ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Θεώρημα του Lie για την επιλυσιμότητα Διαφορικών Εξισώσεων

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΗ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ: ΜΕΛΙΣΣΙΩΤΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΠΑΤΡΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της πτυχιακής μου εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για την υπόδειξη του θέματος αυτής της εργασίας, την επιστημονική του καθοδήγηση και τις υποδείξεις του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον προπτυχιακό φοιτητή Σοφιανό Βασίλειο για τις εύστοχες και πολύ εποικοδομητικές παρατηρήσεις του, οι οποίες συνέβαλαν καθοριστικά στη βελτίωση της παρούσας πτυχιακής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για τις πολύτιμες διορθώσεις και παρατηρήσεις τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ 7

1.1 Ορισμός ομάδας και βασικά πορίσματα από τις ιδιότητες ομάδων 7

1.2 Συμμετρικές ομάδες S_n 10

1.3 Υποομάδες 13

1.4 Ομάδες Lie 15

1.4.1 Ο Εφαπτόμενος χώρος μιας ομάδας Lie 17

1.5 Η Άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ 20

2.1 Βασικές ιδιότητες πολυωνύμων 20

2.2 Ανάγωγα πολυώνυμα 22

2.3 Ομάδες Galois 24

2.4 Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Galois 28

2.5 Θεώρημα Galois 32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 36

3.1 Βασικές έννοιες των Διαφορικών Εξισώσεων 36

3.2 Ολοκληρωτικές καμπύλες και διανυσματικό πεδίο 40

3.3 Διαφορικές εξισώσεις Πρώτης Τάξης 43

3.4 Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων 51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ LIE ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 53

4.1 Θεώρημα Lie για επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων 1ης τάξης 53

4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 58

4.3 Παραδείγματα 59

4.4. Γενίκευση Θεωρήματος Lie για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης. 62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ LIE 64

5.1 Η εξίσωση Riccati 64

5.2 Γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης Riccati 67

5.3 Σφαιρικές συναρτήσεις 70

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 72

Εισαγωγή

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει ως στόχο να παρουσιάσει την προσέγγιση του Lie ως προς την επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων πρώτων και ανώτερων τάξεων. Πιο συγκεκριμένα, ο γνωστός μαθηματικός κατάφερε περί το 1874 να αναπτύξει μια θεωρία παρόμοια με εκείνη του Galois με την διαφορά ότι ο Lie προσπαθούσε μέσω των συμμετρικών ομάδων να επιλύσει γραμμικές και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Η εργασία αυτή αποτελείται από 5 κεφάλαια.

Συνοψίζουμε τα κεφάλαια ως εξής:

Το Κεφάλαιο 1 ασχολείται με τις βασικές έννοιες των ομάδων και υποομάδων. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται ο ορισμός της ομάδας και διάφορες βασικές ιδιότητές της, καθώς και ο ορισμός της υποομάδας. Ακόμη παρουσιάζονται αναλυτικά και οι έννοιες της συμμετρικής ομάδας, της ομάδας Lie και της άλγεβρας Lie.

Το Κεφάλαιο 2 πραγματεύεται βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων. Δίνεται επίσης έμφαση στα ανάγωγα πολυώνυμα και παρουσιάζονται συνοπτικά οι έννοιες της ομάδας Galois καθώς και του αντίστοιχου θεωρήματος Galois.

Στο Κεφάλαιο 3 ορίζονται οι βασικές έννοιες των Διαφορικών Εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, ασχολούμαστε με τις ολοκληρωτικές καμπύλες και τα διανυσματικά πεδία, ενώ δίνουμε αρκετή βαρύτητα και στο κομμάτι των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Επιπρόσθετα, αναφέρουμε κάποιες πολύ εισαγωγικές έννοιες στο κομμάτι των συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 4 διατυπώνουμε το Θεώρημα του Lie για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, καθώς και την απόδειξη αυτού. Στη συνέχεια, δίνουμε κάποια βασικά παραδείγματα και αναπτύσσουμε και μια γενίκευση αυτού του θεωρήματος για ΔΕ ανώτερης τάξης.

Στο κεφάλαιο 5 αναφέρουμε ορισμένες εφαρμογές του Θεωρήματος Lie. Πιο συγκεκριμένα, ασχολούμαστε με την εξίσωση Riccati και την γεωμετρική της ερμηνεία, καθώς και με τις σφαιρικές συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 1. Ομάδες και υποομάδες

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την έννοια της ομάδας και κάποια βασικά πορίσματα, τα οποία προκύπτουν από τις ιδιότητες των ομάδων. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με τις συμμετρικές ομάδες S_n αναλύοντας τον ορισμό τους και κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους που προκύπτουν από συγκεκριμένες προτάσεις και θεωρήματα. Ακόμη, θα αναπτύξουμε τον ορισμό της υποομάδας και ένα πολύ βασικό κριτήριο, το κριτήριο της υποομάδας. Τέλος, θα μελετήσουμε εκτενώς τις έννοιες της ομάδας Lie και της άλγεβρας Lie. Οι αναφορές μας για αυτή την ενότητα είναι τα βιβλία [1] , [3].

1.1 Ορισμός ομάδας και βασικά πορίσματα από τις ιδιότητες ομάδων

Ορισμός 1.1.1 : Έστω G ένα τυχαίο μη κενό σύνολο, το οποίο είναι εφοδιασμένο με μια πράξη $*: G \times G \to G$. Το ζεύγος (G,$*$) καλείται *ομάδα,* αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή:
$(\mathrm{a} * b) * c = \mathrm{a} * (b * c)$, για όλα τα στοιχεία $\mathrm{a}, b, c \in G$

ii. Υπάρχει ένα στοιχείο, έστω e, το οποίο ανήκει στο G και έχει την εξής ιδιότητα:
$e * \mathrm{a} = \mathrm{a} = \mathrm{a} * e$, για κάθε $\mathrm{a} \in G$.
Το παραπάνω στοιχείο e ονομάζεται ουδέτερο στοιχείο της G.

iii. Αν $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $\mathrm{a}^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε:
$$\mathrm{a} * \mathrm{a}^{-1} = e = \mathrm{a}^{-1} * \mathrm{a}$$
Το στοιχείο a^{-1} ονομάζεται αντίστροφο του a.

<u>Παρατήρηση</u> : Αν η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική δηλαδή αν $\mathrm{a} * b = b * \mathrm{a}$ για όλα τα $\mathrm{a,b} \in G$, τότε η ομάδα ονομάζεται *αβελιανή* ή *αντιμεταθετική*.

Να σημειωθεί ότι αν η πράξη της ομάδας συμβολίζεται με + ονομάζεται πρόσθεση. Τότε το ουδέτερο στοιχείο είναι το μηδενικό και συμβολίζεται με 0 και το αντίστροφο στοιχείο της πρόσθεσης ονομάζεται αντίθετο και συμβολίζεται με –a. Αντίστοιχα αν η πράξη της ομάδας συμβολίζεται με $\cdot$. Τότε το ουδέτερο στοιχείο ονομάζεται μοναδιαίο και συμβολίζεται με e.

Παραδείγματα :

i. Οι αριθμητικές δομές $(\mathbb{Z},+)$,$(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ είναι αβελιανές ομάδες.

ii. Έστω $2\mathbb{Z} = \{2a | a \in \mathbb{Z}\}$. Τότε το ζεύγος $(2\mathbb{Z},+)$ είναι μια αβελιανή ομάδα. Ωστόσο το ζεύγος $(2\mathbb{Z},\cdot)$ δεν είναι αβελιανή ομάδα.

iii. Το ζεύγος $(\mathbb{N},+)$, όπου $\mathbb{N}$ το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, δεν είναι ομάδα διότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}$, δεν υπάρχει $\alpha' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = 0$.

Πρόταση 1.1.1 : Έστω $(G,*)$ μια ομάδα. Το ουδέτερο στοιχείο της G είναι μοναδικό και επίσης κάθε στοιχείο $\alpha \in G$ έχει μοναδικό αντίστροφο στοιχείο.

Πρόταση 1.1.2 : Σε κάθε ομάδα ισχύει ο Νόμος της Διαγραφής και από αριστερά και από δεξιά. Πιο συγκεκριμένα,

i. Αν $\alpha\beta = \alpha\gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$, τότε $\beta = \gamma$.
ii. Αν $\alpha\beta = \gamma\beta$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$, τότε $\alpha = \gamma$.

Αποδείξεις

i. Έστω α, β, γ στοιχεία της ομάδας $(G,\cdot)$. Ισχύει:
$\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\beta) = \alpha^{-1}(\alpha\gamma) \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\gamma \Rightarrow e\beta = e\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$, όπου e ουδέτερο στοιχείο της $(G,\cdot)$
ii. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Πρόταση 1.1.3 : Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα.

i. Για κάθε στοιχείο g ∈ G ισχύει:
$$(g^{-1})^{-1} = g$$
ii. Αν $g_1, g_2, \dots, g_n$ τυχαία στοιχεία της G, τότε:
$$(g_1 g_2 \dots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1}$$

Πρόταση 1.1.4 : Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα.

i. Η απεικόνιση $\varphi: G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ είναι $1-1$ και επί.
ii. Έστω α ένα στοιχείο της G. Τότε οι απεικονίσεις:

$$f_1: G \to G \text{ , } g \mapsto ag$$

$$f_2: G \to G \text{ , } g \mapsto ga$$

είναι 1-1 και επί συναρτήσεις.

Αποδείξεις

i. Η φ είναι 1-1, διότι για $g_1, g_2 \in G$ έχουμε:

$g_1 = g_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g_1^{-1} g_1 = g_1^{-1} g_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e = g_1^{-1} g_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e g_2^{-1} = g_1^{-1} g_2 g_2^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g_2^{-1} = g_1^{-1}$.

Επιπλέον, η φ είναι επί διότι αν g ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου G, τότε το αντίστροφό του $g^{-1} \in G$ και από Πρόταση 1.3 ισχύει:

$$\varphi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g\ .$$

Οπότε η φ είναι $1-1$ και επί.

ii. Η f_1 είναι $1-1$ διότι, από τον Νόμο της Διαγραφής που διατυπώθηκε στη Πρόταση 1.2 έχουμε για $g_1, g_2 \in G$.

$g_1 = g_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ag_1 = ag_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f_1(g_1) = f_1(g_2)$.

Η f_1 είναι επί διότι, αν $g \in G$ τότε υπάρχει στοιχείο $a^{-1}g \in G$ τέτοιο ώστε $f_1(a^{-1}g) = a(a^{-1}g) = g$.

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι η f_2 είναι $1-1$ και επί.

1.2 Συμμετρικές ομάδες S_n

Ας θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ορίζουμε το σύνολο S_X όλων των $1-1$ και επί συναρτήσεων από το σύνολο X στο X. Ειδικότερα, η ομάδα $(S_X, \circ)$, η οποία εμπεριέχει όλες τις $1-1$ και επί απεικονίσεις από το σύνολο $\{1,2,\dots,n\}$ στο σύνολο $\{1,2,\dots,n\}$ ονομάζεται *ομάδα μεταθέσεων* των n αντικειμένων και συμβολίζεται με S_n. Προς δική μας διευκόλυνση συμβολίζουμε αυτά τα αντικείμενα με $1,2,\dots,n$.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S_nείναι $n!$. Πιο συγκεκριμένα, ένα στοιχείο της S_n συμβολίζεται:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

όπου $\sigma(i)$ είναι η εικόνα του I μέσω της σ.

