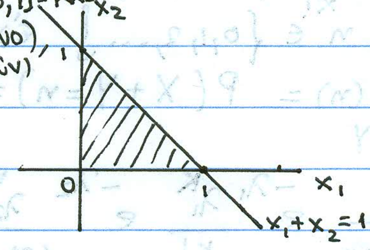
Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙΙ (Λύσεις)

#1 α. Το σύνολο τιμών του ζεύγους (X_1, X_2) είναι

$$R_{X_1,X_2}=\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : f(x_1,x_2)>0\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1>0,\ x_2>0,\ x_1+x_2\le 1\}$$

το οποίο δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$, $A=R_{X_1}=(0,1]$, $B=(0,1]=R_{X_2}$ (είναι το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο), (τυπικά, εκτός των καθέτων πλευρών)

άρα οι τ.μ. X_1, X_2 δεν είναι ανεξάρτητες.



β. περιθώρια πυκνότητα της τ.μ. X_1 : $R_{X_1}=(0,1)$

Για $0<x_1<1$, $f_{X_1}(x_1)=\int_0^{1-x_1} f(x_1,x_2)dx_2=\int_0^{1-x_1} 24x_1x_2\,dx_2$

$=24x_1\cdot\frac{1}{2}(1-x_1)^2$.

δεσμευμένη πυκνότητα της $X_2|X_1=x_1$, $0<x_1<1$:

Για $0<x_2\le 1-x_1$, $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)=\dfrac{f(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}=\dfrac{2x_2}{(1-x_1)^2}$. (και μηδέν αλλού)

Επομένως για $0<x_1<1$:

$$E(X_2|X_1=x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_2 f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)=\int_0^{1-x_1}\frac{2x_2^2}{(1-x_1)^2}dx_2=\frac{2}{3}(1-x_1).$$

#2. Λύθηκε στην παράδοση.

#3. $R_{X_1}=\{0,1\}=R_{X_2}$, $f_{X_1}(x_1)=p_1^{x_1}(1-p_1)^{1-x_1}$, $x_1=0,1$ και $f_{X_2}(x_2)=p_2^{x_2}(1-p_2)^{1-x_2}$, $x_2=0,1$.

α. $R_Z=\{0,1,2\}$

$f_Z(0)=P(Z=0)=P(X_1=0, X_2=0)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=0)P(X_2=0)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(0)=(1-p_1)(1-p_2)$

$f_Z(1)=P(Z=1)=P(X_1=0, X_2=1 \text{ ή } X_1=1, X_2=0)\overset{\text{ξένα}}{=}$

$=P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=0)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=0)P(X_2=1)+P(X_1=1)P(X_2=0)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(1)+$

$f_{X_1}(1)f_{X_2}(0)=(1-p_1)p_2+p_1(1-p_2)$

$f_Z(2)=P(X_1=1, X_2=1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=1)P(X_2=1)=f_{X_1}(1)f_{X_2}(1)=p_1\cdot p_2$.

β. $R_U=\{-1,0,1\}$

$P(U=-1)=P(X_1=0,X_2=1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=0)P(X_2=1)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(1)=(1-p_1)p_2$

$P(U=0)=P(X_1=X_2)=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}$

$=P(X_1=0)P(X_2=0)+P(X_1=1)P(X_2=1)=f_{X_1}(0)f_{X_2}(0)+f_{X_1}(1)f_{X_2}(1)=(1-p_1)(1-p_2)+p_1p_2$

$P(U=1)=P(X_1=1,X_2=0)\overset{\text{ανεξ.}}{=}P(X_1=1)P(X_2=0)=f_{X_1}(1)f_{X_2}(0)=p_1(1-p_2)$

γ. Λύθηκε στην παράδοση, η τ.μ. V είναι Bernoulli $B(1,p)$, $p=p_1p_2$.

#4. Σε επόμενα μαθήματα θα αποδειχθεί (ως θεωρία) ότι το άθροισμα ανεξαρτήτων τ.μ. Poisson έχει επίσης κατανομή Poisson με παράμετρο το άθροισμα των παραμέτρων, δηλαδή εδώ $X+Y\sim P(\lambda)$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. Ανεξάρτητα αυτού του γενικού αποτελέσματος,