες, 408
 Κανονική πυραμίδα, 407
 Κανονικό, 414
 Κανονικό πεντάγωνο, 116, 223
 Κανονικό πολύγωνο, 115, 131, 137
 Κατά κορυφήν, 24
 Κατασκευή τριγώνου, 89, 92, 132, 139, 152, 161, 186, 194, 195, 216, 223, 273, 277, 279, 281
 Κατεύθυνση δέσμης, 179
 Κεντρική προβολή, 390
 Κεντροειδές, 105, 409
 Κοινή κάθετος των ασυμβάτων, 383
 Κολοβό πρίσμα, 415
 Κορυφές, 94
 Κορυφές του πολυέδρου, 410
 Κορυφές του σφαιρικού τριγώνου, 437
 Κορυφές του τριγώνου, 26
 Κορυφή, 20, 324
 Κορυφή της παραβολής, 509
 Κορυφή της πυραμίδας, 403
 Κορυφή του ισοσκελούς, 32
 Κορυφή του κώνου, 419
 Κυκλικό τμήμα, 362, 482
 Κυκλικό τομέας, 481
 Κυκλικός τομέας, 361
 Κυλινδρική επιφάνεια, 417
 Κυρτά σφαιρικά πολύγωνα, 456
 Κυρτή Γωνία, 20
 Κυρτή πυραμίδα, 403
 Κυρτό, 97, 115, 135
 Κυρτό πολύεδρο, 410
 Κυρτό πρίσμα, 414
 Κωνικές με κέντρο, 487
 Κωνικές τομές, 340
 Κωνική επιφάνεια, 419

 Λόγο της χρυσής τομής, 223
 Λόγος ομοιοθεσίας, 190
 Λεπτό, 22

 Μέγιστος κύκλος, 427

- Μέσον, 18, 86
 Μέσος ανάλογος, 164
 Μέτρα, 145
 Μέτρο διέδρου, 392
 Μέτρο της γωνίας σε μοίρες, 21
 Μήκος, 18
 Μήκος πλευράς σφαιρικού τριγώνου, 437
 Μήκος τόξου, 354
 Μήκος τεθλασμένης, 46
 Μείζων κύκλος, 515, 522
 Μεγάλος άξονας, 513
 Μεριά, 15
 Μεσαία τομή, 424
 Μεσοκάθετο επίπεδο, 379, 383
 Μεσοκάθετος, 33, 35, 75, 86, 121, 379
 Μεσοπαράλληλο επίπεδο, 389
 Μεσοπαράλληλος, 101
 Μεταξύ, 12, 15, 16
 Μη κυρτή Γωνία, 20
 Μη τεμνόμενη δέσμη, 234
 Μη-κυρτή γωνία, 20
 Μηδενική γωνία, 20
 Μηνίσκος, 362
 Μικρός άξονας, 513
 Μικροί κύκλοι, 427

 Ο(ρ), 74, 79, 83
 Ογκος, 462
 Ογκος κώνου, 476
 Ογκος κυλίνδρου, 474
 Ογκος σφαιρικής ζώνης, 483
 Ομόλογα, 190, 328
 Ομόλογα σημεία, 249
 Ομόλογες, 328
 Ομόρροπες, 59
 Ομοιόθετα τρίγωνα, 189
 Ομοια τρίγωνα, 162, 187
 Ομοκυκλικά, 219
 Οριακά σημεία, 235
 Οριο ακολουθίας, 344, 347, 350, 354
 Ορθή, 24, 128
 Ορθή κυκλική κυλινδρική επιφάνεια, 417
 Ορθό, 414
 Ορθόκεντρο, 107, 108, 401
 Ορθός κυκλικός κώνος, 419
 Ορθικό τρίγωνο, 166
 Ορθοδιαγώνια, 160
 Ορθογώνια δέσμη, 245
 Ορθογώνιο, 109, 146
 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, 415, 463
 Ορθογώνιο τρίγωνο, 32, 36, 40, 61, 155, 162, 168
 Ορθογώνιοι κύκλοι, 243
 Ορθοκεντρική τετράδα, 133
 Ορος ακολουθίας, 344, 347
 Οξεία, 24, 40

 π, 352
 Πάππος, 35, 157
 Πόλος της ευθείας, 267
 Πόλους του κύκλου, 428
 Παράκεντρα του τριγώνου, 270
 Παράλληλα, 16
 Παράλληλα επίπεδα, 367
 Παράλληλες, 16, 18, 41, 51, 55, 57, 87
 Παράλληλη προβολή, 390
 Παράλληλοι κύκλοι, 427
 Παράμετρος της παραβολής, 508
 Παράπλευρες έδρες, 403
 Παράπλευρες ακμές, 403, 414
 Παράπλευρη επιφάνεια, 419
 Παράπλευρο εμβαδόν, 446
 Παραβολή, 486
 Παραλληλόγραμμο, 94, 95, 97, 98, 103, 109, 145, 149
 Παραλληλεπίπεδο, 414
 Παραπληρωματικές, 24, 39, 57, 60
 Παραπληρωματική τριέδρος, 441
 Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι, 270, 274
 Πεπλατυσμένη γωνία, 20
 Περίκεντρο, 76, 108
 Περίκυκλος, 76, 221
 Περίμετρος, 26, 91, 131, 350, 352
 Περιγεγραμμένη κωνική επιφάνεια, 423
 Περιγεγραμμένη σφαίρα, 434
 Περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου, 434
 Περιγεγραμμένος κύκλος, 76, 110, 136
 ΠΓΠ-κρίτήριο, 34, 36, 44, 53, 83
 Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος, 418
 Πλήρες τετράπλευρο, 324
 Πλήρης στροφή, 21
 Πλακόστρωση, 460
 Πλατωνικά σώματα, 411