Να σημειωθεί ότι αν $\sigma, \tau \in S_n$, τότε το γινόμενο $\sigma \circ \tau$ ή απλούστερα $\sigma\tau$ είναι η σύνθεση των συναρτήσεων σ, τ. Έτσι $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$, για κάθε $i \in X$. Το αντίστροφο του $\sigma \in S_n$ είναι το

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Στο σημείο αυτό ας παρατηρήσουμε ότι το στοιχείο σ θα μπορούσε να γραφτεί κατά τους n ισοδύναμους τρόπους:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) & \sigma(1) \end{pmatrix} \text{ κ.ο.κ..}$$

Αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_n$,

τότε το σ^{-1} είναι το

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ιδιαίτερα υπολογίζουμε ότι

$$S_1 = \{1\}$$
$$S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$S_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Για να ορίσουμε τι σημαίνει άρτια και περιττή μετάθεση S_n θεωρούμε το πολυώνυμο n ανεξάρτητων μεταβλητών

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i<j \\ 1\le i,j\le n}} (x_j - x_i).$$

Παρατηρούμε ότι στο γινόμενο ο παράγων $(x_j - x_i)$ για $i \neq j$ και $1 \le i, j \le n$, εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Αν $\sigma \in S_n$ ορίζουμε το πολυώνυμο

$$\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i<j \\ 1\le i,j\le n}} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(j)}).$$

Βλέπουμε ότι, κάθε παράγων $(x_i - x_j)$ για $i \neq j$ και $1 \le i, j \le n$, εμφανίζεται ακριβώς μία φορά στο πολυώνυμο $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Όμως, είναι δυνατό στο πολυώνυμο $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ αντί του $(x_j - x_i)$, για $i \neq j$, να υπάρχει το $(x_i - x_j)$. Έτσι, τα δύο πολυώνυμα $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ διαφέρουν μόνο στο πρόσημο, δηλαδή $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pm f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ορισμός 1.2.1 : Η μετάθεση S_n ονομάζεται *άρτια*, αν ισχύει $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και *περιττή* αν $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ορισμός 1.2.2 : Έστω το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$. Ορίζουμε την *κυκλική μετάθεση ή κύκλο* των στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ η οποία συμβολίζεται με $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ως τη μετάθεση που αφήνει σταθερά τα στοιχεία $\{1,2, \dots, n\}$ που δεν ανήκουν στο σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ και ακόμη ισχύει $\alpha_1 \mapsto 2, \alpha_2 \mapsto 3, \dots, a_{s-1} \mapsto s, \alpha_s \mapsto 1$. Ο φυσικός αριθμός s προσδιορίζει το *μήκος του κύκλου* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$. Έτσι λέμε ότι έχουμε έναν s −κύκλο.

Παράδειγμα

Ο κύκλος με τα τέσσερα στοιχεία είναι $(1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ορισμός 1.2.3 : Δύο μεταθέσεις $\sigma, \tau \in S_n$ είναι *ξένες μεταξύ τους*, αν κάθε στοιχείο από τα $\{1,2, \dots, n\}$ μένει σταθερό μόνο από τη μια μετάθεση και όχι από την άλλη. Δηλαδή αν $\sigma(x) \neq x$, τότε $\tau(x) = x$ και αν $\sigma(y) = y$, τότε $\tau(y) \neq y$.

Πρόταση 1.2.1 : Έστω 2 κύκλοι $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ και $\tau = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$, οι οποίοι είναι ξένοι μεταξύ τους. Τότε $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cap \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\} = \emptyset$ και $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Θεώρημα 1.2.1 : Κάθε μετάθεση της S_n μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γινόμενο μεταθέσεων, οι οποίες είναι ξένες μεταξύ τους ανά δυο. Αυτή η ανάλυση μπορεί να γραφεί ανεξάρτητα από τη θέση των παραγόντων.

Στη συνέχεια θα δούμε μια ανάλυση μιας μετάθεσης σε γινόμενο αντιμεταθέσεων, δηλαδή μεταθέσεων μήκους 2.

Πρόταση 1.2.2 :

i. Κάθε στοιχείο $\sigma \in S_n$ αναλύεται σε γινόμενο αντιμεταθέσεων.
ii. Ένα στοιχείο $\sigma \in S_n$ είναι άρτια μετάθεση, αν και μόνο αν είναι γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων, ενώ είναι περιττή μετάθεση, αν και μόνο αν είναι γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

Αποδείξεις

i. Από το προηγούμενο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι είναι αρκετό να δείξουμε την πρόταση για κυκλικές μεταθέσεις, Έστω ότι $\sigma = (\alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_s)$. Τότε, ισχύει $(\alpha_1\alpha_s)(\alpha_1\alpha_{s-1}) \dots (\alpha_1\alpha_2) = \sigma$, όπως διαπιστώνουμε κάνοντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της σχέσης αυτής.
ii. Από τον ορισμό των άρτιων και περιττών μεταθέσεων, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι μια αντιμετάθεση είναι περιττή μετάθεση. Έστω η συνάρτηση:

$$f: S_n \to \{-1,1\}, \quad \sigma \to \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \eta\ \sigma\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha \\ -1, & \alpha\nu\ \eta\ \sigma\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta} \end{cases}.$$

Η f είναι επιμορφισμός ομάδων. Έτσι αν $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_t$ είναι η ανάλυση της σ σε γινόμενο αντιμεταθέσεων, τότε $f(\sigma) = f(\sigma_1) \dots f(\sigma_t) = (-1)^t$, όπου αν $t = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma$, τότε η σ είναι άρτια και αντίστοιχα, αν $t = \pi\epsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma$ η σ είναι περιττή.

Πρόταση 1.2.3 : Ένας κύκλος με s στοιχεία, είναι άρτια μετάθεση αν είναι περιττού μήκους, ενώ είναι περιττή μετάθεση αν είναι αρτίου μήκους.

<u>Παρατηρήσεις</u>

i. Η ανάλυση μιας μετάθεσης σε γινόμενο αντιμεταθέσεων δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα:
$$(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3) = (2\ 3)(1\ 3) = (1\ 3)(4\ 2)(1\ 2)(1\ 4)$$
Γενικά,
$$(\alpha\ \beta) = (\alpha\ \beta)(\gamma) = (\beta\ \gamma)(\alpha\ \beta)(\alpha\ \gamma).$$
ii. Δεν ισχύει η αντιμεταθετικότητα στο γινόμενο δύο μεταθέσεων. Πράγματι,
$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2) \neq (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2).$$

1.3 Υποομάδες

Ορισμός 1.3.1 : Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Ένα υποσύνολο $H \subseteq G$ ονομάζεται *υποομάδα* της G, αν μπορεί να οριστεί η πράξη του G στο H και η $(H,\cdot)$ είναι ομάδα και συμβολίζουμε $H \leq G$.

<u>Παρατήρηση</u> Γενικά, ισχύει ότι $\{e\} \leq G$ και $G \leq G$. Η $\{e\}$ ονομάζεται *τετριμμένη υποομάδα* της G.

Ορισμός 1.3.2 : Κάθε υποομάδα H της G τέτοια ώστε $\{e\} < H < G$ ονομάζεται *γνήσια υποομάδα* της G. Συμβολίζεται με $H < G$.

Πρόταση 1.3.1 : Έστω G μια ομάδα και H υποομάδα της G. Το ουδέτερο στοιχείο της G συμπίπτει με το ουδέτερο στοιχείο της υποομάδας H. Αντίστοιχα, το αντίστροφο στοιχείο h^{-1} συμπίπτει με το αντίστροφο στοιχείο του h, αν θεωρήσουμε ότι το h ανήκει στην ομάδα G.

Θεώρημα 1.3.1 (Κριτήριο Υποομάδας)

Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα και $H \neq \emptyset$, $H \subseteq G$. Το H είναι υποομάδα της G, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(1.1) \quad \alpha\beta^{-1} \text{ ,για κάθε } \alpha, \beta \in H.$$

Απόδειξη :

Είναι προφανές από τον ορισμό της ομάδας ότι αν $H \leq G$, τότε ισχύει η συνθήκη του θεωρήματος.

Θεωρώ, ότι η σχέση (1.1) ισχύει για το H, το οποίο είναι μη κενό και είναι υποσύνολο της G. Έστω $\alpha \in H$. Τότε από τη σχέση (1.1) ισχύει $\alpha\alpha^{-1} \in H$, δηλαδή $\alpha\alpha^{-1} = e \in H$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G. Επίσης, αφού $e, \alpha \in H$ ισχύει από τη σχέση (1.1) $e\alpha^{-1} = \alpha^{-1} \in H$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η πράξη της G ορίζεται και στο σύνολο H.

Έστω $\alpha, \beta \in H$.Τότε $\beta^{-1} \in H$ (όπως προαναφέρθηκε).Άρα από τη σχέση (1.1) ισχύει, $\alpha(\beta^{-1}) = \alpha\beta \in H$, για κάθε $\alpha, \beta \in H$.

Άρα η πράξη της G ορίζεται στο H.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η πράξη στο H είναι προσεταιριστική. Αυτό ισχύει διότι, η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι προσεταιριστική στη G άρα και στο H. Έτσι το H είναι υποομάδα της G.

Με το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να αποφανθούμε αν ένα υποσύνολο μιας ομάδας είναι υποομάδα με πράξεις σαφώς λιγότερες από αυτές που απαιτούνται.

Ωστόσο, αν το σύνολο $H \subseteq G$ είναι πεπερασμένο, τότε οι πράξεις που πρέπει να ελεγχθούν για να δούμε αν το H είναι υποομάδα της G, είναι ακόμη λιγότερες. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε στο αμέσως επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.2 : Έστω $H \neq \emptyset$, H πεπερασμένο και H υποσύνολο μιας ομάδας G, είναι υποομάδα της G αν και μόνο αν η πράξη της G ορίζεται στο H.

Παραδείγματα :

i. Το υποσύνολο $n\mathbb{Z} = \{ns\colon\ s \in \mathbb{Z}\}$ για $n > 1$, είναι υποομάδα της $(\mathbb{Z}, +)$, από το θεώρημα. Πράγματι για $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ $\quad nk + (-n)l = n(k - l) \in \mathbb{Z}$.
ii. Το υποσύνολο $\mathbb{N}$ της $\mathbb{Z}$ δεν είναι υποομάδα της $(\mathbb{Z}, +)$. Ωστόσο η πρόσθεση των ακεραίων ορίζεται στο $\mathbb{N}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το να είναι πεπερασμένο ένα σύνολο είναι πολύ σημαντική συνθήκη για το θεώρημα.

1.4 Ομάδες Lie

Προτού μελετήσουμε τις ομάδες Lie και συγκεκριμένα προτού δώσουμε τον ορισμό τους, θα μελετήσουμε κάποιες προαπαιτούμενες έννοιες.

Ορισμός 1.4.1 : Έστω M ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση. Ο M ονομάζεται *τοπολογική πολλαπλότητα* διάστασης n, αν για κάθε σημείο p που ανήκει στον M υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U που περιέχει το p και ένας ομομορφισμός $\varphi: U \to \varphi(U)$, με το $\varphi(U)$ να είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Το ζεύγος (U, φ) ονομάζεται τοπικός χάρτης της πολλαπλότητας M στο σημείο $p \in M$.

<u>Παρατήρηση</u> Προκειμένου η διάσταση μιας πολλαπλότητας να είναι καλώς ορισμένη πρέπει να ισχύει ότι αν $n \neq m$, τότε κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικό με κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Ορισμός 1.4.2 : Έστω M μια τοπολογική πολλαπλότητα και $\boldsymbol{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in I\}$ ένα σύνολο χαρτών. Το $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται *λείος άτλαντας* αν πληροί τις παρακάτω συνθήκες :

i. Η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων U_α καλύπτει την M, δηλαδή $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.
ii. Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, η απεικόνιση
$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$
και η αντίστροφή της $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ είναι λείες απεικονίσεις μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

<u>Παρατήρηση</u> Ένας άτλαντας $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται μεγιστικός σε έναν τοπικά Ευκλείδειο χώρο, εάν δεν υπάρχει άλλος άτλαντας πού να τον περιέχει. Δηλαδή αν $\boldsymbol{B}$ είναι ένας άλλος άτλαντας πού περιέχει τον $\boldsymbol{A}$ τότε αν ο **A** είναι μεγιστικός ισχύει $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Ορισμός 1.4.3 : Μια τοπολογική *πολλαπλότητα* M ονομάζεται *λεία* ή διαφορική όταν αυτή είναι εφοδιασμένη με έναν λείο άτλαντα $\boldsymbol{A}$**.** Ο μεγιστικός άτλαντας ονομάζεται μια διαφορική δομή της M. Τέλος, μια πολλαπλότητα M έχει διάσταση n, εάν όλες οι συνεκτικές συνιστώσες της M έχουν διάσταση n.

