Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Εργασία ΙΙ (Λύσεις)

#3, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

α. $\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > 0.9 \\ 0, & X_1 \leq 0.9 \end{cases}$. Το μέγεθος του $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_0}\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = \underset{\theta=1/2}{P}(X_1 > 0.9) =$

$= \int_{0.9}^{1} 2x\,dx = x^2\Big|_{0.9}^{1} = 0.19$. Η ισχύς του $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_1}\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = \underset{\theta=1/3}{P}(X_1 > 0.9) =$

$= \int_{0.9}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{0.9}^{1} = 1 - 0.9^3 = 1 - 0.729 = 0.271$.

β. Κατανομή (αντιστρέψιμου) μετασχηματισμού $Y = g(X_1)$ με $g(X) = -\ln X_1/\theta$:

$f_Y(y) = f_{X_1}(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$. Έχουμε, $y = -\ln x_1/\theta \Rightarrow x_1 = e^{-\theta y} = g^{-1}(y)$ και επομένως $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = e^{-\theta y}(-\theta)$. Αντικαθιστώντας,

$f_Y(y) = \frac{1}{\theta}(e^{-\theta y})^{\frac{1-\theta}{\theta}} \cdot |e^{-\theta y}(-\theta)| = e^{-y}$, $y > 0$ (επειδή $0 < X_1 < 1 \Rightarrow \ln X_1 < 0 \Rightarrow$ $-\ln X_1 > 0 \underset{\theta>0}{\Rightarrow} -\ln X_1/\theta > 0 \Rightarrow Y > 0$. Επομένως, $-\ln X_1/\theta \sim \mathcal{E}(1) \equiv G(1,1)$

$\varphi_2(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \ln X_1 + \ln X_2 > c \\ 0, & \leq \end{cases}$. Το μέγεθος του $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_0}\varphi_2(X) = \underset{\theta=1/2}{P}(\ln X_1 + \ln X_2 > c) = \underset{\theta=1/2}{P}\left(\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} < \frac{-c}{\theta}\right) = \underset{\theta=1/2}{P}\left(\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} < -2c\right)$. Η τ.μ. $\frac{-\ln X_1 - \ln X_2}{\theta} = U$ είναι άθροισμα δύο ανεξάρτητων και ισονόμων $\mathcal{E}(1)$, άρα ακολουθεί Γάμμα κατανομή, $G(\alpha=2, \beta=1)$, και η τ.μ. $2U \sim G(\alpha=2, \beta=2) \equiv \chi^2_4$

Τελικά, το μέγεθος του $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι $P(2U < -4c) = P(\chi^2_4 < -4c) = F(-4c)$, όπου F η σ.κ. της χ^2_4. Θέλουμε λοιπόν ο φ_1 και ο φ_2 να έχουν το ίδιο μέγεθος, δηλαδή $F(-4c) = 0.19 \Leftrightarrow P(\chi^2_4 > -4c) = 0.81\ (=1-0.19) \Leftrightarrow -4c = \chi^2_{4,0.81}$

(0.81- ποσοστιαίο σημείο της χ^2_4, που υπολογίζεται από πίνακες, δηλ. αριθμητικά και όχι αναλυτικά)

$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{4}\chi^2_{4,0.81}$

γ. Διαπιστώνουμε ότι έχουμε ΜΕΟΚ και στη συνέχεια ΜΛΠ.

$f(\underset{\sim}{x};\theta) = f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\theta^2}(x_1x_2)^{\frac{1-\theta}{\theta}} = e^{-\ln\theta^2 + \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)\cdot(\ln x_1 + \ln x_2)}$, $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$

άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta} - 1 \downarrow$ και $D(\underset{\sim}{X}) = \ln X_1 + \ln X_2$

(επιπλέον $S = \{(x_1,x_2) : f(\underset{\sim}{x};\theta) > 0\} = (0,1)\times(0,1)$, ανεξάρτητο του θ.)

Επειδή $c(\theta)\downarrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $-D(\underset{\sim}{X})$, άρα η μορφή του Ο.Ι.Ε. (επειδή $H_1: \theta < 1/2$) είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & -D(\underset{\sim}{X}) < k \\ \gamma, & = k \\ 0, & > k \end{cases} \Leftrightarrow \varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & D(\underset{\sim}{X}) > -k \\ \gamma, & = -k \\ 0, & < -k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \ln X_1 + \ln X_2 > c \\ \gamma, & = c \\ 0, & < c \end{cases}$ με $c = -k$. Τώρα, ο $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι της μορφής $\varphi^*(\underset{\sim}{X})$ με $\gamma = 0$,

άρα είναι Ο.Ι.Ε.