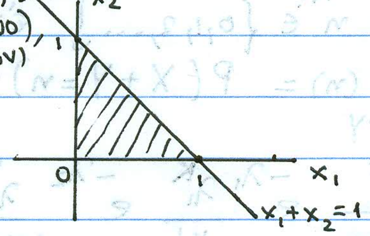
Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙΙ (Λύσεις)

#1 α. Το σύνολο τιμών του ζεύγους (X_1, X_2) είναι

$$R_{X_1,X_2} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : f(x_1,x_2)>0\} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1>0,\ x_2>0,\ x_1+x_2\le 1\}$$

το οποίο δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$, $A = R_{X_1} = (0,1]$, $B=(0,1]=R_{X_2}$ (είναι το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο), (τυπικά, εκτός των καθέτων πλευρών)

άρα οι τ.μ. X_1, X_2 δεν είναι ανεξάρτητες.



β. περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. X_1 : $R_{X_1} = (0,1)$

Για $0<x_1<1$, $f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} f(x_1,x_2)dx_2 = \int_0^{1-x_1} 24x_1x_2\,dx_2$

$= 24x_1\cdot\frac{1}{2}(1-x_1)^2$.

δεσμευμένη πυκνότητα της $X_2|X_1=x_1$, $0<x_1<1$:

Για $0<x_2\le 1-x_1$, $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{2x_2}{(1-x_1)^2}$. (και μηδέν αλλού)

Επομένως για $0<x_1<1$:

$$E(X_2|X_1=x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \int_0^{1-x_1}\frac{2x_2^2}{(1-x_1)^2}dx_2 = \frac{2}{3}(1-x_1).$$

#2. Λύθηκε στην παράδοση.

#3. $R_{X_1}=\{0,1\}=R_{X_2}$, $f_{X_1}(x_1)=p_1^{x_1}\cdot(1-p_1)^{1-x_1}$, $x_1=0,1$ και $f_{X_2}(x_2)=p_2^{x_2}\cdot(1-p_2)^{1-x_2}$, $x_2=0,1$.

α. $R_Z=\{0,1,2\}$

$f_Z(0)=P(Z=0)=P(X_1=0,X_2=0)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=0)P(X_2=0)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(0)=(1-p_1)(1-p_2)$

$f_Z(1)=P(Z=1)=P(X_1=0,X_2=1 \text{ ή } X_1=1,X_2=0)\overset{\text{ξένα}}{=}$

$=P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=0)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=0)P(X_2=1)+P(X_1=1)P(X_2=0)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(1)+$

$f_{X_1}(1)f_{X_2}(0)=(1-p_1)p_2+p_1(1-p_2)$

$f_Z(2)=P(X_1=1,X_2=1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=1)P(X_2=1)=f_{X_1}(1)f_{X_2}(1)=p_1\cdot p_2$.

β. $R_U=\{-1,0,1\}$

$P(U=-1)=P(X_1=0,X_2=1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=0)P(X_2=1)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(1)=(1-p_1)p_2$

$P(U=0)=P(X_1=X_2)=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}$

$=P(X_1=0)P(X_2=0)+P(X_1=1)P(X_2=1)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(0)+f_{X_1}(1)f_{X_2}(1)=(1-p_1)(1-p_2)+p_1p_2$

$P(U=1)=P(X_1=1,X_2=0)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=1)P(X_2=0)=f_{X_1}(1)f_{X_2}(0)=p_1(1-p_2)$

γ. Λύθηκε στην παράδοση, η τ.μ. V είναι Bernoulli $B(1,p)$, $p=p_1p_2$.

#4. Σε επόμενα μαθήματα θα αποδειχθεί (ως θεωρία) ότι το άθροισμα ανεξαρτήτων τ.μ. Poisson έχει επίσης κατανομή Poisson με παράμετρο το άθροισμα των παραμέτρων, δηλαδή εδώ $X+Y\sim P(\lambda)$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. Ανεξάρτητα αυτού του γενικού αποτελέσματος, μια άλλη απόδειξη είναι η εξής: Το σύνολο τιμών της τ.μ. $X+Y$ είναι $R_{X+Y}=\{0,1,2,\dots\}$ αφού $R_X=\{0,1,2,\dots\}$ και $R_Y=\{0,1,2,\dots\}$. Επί πλέον, $P(X=x)=f_X(x)=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$ και $P(Y=y)=f_Y(y)=e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^y}{y!}$, $y=0,1,2,\dots$

Για $n\in\{0,1,2,\dots\}$ έχουμε

$$f_{X+Y}(n)=P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)\overset{\text{ανεξ.}}{=}\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=n-k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}\overset{\text{διώνυμο του Νεύτωνα}}{=}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n/n!=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},$$ δηλαδή Poisson $P(\lambda)$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

#5. Λύθηκε στην παράδοση, ως εφαρμογή τη δισδιάστατης ομοιόμορφης κατανομής στο $(0,1)\times(0,1)$.