Να σημειωθεί ότι μια λεία πολλαπλότητα διάστασης 1, ονομάζεται *λεία καμπύλη* και μια λεία πολλαπλότητα διάστασης 2, *λεία επιφάνεια*.

Ορισμός 1.4.4 : Έστω M μια λεία πολλαπλότητα, $f: M \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση και p ένα σημείο της πολλαπλότητας M. Η f ονομάζεται *λεία απεικόνιση* ή C^∞ στο σημείο p εάν υπάρχει χάρτης (U, φ) στο p, ώστε η συνάρτηση $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ να είναι λεία στο $\varphi(p)$.

<u>Παρατήρηση</u> Η f ονομάζεται λεία ή C^∞, εάν είναι λεία σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας.

Οι παραπάνω ορισμοί και παρατηρήσεις δίνονται για να μπορέσομε να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της ομάδας Lie. Ουσιαστικά μια ομάδα Lie είναι μια λεία πολλαπλότητα, η οποία ταυτόχρονα είναι και ομάδα, οι πράξεις της οποίας είναι λείες απεικονίσεις. Μια πολύ σημαντική κατηγορία διανυσματικών πεδίων σε μια ομάδα Lie είναι τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία. Από αυτά τα διανυσματικά πεδία ορίζεται ένα αλγεβρικό αντικείμενο, η άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie, για την οποία θα μιλήσουμε στην επόμενη υποενότητα.

Ορισμός 1.4.5 : Έστω G μια λεία πολλαπλότητα. Τότε η G ονομάζεται ομάδα Lie αν πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις.

i. Η G είναι ομάδα.
ii. Οι απεικονίσεις $\mu: G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy$ και $i: G \to G, x \mapsto x^{-1}$ να είναι λείες.

<u>Παρατηρήσεις</u>

i. Σε κάθε ομάδα Lie οι πράξεις της ομάδας (όπως είδαμε και προηγουμένως) είναι λείες απεικονίσεις και κατ' επέκταση θα είναι και συνεχείς. Άρα οι ομάδες Lie είναι τοπολογικές ομάδες.
ii. Η διάσταση μίας ομάδας Lie είναι ίδια με τη διάσταση αυτής ως λεία πολλαπλότητα.

Παραδείγματα

i. Τα σύνολα $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ είναι ομάδες Lie με πράξη την πρόσθεση και αν εξαιρέσουμε το μηδενικό στοιχείο γίνονται ομάδες Lie με πράξη τον πολλαπλασιασμό.
ii. Ο μοναδιαίος κύκλος είναι μια ομάδα Lie. Πιο συγκεκριμένα, αν ταυτίσουμε τον μοναδιαίο κύκλο με το σύνολο $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ το οποίο περιγράφει όλους τους μιγαδικούς αριθμούς πού έχουν μέτρο 1, τότε αυτό το σύνολο είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{C}$. Η ταύτιση αυτή γίνεται ως εξής: $(cos\theta, sin\theta) \leftrightarrow e^{i\theta}$ $\mu\varepsilon$ $i = \sqrt{-1}$.

Ορισμός 1.4.6 : Μια υποομάδα Lie H της ομάδας Lie G είναι μια υποομάδα της ομάδας G, η οποία είναι και μια εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα της G, ώστε οι πράξεις της ομάδας H να είναι λείες.

<u>Παρατήρηση</u> Μια κλειστή υποομάδα H μιας ομάδας Lie G είναι μια υποομάδα της G η οποία είναι και κλειστό υποσύνολο της G.

1.4.1 Ο Εφαπτόμενος χώρος μιας ομάδας Lie

Οι ομάδες Lie είναι πολύ δύσκολο να μελετηθούν, διότι είναι κατά βάση λείες πολλαπλότητες πράγμα το οποίο τις καθιστά μη γραμμικά αντικείμενα. Όπως γνωρίζουμε για οποιαδήποτε πολλαπλότητα ο εφαπτόμενος χώρος σε κάθε σημείο τους είναι η καλύτερη γραμμική προσέγγιση στο σημείο αυτό. Ωστόσο στη θεωρία ομάδων Lie, εξαιτίας της δυνατότητας χρήσης απεικονίσεων μεταφοράς, αρκεί να μελετήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο μόνο στο ουδέτερο στοιχείο. Παρατηρούμε ότι στο ουδέτερο στοιχείο ο εφαπτόμενος χώρος αποκτά δομή μιας άλγεβρας Lie, ενός αλγεβρικού αντικειμένου το οποίο θα μελετηθεί στην επόμενη υποενότητα.

Ορισμός 1.4.1.1 : Έστω G μια ομάδα Lie και $p \in G$. Οι απεικονίσεις $L_p, R_p: G \to G, L_p(g) = pg$ και $R_p(g) = gp$ ονομάζονται αριστερή μεταφορά και δεξιά μεταφορά αντίστοιχα.

<u>Παρατήρηση:</u> Και οι δύο παραπάνω απεικονίσεις είναι αμφιδιαφορίσεις με αντιστρόφους, δηλαδή $\left(L_p\right)^{-1} = L_p^{-1}$ και $\left(R_p\right)^{-1} = R_p^{-1}$. Η αμφιδιαφόριση L_p δημιουργεί τον ισομορφισμό διανυσματικών χώρων

$$\left(dL_p\right)_e : T_eG \to T_pG$$

<u>Σημείωση</u> : Αμφιδιαφορίσιμη καλείται μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1 ,επί και αμφισυνεχής (δηλαδή είναι συνεχής η f και η f^{-1}.

Γεωμετρικά, ο παραπάνω ισομορφισμός σημαίνει πως αν θέλουμε να περιγράψουμε τον εφαπτόμενο χώρο στο ουδέτερο σημείο e της G τότε η εικόνα αυτού μέσω της απεικόνισης dL_p περιγράφει τον εφαπτόμενο χώρο T_pG σε οποιοδήποτε σημείο p της ομάδας Lie.

Γενικά λοιπόν, σύμφωνα με τον παραπάνω ισομορφισμό ορίζονται οι ισομορφισμοί $\left(dL_p\right)_g : T_gG \to T_{pg}G$ $\kappa\alpha\iota$ $\left(dR_p\right)_g : T_gG \to T_{gp}G (p, g \in G)$.

1.5 Η Άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie

Προτού μελετήσουμε την έννοια της άλγεβρας Lie μιας ομάδας Lie, θα αναπτύξουμε μια σημαντική κατηγορία διανυσματικών πεδίων σε μια ομάδα Lie και στη συνέχεια θα αντιστοιχούμε σε κάθε ομάδα Lie ένα αλγεβρικό αντικείμενο, την άλγεβρα Lie $\boldsymbol{g}$.

Ορισμός 1.5.1 : Ένα διανυσματικό πεδίο X σε μια ομάδα Lie ονομάζεται *αριστερά αναλλοίωτο* αν $X \circ L_p = dL_p(X)$ για κάθε $p \in G$. Ισοδύναμα συμβολίζεται με $X_{pg} = \left(dL_p\right)_g(X_g)$ για κάθε $p, g \in G$.

<u>Παρατήρηση</u> Ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο έχει την ιδιότητα να εξαρτάται από την τιμή του στο ουδέτερου στοιχείου $e \in G$, αφού $X_p = \left(dL_p\right)_e(X_e)$ για κάθε $p \in G$. Επίσης κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο είναι λείο.

Έτσι, συμβολίζουμε με $\mathfrak{g} = \{$όλα τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στην ομάδα Lie$\}$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathfrak{g}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathcal{X}(G)$, ο οποίος περιέχει όλα τα λεία διανυσματικά πεδία της G.

Αν $X, Y \in \mathfrak{g}$ τότε ισχύει ότι $[X, Y] \in \mathfrak{g}$**.** Πράγματι, έστω $\beta, p \in G$ και $f \in F(G)$. Τότε

$$\begin{aligned} dL_p[X,Y]_\beta f &= [X,Y]_\beta\left(f \circ L_p\right) \\ &= X_\beta\left(Y\left(f \circ L_p\right)\right) - Y_\beta\left(X\left(f \circ L_p\right)\right) \\ &= X_\beta(dL_p Y)f - Y_\beta(dL_p X) = X_\beta Y f - Y_\beta X f \\ &= (X_\beta Y - Y_\beta X)f = [X,Y]_\beta f \end{aligned}$$

(στην 3_η ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του διαφορικού).

Έτσι, με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο εξής ορισμός:

Ορισμός 1.5.2 : Ένας διανυσματικός χώρος $\mathfrak{g}$ εφοδιασμένος με μια πράξη της μορφής : $[\,,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (γινόμενο Lie) ονομάζεται *άλγεβρα Lie* και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $[x, y] = -[y, x]$
ii. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$
iii. $[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y]$
iv. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

Ορισμός 1.5.3 : Ένας διανυσματικός υπόχωρος $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, όπου $\mathfrak{h} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (γινόμενο Lie), ο οποίος είναι κλειστός ως προς το γινόμενο Lie ονομάζεται *υποάλγβερα Lie*.

Άρα το σύνολο όλων των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων μιας ομάδας Lie είναι μια άλγεβρα Lie , η οποία είναι υποάλγβερα Lie της άλγεβρας Lie όλων των λείων διανυσματικών πεδίων της G.

Ορισμός 1.5.4 : Η *άλγεβρα Lie* μιας ομάδας Lie G είναι το σύνολο όλων των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G.

Παράδειγμα

Έστω η ομάδα Lie $G = (\mathbb{R}, +)$, η οποία έχει ως ουδέτερο στοιχείο το 0 και επίσης έχω και το διανυσματικό πεδίο $\frac{d}{dx} \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της ομάδας Lie είναι πολλαπλάσια του παραπάνω διανυσματικού πεδίου.

Παρατηρούμε ότι οι αριστερές μορφές είναι της μορφής $L_g(x) = g + x$.

Αρχικά υπολογίζω την τιμή $(dL_g)(0) \circ (\frac{d}{dx}|_0)f$. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $g \in \mathbb{R}$ και κατ' επέκταση είναι ένα πολλαπλάσιο του $\frac{d}{dx}|_g$, δηλαδή είναι της μορφής $\lambda \frac{d}{dx}|_g$.

Για να βρω το λ παίρνω τη συνάρτηση $f(x) = x$ και κάνω τους εξής υπολογισμούς:

$$\lambda = \lambda \frac{d}{dx}|_g f = \left(dL_g\right)_0 (\frac{d}{dx}|_0) f = \frac{d}{dx}|_0 (f \circ L_g) = \frac{d}{dx}|_0 (g + x) = 1,$$

άρα $(dL_g) \circ (\frac{d}{dx}|_0) = 1 \circ (\frac{d}{dx}|_0) = \frac{d}{dx}|_g$.

Οπότε το $\frac{d}{dx}$ είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της πολλαπλότητας $\mathbb{R}$ και κάθε άλλο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλάσιο αυτού.

Κεφάλαιο 2. Πολυώνυμα

Στη παρακάτω ενότητα θα μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων, κάνοντας επίσης μια αναφορά στα ανάγωγα πολυώνυμα και στα χαρακτηριστικά τους . Έπειτα, θα ασχοληθούμε με την έννοια των ομάδων Galois και με την βοήθεια κάποιων συμπληρωματικών εννοιών, θα καταλήξουμε στο κεντρικό κομμάτι αυτού του κεφαλαίου, το οποίο είναι το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois. Σε αυτή την ενότητα, η κύρια αναφορά μας είναι το βιβλίο [2].