- Πλευρές, 94, 324
 Πλευρές πολυγώνου, 115
 Πλευρές της γωνίας, 20
 Πλευρές του σφαιρικού τριγώνου, 437
 Πλευρές του τριγώνου, 26
 Πολύεδρο, 410
 Πολύγωνο, 115
 Πολική του σημείου Σ , 264
 Πολυεδρικές γωνίες του πολυέδρου, 410
 Πολυεδρική γωνία, 403
 ΠΠΠ-κριτήριο, 27, 34, 36
 Πρίσμα, 414
 Πρώτο, 22
 Πρισματική επιφάνεια, 414
 Προβολή, 49, 77
 Προβολή σημείου, 380
 Προβολή σχήματος, 380
 Προβολή της ευθείας α , 395
 Προοπτικά ως προς ευθεία, 328
 Προοπτικά ως προς σημείο, 328
 Προσανατολισμός, 35
 Προσημασμένη απόσταση, 311
 Προσημασμένος Λόγος, 310
 Προσημασμένος λόγος, 212
 Προσθετικότητα εμβαδών, 145
 Πτολεμαίος, 292
 Πυθαγόρας, 155
 Πυραμίδα, 403

 Χώρος, 12, 366
 Χαρακτηριστική του Euler, 461
 Χορδή, 74, 120, 121, 124, 161
 Χορδή κωνικής, 502
 Χορδή σφαίρας, 426
 Χρυσή τομή, 222

 Ρόμβος, 111, 122
 Ριζικό κέντρο, 227, 338
 Ριζικός άξονας, 225
 Ριζικός άξονας της δέσμης, 235

 Σύνθεση, 89
 Σφαίρα κέντρου O και ακτίνας ρ , 426
 Σφαίρες Dandelin, 489
 Σφαιρικά πολύεδρα, 434
 Σφαιρικά πολύγωνα, 456
 Σφαιρική ζώνη, 454
 Σφαιρικό πολύγωνο, 438

 Σφαιρικό τρίγωνο, 437
 Σφαιρικός δακτύλιος, 482
 Σφαιρικός τομέας, 481
 Σφαιρικού ημιτόνου τύπος, 443
 Σφαιρικού συνημιτόνου 1ος τύπος, 440
 Σφαιρικού συνημιτόνου 2ος τύπος, 442
 Σημείο, 12, 15
 Σημείο επαφής, 78, 82, 427, 429
 Σημείο της ευθείας στο άπειρο, 267, 321, 322, 333
 Σημείο του Miquel, 302
 Σημείο του Brianchon, 338
 Σημείο του Feuerbach, 279
 Σημειακή δέσμη, 179
 Σημειακή συμμετρία, 65
 Σχήμα, 12
 Σταθερά σημεία της αντιστροφής, 255
 Σταθερά σημεία της αξονικής συμμετρίας, 63
 Σταθερό σημείο της σημειακής συμμετρίας, 65
 Στερεά γωνία, 403
 Στρεβλό Τετράπλευρο, 377
 Συγκεντρικοί, 82, 122
 Συμμετρικά ως προς άξονα, 63
 Συμμετρικά ως προς σημείο, 65
 Συμμετρικό ως προς άξονα, 63
 Συμμετρικό ως προς σημείο, 65, 67, 95
 Συμπληρωματικά τόξα, 120, 127
 Συμπληρωματικές, 24
 Συμπληρωματικό, 190
 Συνημιτόνου σφαιρικού 1ος τύπος, 440
 Συνημιτόνου σφαιρικού 2ος τύπος, 442
 Συζυγής άξονας, 522
 Συζυγείς κατευθύνσεις, 505

 Τόξο, 120
 Τόξο αντίστοιχο επίκεντρης, 120
 Τεθλασμένη, 46
 Τεμνόμενη δέσμη, 234
 Τεταρτημόρια, 392
 Τετμημένη, 311
 Τετράεδρο, 405
 Τετράγωνο, 110, 148, 154
 Τετράπλευρο, 97, 153, 171
 Τετραγωνισμός του κύκλου, 353
 Τρίεδρες της πυραμίδας, 403

Τρίγωνο, 26
Τραπέζιο, 111, 150, 182
Τριγραμμική πολική, 320, 329
Τριγραμμικός πόλος, 320
Τριγωνική ανισότητα, 46, 75, 83
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, 167
Τριγωνομετρικός κύκλος, 170

Υπερβατικός, 353
Υπερβολή, 487
Υπερβολική Γεωμετρία, 51, 52, 54
Υποτείνουσα, 32, 41, 91
Υψος, 29, 37, 42
Υψος κόλουρου κώνου, 424
Υψος κώνου, 419
Υψος κυλίνδρου, 417
Υψος πρίσματος, 414
Υψος σφαιρικής ζώνης, 454

Ωοειδές, 363