#6.

$X \backslash Y$	0	1	2	περιθώρια της X
0	0.10	0.06	0.04	0.2
1	0.35	0.21	0.14	0.7
2	0.05	0.03	0.02	0.1
περιθώρια της Y	0.5	0.3	0.2	

Βρίσκοντας τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας διαπιστώνουμε ότι

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\quad x=0,1,2,\quad y=0,1,2$$

και επομένως οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες

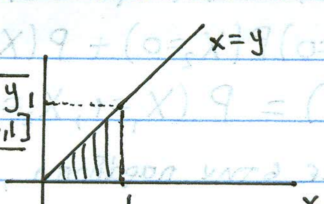
#7 Λύθηκε στην παράδοση (με τη διόρθωση $F(x_1,x_2)=(1-e^{-5x_1^2})(1-e^{-2x_2^2})$ που επηρεάζει κυρίως τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(X_1<X_2)$ — τα υπόλοιπα ερωτήματα μπορούν εύκολα να απαντηθούν και με τον αρχικό τύπο της $F(x_1,x_2)$.)

#9. $E(X^2)=Var(X)+(EX)^2=10$ και ομοίως $E(Y^2)=10$.

$E(2X-3Y)(3X-2Y)=6E(X^2)+6E(Y^2)-13E(XY)=120-13E(XY)\overset{\text{ανεξ.}}{=}$

$=120-13E(X)E(Y)=120-13\cdot 9=3.$

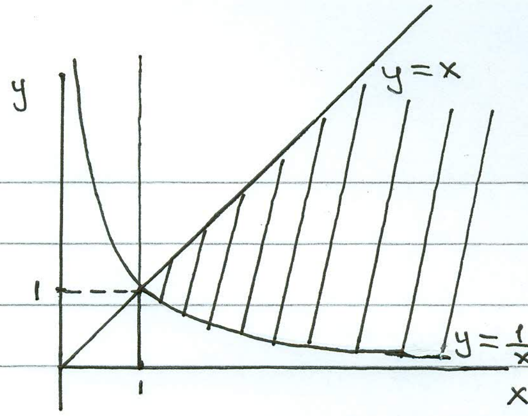
#8. $R_{X,Y}=\{(x,y):0\le y\le x\le 1\}$ που δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$, $A=R_X=[0,1]$, $B=R_Y=[0,1]$ (είναι το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο), άρα οι τ.μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.



$R_Y=[0,1]$, Για $0\le y\le 1$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^1 3x\,dx=\frac{3}{2}(1-y^2)$. (και μηδέν αν $y\notin[0,1]$)

Με $y\in[0,1]$, σταθερό, και $y\le x\le 1$, $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}$. (και μηδέν για $x\notin[y,1]$)

Επομένως, για $y\in[0,1]$, $E(X|Y=y)=\int_y^1\frac{2x^2}{1-y^2}dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-y^3}{1-y^2}$.



#10 α. Το σύνολο τιμών του (X,Y), $R_{X,Y}$, είναι $R_{X,Y}=\{(x,y): x\in(1,\infty),\ \frac{1}{x}<y<x\}$ δηλαδή το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

$R_X=(1,\infty)$, $R_Y=(0,\infty)$. Οι X και Y είναι εξαρτημένες (δε είναι ανεξάρτητες) επειδή $R_{X,Y}\neq A\times B$ με $A=R_X$ και $B=R_Y$.

περιθώρια πυκνότητα της X:

Για $x>1$, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{2x^2y}\,dy=\frac{1}{2x^2}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y}\,dy=\frac{\ln x}{x^2}$. Άρα

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x^2}, & x>1\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

περιθώρια πυκνότητα της Y:

Για $y>0$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{\max(y,\frac{1}{y})}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}\,dx=$

$x>1,\ x>y,\ x>\frac{1}{y} \Leftrightarrow x>\max(1,y,\frac{1}{y})=\max(y,\frac{1}{y})$

$$=\frac{1}{2y}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\max(y,\frac{1}{y})}^{\infty}=\frac{1}{2y\max(y,\frac{1}{y})}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ \frac{1}{2y^2}, & y\geq 1\end{cases}.$$ Άρα

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ \frac{1}{2y^2}, & y\geq 1\\ 0, & y\leq 0\end{cases}.$$

β. $$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_1^{\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{xy}\cdot\frac{1}{2x^2y}\,dy\,dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^3}\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^3}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^2}\,dx-\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^4}\,dx=\frac{1}{3}.$$