2.1 Βασικές ιδιότητες πολυωνύμων

Στη παρακάτω υποενότητα θα μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες και κάποια σημαντικά συμπεράσματα των πολυωνύμων που έχουν συντελεστές από μια ακέραια περιοχή R ή από ένα σώμα F. Οι παρακάτω έννοιες θα χρειαστούν στην ανάπτυξη της θεωρίας Galois.

Έστω F ένα σώμα και $F[x]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα F. Ο δακτύλιος αυτός είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης, δηλαδή, $\dim_F F[x] = \infty$. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένα πολυώνυμο ονομάζεται μονικό, αν ο συντελεστής της μεγιστοβάθμιας δύναμης του x είναι ίσος με το 1.

Θεώρημα 2.1.1 : Έστω ότι F ένα σώμα και $f(x), g(x)$ πολυώνυμα τα οποία ανήκουν στον $F[x] με\ g(x) \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $r(x), q(x)$ τα οποία ικανοποιούν την σχέση $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ με $deg(r(x)) < deg(g(x))$ ή $r(x) = 0$.

Άρα παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδειος αλγόριθμος ισχύει στον $F[x]$. Συνεπώς μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.1 : Έστω $f(x) \in F[x]$. Το $p \in F$ είναι ρίζα του $f(x)$, αν και μόνο αν το $x - p$ διαιρεί το $f(x)$ στον $F[x]$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο του παραπάνω θεωρήματος αν θέσω όπου $g(x) = x - p$, ισχύει η σχέση $f(x) = (x - p)q(x) + r(x)$, όπου $deg(r(x)) < 1$. Άρα ο $x - p$ διαιρεί το $f(x)$ αν και μόνο αν το $r(x) = 0$, αν και μόνο αν $f(p) = 0$, δηλαδή αν p είναι ρίζα του $f(x)$, το οποίο ισχύει εξ' υποθέσεως.

Αν εφαρμόσω διαδοχικά την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.1 : Αν $f(x) \in F[x]$ και $p_1, p_2, \dots, p_n \in F$ είναι ρίζες του $f(x)$ οι οποίες είναι διακεκριμένες μεταξύ τους τότε ισχύει $f(x) = (x - p_1)(x - p_2) \dots (x - p_n)q'(x)$, όπου $q'(x) \in F[x]$.

Έστω ότι $\varphi: F \to L$ είναι εμφύτευση σωμάτων και

$$\tilde{\varphi}: F[x] \to L[x], \qquad \sum c_I x^i \to \sum \varphi\,(c_i) x^i$$

είναι ο αντίστοιχος ομομορφισμός ανάμεσα στους δακτυλίους πολυωνύμων.

Συμβολίζω με $\tilde{f}(x)$ την εικόνα του $f(x)$ στον $L(x)$. Παρατηρούμε ότι αν p είναι η ρίζα του $f(x)$ τότε η $\varphi(p)$ είναι ρίζα του $\tilde{f}(x)$. Πράγματι,

$$\tilde{f}(\varphi(p)) = \sum \varphi(\,c_i)\varphi(p)^i = \sum \varphi\big(c_I p^i\big) = \varphi \sum c_i p^i = \varphi(f(p)) = \varphi(0) = 0.$$

Έτσι, σε συνδυασμό με το πόρισμα προκύπτει το παρακάτω συμπέρασμα.

Πόρισμα 2.1.2 : Έστω ότι $p_1, p_2, \dots, p_n \in F$ είναι διακεκριμένες ρίζες ενός πολυωνύμου $f(x)$ το οποίο είναι βαθμού n και έστω η εμφύτευση σωμάτων $\varphi: F \to L$ $\mu\varepsilon$ $\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_n)$ να είναι ρίζες ενός πολυωνύμου $h(x) \in L(x)$. Τότε

$$h(x) = \tilde{f}(x)p(x), \text{όπου } p(x) \in L(x).$$

Πρόταση 2.1.2 : Έστω $f(x) \in F(x)$ και $degf(x) = n$, με πεπερασμένη διάσταση. Τότε το $f(x)$ έχει το πολύ n ρίζες.

Απόδειξη

Αν η $f(x)$ έχει s ρίζες, δηλαδή $p_1, p_2, \dots, p_s$ τότε η $f(x)$ διαιρεί τα πολυώνυμα $x - p_1, x - p_2, \dots, x - p_s$ και από την Ευκλείδεια διαίρεση μπορούμε να γράψουμε $f(x) = (x - p_1)(x - p_2), \dots, (x - p_s)g(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $g(x) \in F[x]$. Αν συγκρίνω τους βαθμούς των πολυωνύμων των δύο μελών έχω ότι $s \leq n$. Άρα το f έχει το πολύ n ρίζες.

Ορισμός 2.1.1 : Έστω $f(x)$ πολυώνυμο που ανήκει στον $F[x]$ με $degf(x) = n$. Το $f(x)$ *αναλύεται σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων* στον $F[x]$ αν

$$f(x) = c(x - \ p_1)(x - p_2) \dots (x - p_n), \text{όπου } c, p_1, p_2, \dots, p_n \in F.$$

2.2 Ανάγωγα πολυώνυμα

Έστω F σώμα παρακάτω θα αναλύσουμε ορισμένα κριτήρια για πολυώνυμα στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$ ώστε να είναι ανάγωγα.

Ορισμός 2.2.1: Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο . Ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathrm{R}[x]$ θετικού βαθμού ονομάζεται *ανάγωγο* στο $R[x]$ αν δεν υπάρχουν πολυώνυμα $f(x), g(x) \in R[x]$ θετικού βαθμού με $p(x) = f(x)g(x)$.

Το παρακάτω θεώρημα αναφέρεται στα πρωταρχικά πολυώνυμα. Πρόκειται για πολυώνυμα του $\mathbb{Z}[x]$, πού είναι της μορφής $\alpha_n x_n + \cdots + \alpha_0$, με την ιδιότητα $MK\Delta(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 1$.

Θεώρημα 2.2.2 (Κριτήριο του Gauss)

Έστω $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ πρωταρχικό πολυώνυμο με $deg(f(x)) > 0$. Τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Z}[x]$, αν και μόνο αν είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}[x]$.

Την επόμενη πρόταση μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου το οποίο ανήκει στον $\mathbb{Z}[x]$.

Πρόταση 2.2.1 : Έστω $f(x) = \alpha_n x_n + \cdots + \alpha_0 \in \mathbb{Z}[x]$ με $deg(f(x)) = n$. Αν $p = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$, δηλαδή $f(\frac{r}{s}) = 0$. και οι r, s είναι σχετικά πρώτοι οπότε ισχύει για αυτούς $MK\Delta(r, s) = 1$. Τότε $r|\alpha_0$ και $s|\alpha_n$.

<u>Παρατήρηση</u> Πιο συγκεκριμένα, αν το $f(x)$ είναι μονικό και ισχύει $f(y) \neq 0$ για όλους τους $y \in \mathbb{Z}$ οι οποίοι διαιρούν το α_0, τότε το $f(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{Q}$.

Πρόταση 2.2.2 : Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ κανονικό πολυώνυμο. Η ανάλυση του σε γινόμενο αναγώγων παραγόντων στον $\mathbb{Z}[x]$: $f(x) = f_1(x) \dots f_s(x)$ είναι επίσης η ανάλυση του $f(x)$ σε γινόμενο αναγώγων παραγόντων στον $\mathbb{Q}[x]$.

Παρακάτω δίνουμε ένα θεώρημα, γνωστό και ως κριτήριο του Eisenstein, με το οποίο μπορούμε να εξετάζουμε πότε ένα πολυώνυμο είναι ανάγωγο.

Θεώρημα 2.2.3 (Κριτήριο του Eisenstein)

Έστω το $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_0 \in \mathbb{Z}[x]$ και $p \in \mathbb{Z}$ ένας πρώτος αριθμός. Αν ισχύουν τα παρακάτω:

i. Ο p διαιρεί τους συντελεστές του πολυωνύμου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$.
ii. Ο p δεν διαιρεί τον α_n.
iii. Ο p^2 δεν διαιρεί τον α_0.

Τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Η παρακάτω πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το κριτήριο του Eisenstein δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Πρόταση 2.2.3 : Έστω $f(x) \in F[x]$. Ισχύουν τα παρακάτω:

i. Το πολυώνυμο f(x) είναι ανάγωγο στον $F[x]$ αν και μόνο αν το $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ είναι ανάγωγο στον $F[x]$, όπου $\alpha, \beta \in F$.
ii. Το $f(x)$ είναι ανάγωγο στον $F[x]$ αν και μόνο αν το $cf(x)$ είναι ανάγωγο στον $F[x]$, όπου $c \in F\backslash\{0\}$.

2.3 Ομάδες Galois

Προτού δώσουμε τον ορισμό των ομάδων Galois και κάποιες ιδιότητές τους είναι αναγκαίο να μιλήσουμε για τις επεκτάσεις σωμάτων και ιδιαίτερα τις αλγεβρικές επεκτάσεις.

Ορισμός 2.3.1: Το σώμα E λέγεται *επέκταση* του σώματος F και γράφουμε E/F , αν υπάρχει εμφύτευση $i : F \hookrightarrow E$. Το σώμα E λέγεται πεπερασμένη επέκταση του F όταν $\dim_F E = n < \infty$. Διαφορετικά λέμε ότι το E είναι άπειρη επέκταση του F .

Έστω λοιπόν E/F μια επέκταση σωμάτων. Ουσιαστικά με αυτόν τον συμβολισμό εννοούμε ότι το σώμα E έχει μια επιπλέον δομή, αυτή του διανυσματικού χώρου F, η οποία (ενν. η επιπλέον δομή) είναι η πράξη του εξωτερικού πολλαπλασιασμού η οποία συμβολίζεται ως εξής

$$F \times E \to E \ \mu\varepsilon \ (c, a) \mapsto ca.$$

Ιδιαίτερα σημαντικό εργαλείο για να μελετήσουμε αυτή την έννοια είναι τα πολυώνυμα.

Πιο συγκεκριμένα, έστω E/F μια επέκταση σωμάτων και ένα πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$. Τότε το $f(x)$ θα είναι στοιχείο και του σώματος E. Ωστόσο, αν το πολυώνυμο f(x) είναι ανάγωγο στον $F[x]$ αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι ανάγωγο και στον $E[x]$.

Ορισμός 2.3.2 : Έστω E/F επέκταση σωμάτων και $\alpha \in E$. Το α ονομάζεται *αλγεβρικό* πάνω από το F αν υπάρχει $f(x) \in F[x]$ με $f(x) \neq 0$ και το α είναι ρίζα του $f(x), \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ f(\alpha) = 0$. Αν το α δεν είναι αλγεβρικό πάνω από το F, τότε το α θα ονομάζεται *υπερβατικό* πάνω από το F.

Για να καταλάβω αν το α είναι αλγεβρικό ή υπερβατικό πάνω από το F θα μελετήσω τον μικρότερο δακτύλιο που περιέχει το F και το α.

Ορισμός 2.3.3 : Έστω $\frac{E}{F}$ επέκταση σωμάτων και $\alpha \in F$. Ορίζω τα παρακάτω υποσύνολα του E

$$F[\alpha] = \{f(\alpha) : f(x) \in F[x]\},$$

$$F(\alpha) = \{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} : g(\alpha) \neq 0, f(x), g(x) \in F[x]\}.$$

Το σύνολο $F[\alpha]$ είναι υποδακτύλιος του E, άρα το $F[\alpha]$ είναι ακέραια περιοχή και το $F(\alpha)$ σώμα κλασμάτων του $F[\alpha]$. Τότε το σώμα $F(\alpha)$ ονομάζεται *απλή επέκταση* του F.

