

Στατιστική Συμπερασματολογία II - Εργασία II (Λύσεις)

#3, Φυλλάδιο Ασκήσεις III

α. $f_1(X) = \begin{cases} 1, & X_1 > 0.9 \\ 0, & X_1 \leq 0.9 \end{cases}$. Το μέγεθος του $f_1(X)$ είναι $E_{\theta} f_1(X) = P(X_1 > 0.9) = \int_{0.9}^1 2x dx = x^2 \Big|_{0.9}^1 = 0.19$. Η ισχύς του $f_1(X)$ είναι $E_{\theta} f_1(X) = P(X_1 > 0.9) = \int_{0.9}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_{0.9}^1 = 1 - 0.9^3 = 1 - 0.729 = 0.271$.

β. Κατανόηση (αντιστρέψιμου) μετασχηματισμού $Y = g(X)$ με $g(x) = -\ln x / \theta$:
 $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$. Έχουμε, $y = -\ln x_1 / \theta \Rightarrow x_1 = e^{-\theta y} = g^{-1}(y)$ και επομένως $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = e^{-\theta y} (-\theta)$. Αντικαθιστώντας,
 $f_Y(y) = \frac{1}{\theta} (e^{-\theta y})^{\frac{1-\theta}{\theta}} \cdot |e^{-\theta y} (-\theta)| = e^{-y}$, $y > 0$ (επειδή $0 < X_1 < 1 \Rightarrow \ln X_1 < 0 \Rightarrow -\ln X_1 > 0 \Rightarrow -\ln X_1 / \theta > 0 \Rightarrow Y > 0$). Επομένως, $-\ln X_1 / \theta \sim \mathcal{E}(1) \equiv \mathcal{G}(1, 1)$

$f_2(X) = \begin{cases} 1, & \ln X_1 + \ln X_2 > c \\ 0, & \ln X_1 + \ln X_2 \leq c \end{cases}$. Το μέγεθος του $f_2(X)$ είναι $E_{\theta} f_2(X) = P(\ln X_1 + \ln X_2 > c) = P\left(\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} < \frac{-c}{\theta}\right) = P\left(\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} < -2c\right)$. $\theta = 1/2$ Η τ.μ. $-\ln X_1 - \ln X_2$ είναι άθροισμα δύο ανεξαρτητών και ισοδύμων $\mathcal{E}(1)$, άρα ακολουθεί

Γάμμα κατανομή, $\mathcal{G}(\alpha=2, \beta=1)$, και η τ.μ. $2U \sim \mathcal{G}(\alpha=2, \beta=2) \equiv \chi_4^2$.
 Τελικά, το μέγεθος του $f_2(X)$ είναι $P(2U < -4c) = P(\chi_4^2 < -4c) = F(-4c)$, όπου F η σ.κ. της χ_4^2 . Θέλουμε λοιπόν ο f_1 και ο f_2 να έχουν το ίδιο μέγεθος, δηλαδή $F(-4c) = 0.19 \Leftrightarrow P(\chi_4^2 > -4c) = 0.81 (= 1 - 0.19) \Leftrightarrow -4c = \chi_{4,0.81}^2$ (ποσοστιαίο σημείο της χ_4^2 , που υπολογίζεται από πίνακες, δηλ. αριθμητικά και όχι αναλυτικά)
 $\Leftrightarrow c = -\frac{1}{4} \chi_{4,0.81}^2$

γ. Διαπιστώνουμε ότι έχουμε ΜΕΟΚ και στη συνέχεια ΜΛΠ.
 $f(X; \theta) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\theta^2} (x_1, x_2)^{\frac{1-\theta}{\theta}} = e^{-\ln \theta^2 + (1-\frac{\theta}{\theta}) \cdot (\ln x_1 + \ln x_2)}$, $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$
 άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta} - 1 \downarrow$ και $D(X) = \ln X_1 + \ln X_2$
 (επί πλέον $S = \{(x_1, x_2) : f(X; \theta) > 0\} = (0, 1) \times (0, 1)$, ανεξάρτητο του θ .)
 Επειδή $c(\theta) \downarrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $-D(X)$, άρα η μορφή του Ο.Ι.Ε.
 (επειδή η $H_1: \theta < 1/2$) είναι $\varphi^*(X) = \begin{cases} 1, & -D(X) < \kappa \\ 0, & \geq \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \varphi^*(X) = \begin{cases} 1, & D(X) > -\kappa \\ 0, & \leq -\kappa \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \varphi^*(X) = \begin{cases} 1, & \ln X_1 + \ln X_2 > c \\ 0, & \leq c \end{cases}$ με $c = -\kappa$. Τώρα, ο $f_2(X)$ είναι της μορφής $\varphi^*(X)$ με $\kappa = 0$, άρα είναι Ο.Ι.Ε.