Παρατηρούμε ότι το $F(\alpha)$ είναι το ελάχιστο υπόσωμα του E πού περιέχει το F. Έτσι για να αποδείξουμε ότι το $E/F(\alpha)$ είναι επέκταση σωμάτων αρκεί να δείξω ότι η E/F

είναι επέκταση σωμάτων και ότι $\alpha \in E$. Τέλος αν $F[\alpha]$ είναι σώμα τότε ισχύει $F[\alpha] = F(\alpha)$.

Πρόταση 2.3.1 : Έστω E/F είναι μια επέκταση σωμάτων και $\alpha \in F$. Το α είναι αλγεβρικό επί του F, αν και μόνο αν $F[\alpha] = F(\alpha)$ ενώ αν το α είναι υπερβατικό επί του F τότε $F[x] \cong F[\alpha]$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\varphi: F[x] \to F[\alpha]$ με $\varphi(h(x)) = h(\alpha)$ είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Έστω ότι το στοιχείο α είναι αλγεβρικό πάνω από το F. Τότε από τον ορισμό του αλγεβρικού στοιχείου υπάρχει $f(x) \in F[x]$ έτσι ώστε $f(\alpha) = 0$ και $ker\varphi \neq 0$. Ο πυρήνας της φ είναι πρώτο ιδεώδες άρα είναι μέγιστο. Συνεπώς ο δακτύλιος $F[\alpha] \cong F[x]/ker\varphi$ είναι σώμα και επειδή $F[\alpha] \subset F(\alpha)$, το $F(\alpha)$ είναι το μικρότερο σώμα πού περιέχει το F και το α. Έτσι, $F[\alpha] = F(\alpha)$.

Αν το α είναι υπερβατικό τότε $ker\varphi = 0$ και $F[\alpha] \cong F[x]$. Συνεπώς ο F δεν είναι σώμα και $\dim_F F[a] = +\infty$.

Ορισμός 2.3.4 : Έστω E/F μια επέκταση σωμάτων. Ο βαθμός του E επί του F ισούται με τη διάσταση του E ως F διανυσματικός χώρος. Συμβολίζεται με $[E: F]$.

<u>Παρατήρηση</u> Έστω L/F επέκταση σωμάτων και E ένα ενδιάμεσο σώμα αυτής της επέκτασης. Αν ισχύει $[E: F] = +\infty$, τότε $[L: F] = +\infty$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της διάστασης του διανυσματικού χώρου $F(\alpha)$, όταν το α είναι αλγεβρικό.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, $F(\alpha) = F[\alpha]$ και $I = \{f(x) \in F[x] = 0: f(\alpha) = 0\}$ είναι πρώτο ιδεώδες. Συνεπώς αν το $h(x)$ είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο το οποίο ανήκει στον $F[x]$ τότε το I θα παράγει το $h(x)$, $I = \langle h(x) \rangle$. Επομένως αν $g(x) \in I$, δηλαδή αν $g(\alpha) = 0$ τότε $g(x) = q(x)h(x)$.

Αν $g(x) \neq 0$ τότε $deg(g(x)) \geq deg(h(x))$. Άρα αν $g(x) \in F[x]$ και $g(\alpha) = 0$, τότε $g(x) = ch(x)$ με $c \in F[x]$.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3.4 : Έστω $\frac{E}{F}$ μια επέκταση σωμάτων και $\alpha \in F$ αλγεβρικό πάνω από το $F[x]$. Το μοναδικό μονικό ανάγωγο πολυώνυμο που ανήκει στον $F[x]$ και έχει ρίζα το α, ονομάζεται το *ανάγωγο πολυώνυμο του α επί του σώματος F*. Συμβολίζεται με $irr_{(F,\alpha)}(x)$. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου λέγονται συζυγή στοιχεία του α.

Παραδείγματα

i. Έστω $\alpha \in E$. Τότε $irr_{(E,\alpha)}(x) = x - \alpha$. Αντίστροφα αν $deg(irr_{(E,\alpha)}(x)) = 1$ τότε $\alpha \in E$.
ii. Έστω $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ μια επέκταση σωμάτων και το στοιχείο $\alpha = \sqrt{3}$. Αφού $\alpha \notin \mathbb{Q}$, συνεπάγεται πως $deg(irr_{(E,\alpha)}(x)) \neq 1$ άρα $deg(irr_{(E,\alpha)}(x)) \geq 2$. Αφού $\sqrt{3}$ είναι ρίζα του $x^2 - 3$, τότε $irr_{(\mathbb{Q},\alpha)}(x) = x^2 - 3$.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη διάσταση του $F(\alpha)$ αν το α είναι αλγεβρικό πάνω από το F.

Θεώρημα 2.3.1 : Έστω E/F μια επέκταση σωμάτων και $\alpha \in F$ αλγεβρικό πάνω από το F και $deg(irr_{(F,\alpha)}(x)) = n$. Το σύνολο $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $F(\alpha)$ και $[F(\alpha): F] = n$.

<u>Παρατήρηση</u> Το α είναι αλγεβρικό επί του F αν και μόνο αν η διάστασή του είναι πεπερασμένη, $[F(\alpha) : F] < +\infty$.

Αφού αναπτύξαμε όλες τις απαιτούμενες έννοιες για την μελέτη των ομάδων Galois θα δώσουμε στη συνέχεια τον ορισμό τους, κάποια σημαντικά θεωρήματα καθώς και κάποια παραδείγματα.

Έστω E/F μια επέκταση σωμάτων. Παρακάτω θα μελετηθούν οι F −αυτομορφισμοί του E, δηλαδή το σύνολο όλων των ισομορφισμών $\varphi: E \to E$ με $\varphi(p) = p$ για κάθε $p \in F$. Επομένως θα δώσουμε παρακάτω τον ορισμός της ομάδας Galois.

Ορισμός 2.3.6 : Η *ομάδα Galois* είναι το σύνολο των αυτομορφισμών του E, $Aut(E)$ πού διατηρούν σταθερά τα στοιχεία του F. Πιο συγκεκριμένα, είναι το σύνολο όλων των ισομορφισμών $\varphi: E \to E$ με $\varphi(c) = c$, για κάθε $c \in F$. Έτσι, συμβολίζω τις ομάδες Galois με $Gal(E/F)$ και έχουμε

$$Gal(E/F) := \{\varphi \in Aut(E) : \varphi(c) = c, \ \forall c \in F\}.$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

i. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $Gal(E/K)$ με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, είναι υποομάδα της ομάδας των αυτομορφισμών του E, $Aut(E)$.
ii. Ισχύει ότι η σύνθεση δύο στοιχείων που ανήκουν στην $Gal(E/F)$ διατηρούν τα στοιχεία του F σταθερά και άρα η σύνθεσή του ανήκει στην $Gal(E/F)$. Δηλαδή
$$\varphi \circ \psi(c) = \varphi(\psi(c)) = \varphi(c) = c.$$
Επομένως, $\varphi \circ \psi \in Gal(E/F)$.
iii. Το αντίστροφο ενός στοιχείου που ανήκει στην $Gal(E/F)$ διατηρεί τα στοιχεία του F σταθερά και επομένως και το αντίστροφο στοιχείο ανήκει στην $Gal(E/F)$. Δηλαδή

$$\varphi^{-1}(c) = \varphi^{-1}(\varphi(c)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(c) = id_F(c) = c.$$

Αν τώρα έχω το $\alpha \in E$ το οποίο είναι αλγεβρικό στοιχείο πάνω από το F και έστω ότι $\sigma \in Gal(E/F)$. Στην επόμενη πρόταση θα δούμε ότι το α και το $\sigma(\alpha)$ έχουν το ίδιο ανάγωγο πολυώνυμο και έτσι αναγκαστικά το $\sigma(\alpha)$ είναι μια από τις ρίζες του $irr_{(F,\alpha)}(x)$. Δηλαδή, το $\sigma(\alpha)$ είναι συζυγές στοιχείο του α.

Πρόταση 2.3.2 : Έστω E/F μια επέκταση σωμάτων, $\alpha \in E$ αλγεβρικό πάνω από το F και $\sigma \in Gal(E/F)$. Τότε $irr_{(F,\alpha)}(x) = irr_{(F,\sigma(\alpha))}(x)$.

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης εκφράζεται από το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.2 : Έστω E/F μια επέκταση σωμάτων και a, b είναι αλγεβρικά πάνω από το F τέτοια ώστε να ισχύει $irr_{(F,\alpha)}(x) = irr_{(F,b)}(x)$. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός σωμάτων $\varphi: F(\alpha) \to F(b)$ έτσι ώστε $\varphi|_F = id_F$ και $\varphi(\alpha) = b$.

Αν $\sigma: F \to F'$ είναι ισομορφισμός σωμάτων, τότε η συνάρτηση

$\hat{\sigma}: F[x] \to F'[x], με \sum a_i x^i \mapsto \sum \sigma(a_i) x^i$ είναι ισομορφισμός. Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε παρακάτω τη γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.3 : Έστω E/F και E'/F' δύο επεκτάσεις σωμάτων και $b \in E, b' \in E'$ αλγεβρικά πάνω από τα F, F' αντίστοιχα και $\sigma: F \to F'$ ισομορφισμός έτσι ώστε $\hat{\sigma}(irr_{(F,b)})(x) = irr_{(F',b')}(x)$. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός σωμάτων $\varphi: F(b) \to F(b')$ έτσι ώστε $\varphi|_F = \sigma \; και \; \varphi(b) = b'$.

Στα παρακάτω παραδείγματα υπολογίζονται οι ομάδες Galois σε διαφορετικές περιπτώσεις. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση id_E ανήκει στην ομάδα $G = Aut_F(E)$, για κάθε επέκταση σωμάτων E/F.

Παραδείγματα

i. Γενικά αν F σώμα, τότε $Gal(F/F) = Aut_F(F) = \{id_F\}$.
ii. Έστω $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Θα υπολογίσω την ομάδα Galois $G = Gal(E/\mathbb{Q})$. Αρχικά παρατηρούμε ότι $irr_{(\mathbb{Q},\sqrt{2})}(x) = x^2 - 2$ και το σώμα E είναι σώμα ανάλυσης του ανάγωγου πολυωνύμου $irr_{(\mathbb{Q},\sqrt{2})}(x)$. Επομένως μια βάση $\mathbb{Q}$ του E είναι το σύνολο $\{1, \sqrt{2}\}$, ενώ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. Έτσι, από την πρόταση αν $\sigma \in G$ τότε $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$.

Έστω τώρα $c + d\sqrt{2}$ ένα τυχαίο σημείο του E, όπου $c, d \in \mathbb{Q}$. Υπάρχει μοναδικός αυτομορφισμός $\sigma \in G$ τέτοιος ώστε $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ και είναι ο ταυτοτικός $\sigma = id_E$, αφού $\sigma(c + d\sqrt{2}) = \sigma(c) + d\sigma(\sqrt{2}) = c + d\sqrt{2}$. Επίσης από το Θεώρημα 2.3.3 έχουμε ισομορφισμό $\tau \in G$ τέτοιος ώστε $\tau(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, αφού $E = \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. Αυτή η ιδιότητα προσδιορίζει πλήρως τον ισομορφισμό, δηλαδή $\tau(c + d\sqrt{2}) = c - d\sqrt{2}$. Συνεπώς $G = \{id_E, \tau\}$ και $G \cong \mathbb{Z}_2$.

2.4 Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Galois

Στην υποενότητα αυτή θα αναπτύξουμε ορισμένες ιδιότητες των ομάδων και θα εξετάσουμε τις επεκτάσεις ισομορφισμών των σωμάτων. Τέλος, θα ορίσουμε τις επεκτάσεις Galois και θα καταλήξουμε στο κύριο κομμάτι αυτής της υποενότητας, στην διατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος της θεωρίας Galois.

Αρχικά, θα διατυπώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα μέσω του οποίου μπορούμε να συνδέσουμε τα στοιχεία της $Gal(E/F)$ με τις μεταθέσεις των ριζών ενός πολυωνύμου $f(x) \in F[x]$, όταν το E είναι το σώμα ανάλυσης του $f(x)$ πάνω από το F.

Ορισμός 2.4.1: Ένα ανάγωγο πολυώνυμο $f(x)$ επί του F θα λέγεται *διαχωρίσιμο* επί του F αν δεν έχει πολλαπλές ρίζες στο σώμα ανάλυσής του.

Θεώρημα 2.4.1 : Έστω $f(x) \in F[x]$ διαχωρίσιμο και ανάγωγο με $degf(x) = n$ και έστω E το σώμα ανάλυσης του $f(x)$. Τότε η ομάδα $Gal(E/F)$ εμφυτεύεται την ομάδα μεταθέσεων S_n.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ ονομάζεται διαχωρίσιμο αν και μόνο αν οι ρίζες του, σε κάποιο σώμα ανάλυσής του $f(x)$ πάνω από το F, είναι απλές ή αν και μόνο αν ο $MK\Delta(f(x), f'(x)) = 1$.

Θεώρημα 2.4.2 : Έστω ο ισομορφισμός σωμάτων $\sigma: F \to F'$ και E/F, E/F' επεκτάσεις σωμάτων με το E να είναι σώμα ανάλυσης του $f(x) \in F[x]$ πάνω από το F και το E' να είναι το σώμα ανάλυσης του $\hat{\sigma}(f(x))$ πάνω από το F'. Τότε υπάρχει ο $\tilde{\sigma}: E \to E'$ με $\tilde{\sigma}|_F = \sigma$.

Αν το $f(x)$ είναι διαχωρίσιμο, τότε υπάρχουν ακριβώς $[E: F]$ τέτοιες επεκτάσεις.

<u>Παρατήρηση</u> Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι το σώμα ανάλυσης ενός πολυωνύμου είναι μοναδικό χρησιμοποιώντας προσέγγιση ισομορφίας.

Ορισμός 2.4.2 : Έστω F σώμα και $f(x) \in F[x]$. Η *ομάδα Galois* του $f(x)$ είναι η ομάδα $Gal(E/F)$, όπου E είναι το σώμα ανάλυσης του $f(x)$ πάνω από το F.

Το επόμενο πόρισμα υπολογίζει την τάξη της ομάδας Galois.

Πόρισμα 2.4.1 : Έστω διαχωρίσιμο πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ και E ένα σώμα ανάλυσης του $f(x)$. Τότε $|Gal(E/F)| = [E: F]$.

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε ενδιάμεσο σώμα B μίας μιας επέκτασης σωμάτων E/F αντιστοιχεί μια υποομάδα Galois

Πρόταση 2.4.1 : Έστω B ενδιάμεσο σώμα της επέκτασης E/F. Τότε η $Gal(E/B)$ είναι υποομάδα της $Gal(E/F)$.

Ορισμός 2.4.2 : Η επέκταση σωμάτων E/F ονομάζεται επέκταση Galois αν το E είναι σώμα ανάλυσης ενός διαχωρίσιμου πολυωνύμου $f(x) \in F[x]$.

<u>Παρατήρηση</u> Αν E/F είναι μια *επέκταση του Galois* και B είναι ενδιάμεσο σώμα τότε E/B είναι μια επέκταση του Galois.

Λήμμα 2.4.1 : Έστω E/F επέκταση σωμάτων η οποία είναι πεπερασμένη και έστω τα διακεκριμένα στοιχεία της $Gal(E/F)$, $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Τέλος, τα στοιχεία $y_1, \dots, y_n \in E$. Αν $y_1\delta_1 + \cdots + y_n\delta_n : E \to E$ είναι η μηδενική συνάρτηση δηλαδή αν ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\delta_i(b) = 0, \forall b \in E$$

τότε $y_i = 0$ για $i = 1, \dots, n$.

Έτσι από το παραπάνω λήμμα συμπεραίνουμε ότι τα στοιχεία της $Gal(E/F)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το σώμα E.

Θεώρημα 2.4.3 (Artin)

Έστω E/F μια πεπερασμένη επέκταση σωμάτων. Τότε $[E: E^G] \geq n$, όπου

$G = Gal(E/F)$ και n η τάξη της G.

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι το σταθερό σώμα της $Gal(E/F)$ είναι το F.

Θεώρημα 2.4.4 : Έστω E/F μια επέκταση του Galois. Τότε $E^{Gal\left(\frac{E}{F}\right)} = F$.

Απόδειξη

Από το Πόρισμα 3.2.4 ισχύει $|Gal(E/F)| = [E: F]$.

Συμβολίζω με $G = Gal(E/F)$ και με n τη τάξη της, $|Gal(E/F)| = n$. Αφού γενικά ισχύει $[E: F] = [E: E^G][E^G : F]$. Για να δείξουμε ότι $E^G = F$ αρκεί να δείξω ότι $[E^G: F] = 1$ ή ισοδύναμα ότι $[E: E^G] = n$. Είναι προφανές ότι $[E: E^G] \leq n$. Από το θεώρημα Artin ισχύει ότι $[E: E^G] \geq n$. Άρα $[E: E^G] = n$ και $E^G = F$.

Διατυπώνουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των πεπερασμένων επεκτάσεων E/F, για τις οποίες ισχύει $E^{Gal\left(\frac{E}{F}\right)} = F$.

<u>Παρατήρηση:</u> Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό του σταθερού σώματος E^X, όπου X τυχαίο σύνολο και $X \subset G$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$E^X = \{\alpha \in E : \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in X\}$$

είναι ενδιάμεσο σώμα της επέκτασης E/F για κάθε υποσύνολο της G. Έτσι προκύπτει η παρακάτω γενική μορφή του θεωρήματος του Artin.

Θεώρημα 2.4.5 : Έστω E/F πεπερασμένη επέκταση και $X \subset Gal\left(\frac{E}{F}\right)$. $Τότε$ $[E : EX] \geq |X|$.

Θεώρημα 2.4.6 : Έστω E/F μια πεπερασμένη επέκταση τέτοια ώστε $E^{Gal\left(\frac{E}{F}\right)} = F$. Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ το οποίο έχει μια ρίζα στο E είναι διαχωρίσιμο κα έχει όλες τις ρίζες του στο E.

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.4.4.

Θεώρημα 2.4.7 : Έστω E/F μια πεπερασμένη επέκταση σωμάτων και $G = Gal(E/F)$. Αν κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ το οποίο έχει μια ρίζα στο E είναι διαχωρίσιμο και όλες του οι ρίζες ανήκουν στο E ,τότε η E/F είναι επέκταση του Galois.

Απόδειξη

Έστω ότι $[E:F] > 1$ και παίρνω ένα στοιχείο $\alpha \in E\backslash F$. Αφού η $E\backslash F$ είναι πεπερασμένη τότε το α είναι αλγεβρικό πάνω από το F.

Αφού το $f(x)$ είναι ανάγωγο το συμβολίζω ως $f(x) = irr_{(F,\alpha)}$.Από τη υπόθεση έχω ότι το $f(x)$ είναι διαχωρίσιμο και έχει όλες τις ρίζες του στο E. Επισυνάπτουμε τις ρίζες του $f(x)$ στο F και θεωρούμε το E_1 ως το σώμα ανάλυσης του $f(x)$.

Αν $E_1 = E$, τότε η E/F είναι επέκταση του Galois. Αλλιώς υπάρχει $\beta \in E\backslash E_1$.

Έστω $g(x) = irr_{(F,\beta)}(x)$. Επισυνάπτοντας στο E_1 τις ρίζες του $g(x)$ παίρνουμε το E_2, το οποίο είναι το σώμα ανάλυσης του $f(x)g(x) \in F[x]$. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο μέχρι να βρούμε ένα σώμα $E_m = E$. Αφού η επέκταση E/F είναι πεπερασμένη ,αυτή η διαδικασία θα ολοκληρωθεί μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Έτσι με βάση τα παραπάνω το παρακάτω θεώρημα παρουσιάζει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες μια επέκταση σωμάτων να είναι επέκταση του Galois.

Θεώρημα 2.4.8 : Έστω E/F μια πεπερασμένη επέκταση σωμάτων και $G = Gal(E/F)$. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

i. Η επέκταση E/F είναι επέκταση σωμάτων
ii. $F = E^G = \{\alpha \in E : \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in G\}$
iii. Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ που έχει μια ρίζα στο E είναι διαχωρίσιμο και έχει όλες τις ρίζες του στο E.

Έστω E/F μια επέκταση του Galois και έστω $\boldsymbol{A}$ το σύνολο όλων των ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης E/F και $\boldsymbol{D}$ το σύνολο των υποομάδων της $Gal(E/F)$. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Galois διατυπώνει τον συσχετισμό που υπάρχει ανάμεσα στο σύνολο $\boldsymbol{A}$ και στο σύνολο $\boldsymbol{D}$.

Θεώρημα 2.4.9 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Galois)

Έστω E/F μια επέκταση του Galois με $G = Gal(E/F)$. Τότε υπάρχει μια $1-1$ και επί συνάρτηση f μεταξύ των στοιχείων του συνόλου **A** των ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης E/F και των στοιχείων του συνόλου $\boldsymbol{D}$ των υποομάδων της G:

$$f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{D}, B \mapsto Gal(E/B).$$

Αντίστροφα, αν Η υποομάδα της G ,τότε η αντιστοιχία

$$\varphi: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{A}, \qquad H \mapsto E^H$$

έχει τις εξής ιδιότητες :

i. $[B:F] = [G: Gal(E/B)]$ $\kappa\alpha\iota$ $[G:H] = [E^H : F]$
ii. $E^{Gal\left(\frac{E}{B}\right)} = B$ $\kappa\alpha\iota$ $Gal(E/E^H) = H$
iii. B/F είναι επέκταση του Galois αν και μόνο αν $Gal(E/B)$ είναι υποομάδα της G.

Πόρισμα 2.4.2 : Έστω ότι E/F μια επέκταση του Galois. Η επέκταση έχει πεπερασμένο αριθμό ενδιάμεσων σωμάτων.

2.5 Θεώρημα Galois

Αρχικά θα δώσουμε έναν ακριβή ορισμό της έκφρασης «επιλύεται με ριζικά» ο οποίος προκύπτει από την μελέτη των αλγεβρικών επεκτάσεων σωμάτων που αναφέραμε παραπάνω.

Ορισμός 2.5.1 : Έστω $F \subset \mathbb{C}$ είναι ένα σώμα και z ένα στοιχείο του $\mathbb{C}$ το οποίο είναι αλγεβρικό πάνω από το F. Θα λέμε ότι το z *εκφράζεται με ριζικά* αν ανήκει σε ένα σώμα Ε τέτοιο ώστε να υπάρχει μια ακολουθία σωμάτων

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset F_s = E \quad (2.5.1)$$

Για κάποιον φυσικό αριθμό s , όπου

$$F_{i+1} = F_i(\sqrt[n_i]{z_i})$$

Για κάποιο $z_i \in F_i$ και n_i φυσικό αριθμό $0 \leq i \leq s-1$. Με $\sqrt[n_i]{z_i}$ συμβολίζουμε μια ρίζα του πολυωνύμου

$$x^{n_i} - z_i \in F_i[x].$$

Η ακολουθία που απεικονίζεται στη σχέση (2.5.1) ονομάζεται *ριζική ακολουθία* σωμάτων και η επέκταση σωμάτων E/F ονομάζεται *ριζική επέκταση*. Ένα πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ ονομάζεται επιλύσιμο με ριζικά πάνω από το F, αν κάθε ρίζα του $f(x)$ εκφράζεται με ριζικά, δηλαδή αν υπάρχει μια ριζική επέκταση που περιέχει το σώμα ανάλυσης του $f(x)$ πάνω από το F.