#1, Φύλλαδιο Ασκήσεις III

(α) Θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία μέσω ΜΕΟΚ και ΜΛΠ.

$$f(\underline{x}; \theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} = e^{n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n x_i + n \theta}$$

$$S = \{(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}; \theta) > 0\} = (1, \infty)^n, \text{ δεν εξαρτάται από το } \theta.$$

Άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = -\theta$, $D(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ και επειδή $c(\theta) \downarrow$ ως προς θ έχουμε ΜΛΠ ως προς την $T(\underline{x}) = -D(\underline{x})$. Τώρα, επειδή η H_1 καθορίζει $\theta = 2 > 1$, όπου $\theta = 1$ είναι η τιμή του θ υπό την H_0 ,

ο Ι.Ε. έχει τη μορφή

$$\varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & -D(\underline{x}) > c_1 \\ \gamma, & = c_1 \\ 0, & < c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum x_i < c \\ \gamma, & = c \\ 0, & > c \end{cases}, \text{ όπου } c = -c_1$$

Για $\gamma = 0$, προκύπτει ο Ι.Ε. $\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum x_i < c \\ 0, & \geq c \end{cases}$.

(β) Για $n=1$, $\varphi(X_1) = \begin{cases} 1, & X_1 < c \\ 0, & \geq c \end{cases}$. Ζητάμε τη σταθερά c έτσι ώστε

$$E_{\theta=1} \varphi(X_1) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta=1}(X_1 < c) = \alpha \Leftrightarrow \int_1^c e^{-x+1} dx = \alpha \Leftrightarrow 1 - e^{-c+1} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow -c+1 = \ln(1-\alpha) \Leftrightarrow c = 1 - \ln(1-\alpha).$$

$$\text{Η ιχνύς του } \varphi(X_1) \text{ είναι } E_{\theta} \varphi(X_1) = P_{\theta=2}(X_1 < c) = \int_1^c 2e^{-2(x-1)} dx$$

$$= 1 - e^{-2(c-1)} = 1 - e^{-2(1 - \ln(1-\alpha))} = 1 - (1-\alpha)^2.$$

γ. Και για τα τρία προβλήματα, το μέγεθος του $\varphi(X_1)$ είναι α : Τα (Π1)

και (Π2) έχουν την ίδια μηδενική υπόθεση H_0 , όπως στο ερώτημα (α), άρα

και το ίδιο μέγεθος. Για το (Π3) το μέγεθος του $\varphi(X_1)$ είναι $\sup E_{\theta} \varphi(X_1)$.

Όμως, από τη σχετική θεωρία γνωρίζουμε ότι λόγω ΜΛΠ το $\sup$ επιτυγχάνεται

για $\theta = 1$, δηλ. $\sup E_{\theta} \varphi(X_1) = E_{\theta=1} \varphi(X_1) = \alpha$, εξ υποθέσεως. Επί ημεν

ο $\varphi(X_1)$ έχει μέγιστη ιχνύ για το (Π1), από τη σχετική θεωρία

λόγω ΜΛΠ, και για τα (Π2) και (Π3) επειδή η εναλλακτική υπό-

θεση σε αυτά είναι $\theta \in (4, \infty)$ που είναι υποδύνομο του $\theta \in (1, \infty)$.

#6, Φύλλαδιο Ασκήσεις III

(α) Θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία μέσω ΜΕΟΚ και ΜΛΠ.

$$f(\underline{x}; \theta) = \frac{1}{2^n \theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i} = e^{-\ln(2^n \theta^n) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2\theta}}$$

$S = (1, \infty)^n$, δεν εξαρτάται από το θ , άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = -\frac{1}{2\theta}$ και

$D(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Επειδή $c(\theta) \uparrow$ ως προς θ , έχουμε ΜΛΠ ως προς την

$D(\underline{x})$. Τέλος επειδή η τιμή του θ στην H_1 είναι μεγαλύ-

Έστω από την τιμή του θ στην H_0 , από τη σχετική θεωρία, προκύπτει

ότι ο Ι.Ε. έχει τη μορφή

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & D(X) > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(X) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases}$$

(β) $\gamma=0$ λόγω συνεχούς κατανομής, ενώ για τον υπολογισμό του c βλέπουμε

$$E_{\theta=1} \varphi(X_1) = \delta \Leftrightarrow P(X_1 > c) = \delta \Leftrightarrow \int_c^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(x-1)} dx = \delta \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}(c-1)} = \delta \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(c-1) = \ln \delta \Leftrightarrow c = 1 - 2 \ln \delta.$$

(γ) Ο $\varphi(X)$ είναι Ο.Ι.Ε. για τα (Π2) και (Π3): Η μηδενική υπόθεση είναι η ίδια όπως στο ερώτημα (α), άρα και το μέγεθος του $\varphi(X)$ διατηρείται, ενώ έχει και μέγιστη ισχύ για μέν το (Π2) από τη σχετική θεωρία, λόγω ΜΛΠ, για δε το (Π3) επειδή η εναλλακτική υπόθεση του είναι "υποβιβάση" της εναλλακτικής υπόθεσης του (Π2) ($(1, \infty) \subset (1/2, \infty)$).

Για το (Π1), ο $\varphi(X)$ δεν είναι Ο.Ι.Ε.: Λόγω ΜΛΠ, ^{μεν και} η μορφή του Ο.Ι.Ε. για το (Π1) είναι

$$\varphi^*(X) = \begin{cases} 1, & \sum X_i < c \\ \gamma, & = c \\ 0, & > c \end{cases}$$