Παράδειγμα

Έστω $\alpha = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{2}}$ και $b = 1 + \sqrt{2}$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq F_i(\sqrt{b}).$$

Η ακολουθία αυτή είναι ριζική. Πράγματι, έστω $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *και* $F_2 = F_1(\sqrt{b})$. Τότε,

i. Το $\sqrt{2}$ είναι ρίζα του $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$
ii. Το $\sqrt{b}$ είναι ρίζα του $x^2 - (1+\sqrt{2}) \in F_1[x]$
iii. Το $\alpha \in F_2$

Άρα, το α εκφράζεται με ριζικά πάνω από το $\mathbb{Q}$.

Το επόμενο θεώρημα του Galois δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το πολυώνυμο $f(x)$ είναι επιλύσιμο με ριζικά .

Θεώρημα 2.5.1 (Θεώρημα του Galois)

Έστω $F \subset \mathbb{C}$ ένα σώμα, $f(x) \in F[x]$ με σώμα ανάλυσης το L. Το πολυώνυμο $f(x)$ είναι επιλύσιμο με ριζικά πάνω από το $\mathbb{Q}$ αν και μόνο αν η ομάδα Galois $Gal(L/F)$ είναι επιλύσιμη .

Απόδειξη

Έστω $G = Gal(L/F)$ και έστω ότι το $f(x)$ είναι πολυώνυμο επιλύσιμο με ριζικά. Τότε υπάρχει μια ριζική επέκταση E/F, τέτοια ώστε το σώμα ανάλυσης του $f(x)$ να περιέχεται στο E. Εφόσον η επέκταση E/F είναι ριζική υπάρχει η ριζική ακολουθία

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_s = E \ (1), \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o\nu\ s \in \mathbb{N}.$$

Για $1 \leq i \leq s, F_i = F_{i-1}(\sqrt[n_i]{\alpha_i})$, τα $\alpha_i \in F_{i-1}$ και οι $n_i \in \mathbb{N}$. Ωστόσο η επέκταση E/F μπορεί να μην είναι επέκταση του Galois. Έτσι, θα θεωρήσουμε μια νέα ριζική ακολουθία που καταλήγει σε επέκταση του Galois.

Έστω λοιπόν

$$n = E\kappa\Pi(n_1, \dots, n_s)\ \kappa\alpha\iota\ \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Ακόμη, θέτουμε $F_i = F_i(\omega)$, για $0 \leq i \leq s$ και έστω η παρακάτω ακολουθία σωμάτων, με μήκος κατά ένα μεγαλύτερο της ακολουθίας (1):

$$F \subset F_0' \subset F_1' \subset \cdots . \subset F_s' \ (2)$$

Επειδή ισχύουν τα παρακάτω:

i. ω είναι ρίζα του $x^n - 1 \in F[x]$
ii. $F_i' = F_i'(\sqrt[n_i]{\alpha_i})$ και $\alpha_i \in F_i' - 1\ \gamma\iota\alpha\ 1 \leq i \leq s$,
Έπεται ότι η (2) είναι ριζική. Παρατηρούμε, τώρα, ότι F_0'/F είναι επέκταση του Galois ως σώμα ανάλυσης του διαχωρίσιμου $x^n - 1 \in F[x]$. Επίσης, η επέκταση $F_i'/\ F_i' - 1$ είναι επέκταση του Galois για $0 \leq i \leq s$, ως σώμα ανάλυσης του πολυωνύμου $x^{n_i} - \alpha_i \in F_i' - 1[x]$.

Έστω, λοιπόν, $E' = F_s', V = Gal(E'/F)$ και $V_i = Gal(E'/F_i'), \gamma\iota\alpha\ 0 \leq i \leq s$. Τότε V_{i+1} είναι κανονική υποομάδα του V_i και $V_i/V_{i+1} \mapsto Gal(F_{i+1}'/F_i')$, για $0 \leq i \leq s$. Θεωρούμε την κανονική σειρά υποομάδων της V:

$$V \leq V_0 \leq \cdots \leq V_{s-1} \leq V_s = \{e\} \ (3)$$

Παρατηρούμε ότι για $0 \leq i \leq s$, η ομάδα πηλίκο V_i/V_{i+1} είναι αβελιανή, ως υποομάδα της κυκλικής ομάδας $Gal(F_i'(\sqrt[n_i]{\alpha_i}\ /F_i')$. Επίσης,

$$V/V_0 \cong Gal(F_0'/F)\ = Gal(F(\omega)/F)$$

είναι αβελιανή ομάδα. Επομένως η κανονική σειρά (3) είναι επιλύσιμη και άρα η ομάδα V είναι επιλύσιμη. Αφού

$$G = Gal(L/F) \cong Gal(E'/F)/Gal(E'/L),$$

Έπεται ότι η G είναι επιλύσιμη ομάδα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $G = Gal(L/F)$ είναι επιλύσιμη. Θεωρούμε μια πρωταρχική m −ρίζα της μονάδας ω, όπου $m = |G|$. Παρατηρούμε ότι , αφού $F \subset L$, το μικρότερο σώμα που περιέχει τα σώματα $L\ και\ F(\omega)$ ταυτόχρονα, δηλαδή το $LF(\omega)$, είναι το σώμα $L(\omega)$.

Επίσης, η επέκταση $L(\omega)/L$ είναι επέκταση του Galois, αφού είναι σώμα ανάλυσης του διαχωρίσιμου πολυωνύμου $x^m - 1 \in L[x]$. Επίσης, $L(\omega)/F(\omega)$ είναι επέκταση του Galois , αφού είναι σώμα ανάλυσης του $f(x) \in F(\omega)$. Άρα από γνωστό θεώρημα έπεται ότι $Gal(L(\omega)/F(\omega)) \cong Gal(L/(F(\omega) \cap L))$.

Έστω $H = Gal(L(\omega)/F(\omega))$. Από τον παραπάνω ισομορφισμό συμπεραίνουμε ότι η H είναι ισόμορφη με υποομάδα της G. Επειδή η ομάδα G είναι επιλύσιμη , έπεται ότι και η H επιλύσιμη και υπάρχει μια κανονική σειρά από υποομάδες της H, με κυκλικούς παράγοντες τάξης πρώτου αριθμού :

$$H = H_0 < H_1 < \cdots < H_r = \{e\},$$

όπου $|H_i/H_{i+1}| = p_i$, για $p_i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r$. Παρατηρούμε ότι ο p_i διαιρεί την τάξη της H, για $0 \leq i \leq r$, όπως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή στο r και με το Θεώρημα του Lagrange. Επομένως, ο p_i διαιρεί την τάξη της G, δηλαδή $p_i | m, για\ 0 \leq i \leq r$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το σώμα

$$E_i = L(\omega)H_i, 0 \leq i \leq r.$$

Αφού H_i είναι υποομάδα της $Gal(L(\omega)/F(\omega))$, το σώμα E_i, είναι ενδιάμεσο σώμα της επέκτασης $L(\omega)/F(\omega)$ και έτσι προκύπτει η παρακάτω ακολουθία σωμάτων

$$F(\omega) = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = L(\omega). (4)$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii), παρατηρούμε ότι

$$H_i = Gal\ (L(\omega)/E_i), για\ 0 \leq i \leq r.$$

Αφού ω είναι πρωταρχική m −ρίζα της μονάδας και ανήκει σε κάθε E_i και $p_i|m$, για $0 \leq i \leq r$, είναι φανερό ότι το E_i είναι επέκταση Galois ,αφού η H_i είναι υποομάδα της H_{i+1}, $1 \leq i \leq r$, ενώ $Gal(E_i/E_{i-1}) \cong H_{i-1}/H_i \cong (\mathbb{Z}_{p_i}, +)$.

Αφού το ω είναι πρωταρχική m −ρίζα της μονάδας και ανήκει σε κάθε E_i και $p_i | m$, για $0 \leq i \leq r$, είναι φανερό ότι το E_i περιέχει όλες τις ρίζες p_i της μονάδας. Αφού E_i/E_{i-1} είναι κυκλική για $0 \leq i \leq r$. Από γνωστό Θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχει $a_i \in E_{i-1}$ τέτοιο ώστε $E_i = E_{i-1}(\sqrt[n_i]{\alpha_i})$.

Άρα η ακολουθία σωμάτων

$$F \subset F(\omega) = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = L(\omega)$$

Είναι μια ριζική ακολουθία, δηλαδή η $L(\omega)/F$ είναι μια ριζική επέκταση , η οποία περιέχει το σώμα ανάλυσης L του $f(x) \in F[x]$. Άρα το $f(x)$ είναι επιλύσιμο με ριζικά.

Κεφάλαιο 3. Εισαγωγικές έννοιες στις Διαφορικές Εξισώσεις

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο διατυπώνει κάποιες βασικές έννοιες στο κομμάτι των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, τις οποίες για συντομία θα ονομάζουμε Διαφορικές Εξισώσεις. Οι αναφορές μας για αυτό το κεφάλαιο είναι τα βιβλία [4] , [8].

3.1 Βασικές έννοιες των Διαφορικών Εξισώσεων

Το βασικό πρόβλημα

Η γενικότερη μορφή που μπορεί να πάρει μια Διαφορική Εξίσωση είναι:

$$F\left(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \text{όπου } y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, n \geq 1. \quad (4.1.1)$$

Όπου η συνάρτηση F είναι γνωστή, η συνάρτηση y είναι άγνωστη με ανεξάρτητη μεταβλητή x, η $y(x)$ μπορεί να είναι είτε βαθμωτή είτε διανυσματική συνάρτηση.

Το βασικό πρόβλημα μιας διαφορικής εξίσωσης (ΔΕ) , είναι η εύρεση μιας λύσης , η οποία στην περίπτωση της (4.1.1), αποτελεί μια n φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση φ, ορισμένη σε κάποιο διάστημα I, η οποία ικανοποιεί την

$$F\left(x, \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}\right) = 0$$

Ορισμός 3.1.1 : Οι *Εξισώσεις άμεσης ή λυμένης μορφής* είναι οι ΔΕ των οποίων η παράγωγος της υψηλότερης τάξης της ζητούμενης συνάρτησης η οποία εμφανίζεται στην εξίσωση, δίδεται συναρτήσει των παραγώγων χαμηλότερης τάξης και, ενδεχομένως , της μεταβλητής x.

Παρακάτω, θα παραθέσουμε κάποιους σημαντικούς ορισμούς που έχουν να κάνουν με κάποια αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά των ΔΕ.

Έστω η ΔΕ: $y' = f(x, y)$, όπου:

Η μεταβλητή x είναι μια πραγματική μεταβλητή, η y συμβολίζει τη ζητούμενη συνάρτηση που ικανοποιεί τη ΔΕ ,η οποία μπορεί να είναι βαθμωτή ή διανυσματική. Αντίστοιχα και η f,η οποία ονομάζεται ροή της ΔΕ ή συνάρτηση ροής ,μπορεί επίσης να είναι βαθμωτή ή διανυσματική.

Ορισμός 3.1.2 : Μια ΔΕ καλείται *βαθμωτή*, όταν η ζητούμενη συνάρτηση y και η συνάρτηση ροής f, παίρνουν πραγματικές τιμές.

Ορισμός 3.1.3 : Τάξη μιας ΔΕ ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγισης της άγνωστης συνάρτησης που εμπεριέχεται στη ΔΕ.

Παράδειγμα

Η ΔΕ $y''(x) = 2xy^2(x)$ είναι δεύτερης τάξης διότι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγισης της y είναι η δεύτερη.

Ορισμός 3.1.4 : Η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η $y^{(n)}(x)$ ονομάζεται *βαθμός* της ΔΕ.

Ορισμός 3.1.5 : Η F που περιγράφεται από την σχέση (4.1.1) ονομάζεται *γραμμική ΔΕ* αν είναι γραμμική συνάρτηση ως προς την $y(x)$ και τις παραγώγους της .Δηλαδή η μορφή μιας ΔΕ n −οστής τάξης θα είναι:

$$\alpha_n(x)y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_1(x)y^{(1)}(x) + \alpha_0(x)y(x) = g(x) \tag{4.1.2}$$

όπου $\alpha_i(x)\ \mu\varepsilon\ i = 1,2,\dots,n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $I \subset \mathbb{R}\ \alpha_n(x) \neq 0$ και λέγονται συντελεστές της γραμμικής ΔΕ.

<u>Παρατηρήσεις πάνω στη σχέση (4.1.2)</u>

i. Αν όλοι οι συντελεστές α_n της σχέσης (4.1.2) είναι σταθεροί τότε η ΔΕ ονομάζεται *γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές*, ενώ αν και ένας τουλάχιστον είναι συνάρτηση του x, δηλαδή είναι μη σταθερός τότε η σχέση η ΔΕ ονομάζεται *γραμμική ΔΕ με μη σταθερούς συντελεστές*.
ii. Αν $g(x) = 0$ τότε η (4.1.2) ονομάζεται *ομογενής γραμμική ΔΕ*, ενώ αν $g(x) \neq 0$ τότε η (4.1.2) ονομάζεται *μη ομογενής γραμμική ΔΕ*.

Ορισμός 3.1.6 : Μια ΔΕ ονομάζεται *αυτόνομη*, αν η f δεν εξαρτάται από την μεταβλητή x.

Παράδειγμα

Οι ΔΕ $y' = f(y),\ y'' = g(y, y'),\ y''' = h(y, y', y'')$ είναι αυτόνομες εξισώσεις διότι σε κάθε περίπτωση η f δεν εξαρτάται από την x.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των αυτόνομων ΔΕ είναι η εξής: Αν η συνάρτηση $\varphi = \varphi(x)$ ικανοποιεί την $y' = f(y)$, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\psi(x) = \varphi(x + \chi),\ \forall\chi \in \mathbb{R}$.

Μια ΔΕ έχει , εν γένει, άπειρες το πλήθος λύσεις. Για παράδειγμα η ΔΕ

$$y' = y$$

έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις $y(x) = ce^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση

$$y'' = y$$

έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Στα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι οι λύσεις των ΔΕ μπορούν να εκφραστούν μέσω κάποιων παραστάσεων οι οποίες περιλαμβάνουν παραμέτρους , ικανές να εκφράσουν όλες τις λύσεις τους. Αυτές οι παραστάσεις ονομάζονται γενικές λύσεις .Πιο αναλυτικά δίνουμε παρακάτω τον ορισμό της γενικής λύσης μιας ΔΕ

Ορισμός 3.1.7 : Έστω η ΔΕ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Μια παράσταση της μορφής $y = \varphi(x, c)$ καλείται *γενική λύση* ή *γενικό ολοκλήρωμα* της ΔΕ. Πιο γενικά, η $\Phi(x, y, c) = 0$, όπου $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ περιλαμβάνει όλες τις λύσεις της ΔΕ για διάφορες τιμές του $c \in \Omega \subset \mathbb{R}$, αν η y είναι n −φορές διαφορίσιμη και

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ x \in (\alpha, b)$$

<u>Παρατηρήσεις πάνω στον ορισμό της γενικής λύσης μια ΔΕ</u>

i. Σε αντίθεση με τον ορισμό της γενικής λύσης , η ειδική λύση ή ειδικό ολοκλήρωμα αποτελεί λύση που προκύπτει από συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου c .
ii. Το γράφημα της λύσης μιας ΔΕ ονομάζεται καμπύλη λύσης. Γενικότερα, η καμπύλη C καλείται ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ , αν κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ της οποίας το γράφημα είναι τμήμα της C είναι λύση της ΔΕ.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι αν c_1 και c_2 είναι σταθερές , τότε

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 2x - 4 \quad (4.1.3)$$

είναι λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + y = 2x \quad (4.1.4)$$

στο $(-\infty, \infty)$.

Λύση

Παραγωγίζοντας την (4.1.3) δύο φορές

$$y' = -(c_1 + c_2)e^{-x} + c_2 e^{-x} + 2\ \kappa\alpha\iota\ y'' = (c_1 + c_2)e^{-x} - 2c_2 e^{-x},$$

και αντικαθιστώντας στην (4.1.4) αποδεικνύουμε ότι είναι λύση για όλες τις τιμές του x.

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι οι ΔΕ έχουν άπειρο το πλήθος λύσεις. Η μοναδικότητα των λύσεων εξασφαλίζεται με την προσθήκη κάποιων επιπλέον συνθηκών. Μια τέτοια κατηγορία συνθηκών είναι οι αρχικές συνθήκες. Παρακάτω δίνουμε έναν ορισμό της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών (ΠΑΤ).

Έστω το ΠΑΤ $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (4.1.5). Δίνω τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.8 : Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου D ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(x_0, y_0) \in D$. Η συνάρτηση φ ονομάζεται λύση του ΠΑΤ, αν ορίζεται επί του ανοικτού διαστήματος I, επί του οποίου είναι συνεχώς διαφορίσιμη και εντός του οποίου βρίσκεται η αρχική τιμή x_0 και ικανοποιούνται ταυτόχρονα τα ακόλουθα:

i. Για κάθε $x \in I$ ισχύει ότι $(x, \varphi(x)) \in D$,
ii. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ για κάθε $x \in I$ και
iii. $\varphi(x_0) = y_0$, δηλ. η φ είναι λύσης της ΔΕ και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

3.2 Ολοκληρωτικές καμπύλες και διανυσματικό πεδίο

Στην υποενότητα αυτή, θα διατυπώσουμε ορισμένα γεωμετρικά στοιχεία των λύσεων μιας ΔΕ. Αρχικά, παραθέτουμε ένα παράδειγμα που θα εισάγει τις απαιτούμενες έννοιες.

Παράδειγμα

Αν α είναι μια σταθερά με $\alpha > 0$, ο κύκλος

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad (4.2.1)$$

είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη για την ΔΕ

$$y' = -\, xy \; y' = -\frac{x}{y} \quad (4.2.2)$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2} \;\; \kappa\alpha\iota \; y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

είναι λύσεις της ΔΕ (4.2.1) στο $(-\alpha, \alpha)$.

Το γράφημα καθεμίας από τις παραπάνω συναρτήσεις βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων. Όμως η (4.2.1) δεν είναι καμπύλη λύση της (4.2.2), γιατί καμία καμπύλη της οικογένειας (4.2.1) δεν αποτελεί συνάρτηση.

Έτσι με βάση το παραπάνω παράδειγμα οι καμπύλες αυτές θα ονομάζονται ολοκληρωτικές καμπύλες και θα αποτελούν τη γενίκευση των λύσεων ΔΕ, δεδομένου ότι οι λύσεις πρέπει υποχρεωτικά να είναι συναρτήσεις. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες δεν μπορούν να εκφρασθούν πάντοτε παραμετρικά θεωρώντας παράμετρο το x ή το y. Όμως θα ήταν εφικτό να εκφρασθούν παραμετρικά με τη χρήση μια τρίτης μεταβλητής, έτσι ώστε να αποτελούν μια κανονική καμπύλη.

Ορισμός 3.2.1 : Έστω μια καμπύλη $r: I \to \mathbb{R}^n$, όπου I: ανοικτό διάστημα. Η καμπύλη r θα ονομάζεται **κανονική** αν ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η r είναι διαφορίσιμη σε όλο το I
ii. $r(s) \neq 0, \forall s \in I$.

Παράδειγμα

Έστω η ΔΕ $yy' + x = 0$. Θα εκφράσουμε παραμετρικά τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ με μια παράμετρο s:

$$x = x(s), y = y(s)$$

θα έχουμε $0 = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2) = x\dot{x} + y\dot{y}$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη που έχει εκφρασθεί παραμετρικά από το s , έχει την ιδιότητα ότι , σε κάθε της σημείο (x_0, y_0), το εφαπτόμενο της διάνυσμα στο σημείο αυτό είναι κάθετο στο (x_0, y_0). Παρατηρούμε ότι αν η $y = y(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ

$$y' = f(x, y) \quad (4.2.3)$$

Τότε αφού το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $(x_0, y(x_0))$ του γραφήματος της είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $(1, y'(x_0))$, μπορεί η σχέση (4.2.3) να γραφεί ως σχέση καθετότητας διανυσμάτων

$$0 = y' - f(x, y) = (1, y') \cdot (-f(x, y), 1).$$

Η λύση της (4.2.3) γεωμετρικά αναπαριστά κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι κάθετο στο διάνυσμα $(-f(x, y), 1)$ ή ισοδύναμα, εφαπτόμενο διάνυσμα $(1, f(x, y))$, σε κάθε σημείο (x, y) από το οποίο διέρχεται.

<u>Παρατήρηση</u> Η εξίσωση $yy' + x = 0$ μπορεί εναλλακτικά να συμβολιστεί και ως $xdx + ydy = 0$ ή $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$.

Οι παραπάνω συμβολισμοί μας επιτρέπουν να βρίσκουμε λύσεις και από καμπύλες, οι οποίες δεν αποτελούν γραφήματα συναρτήσεων. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ο κύκλος. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη $x = rcoss, y = rsins, s \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί την σχέση $xdx + ydy = 0$, παρόλο που δεν αποτελεί γράφημα συνάρτησης.

Ωστόσο, αν η καμπύλη $x = X(s), y = Y(s), s \in I$ ικανοποιεί την εξίσωση

$M(x, y)\,\dot{x} + N(x, y)\,\dot{y} = 0$ και $\dot{X}(s) \neq 0$, για όλα τα $s \in K \subset I$.

Τότε η καμπύλη $(X(s), Y(s))$, $s \in K$, μπορεί να εκφρασθεί παραμετρικά από το x.

Ορισμός 3.2.2 : Γενικά, θεωρούμε την ΔΕ : $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, όπου M, N: συνεχείς συναρτήσεις σε ανοικτό χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε επίσης, ότι

$$(M(x, y) \cdot N(x, y)) \neq 0, \forall (x, y) \in D.$$

Μια κανονική καμπύλη $\zeta(s) = (X(s), Y(s))$ με $s \in I \subset \mathbb{R}$, ονομάζεται *ολοκληρωτική καμπύλη* της εξίσωσης $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, αν για κάθε $s \in I$,

$(M(\zeta(s)), N(\zeta(s)) \cdot \dot{\zeta}(s) = 0$, ή ισοδύναμα $M(\zeta(s))\frac{dX}{ds} + N(\zeta(s))\frac{dY}{ds} = 0$.

<u>Παρατήρηση</u>**:** Το διάνυσμα $\boldsymbol{V}(\zeta(s)) = (M(\zeta(s)), N(\zeta(s)))$, είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο $\zeta(s) = (X(s), Y(s))$.

Ορισμός 3.2.3 : Ένα *διανυσματικό πεδίο* στον $\mathbb{R}^2$ αποτελείται από μια βαθμωτή ΔΕ πρώτης τάξης η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση που απεικονίζει τα σημεία (x, y) του επιπέδου σε διανύσματα $(1, f(x, y))$.

Η λύση θα είναι υπό αυτήν την έννοια, μια καμπύλη, η οποία σε κάθε σημείο από το οποίο διέρχεται, εφάπτεται του διανύσματος στο σημείο εκείνο.

3.3 Διαφορικές εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Γραμμικές Διαφορικές πρώτης τάξης

Ορισμός 3.3.1 : Μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ) πρώτης τάξης καλείται *γραμμική*, αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (4.3.1)$$

<u>Παρατηρήσεις αναφορικά με τον παραπάνω ορισμό:</u>

i. Θα λέμε ότι η ΔΕ (4.3.1) είναι ομογενής , αν $f \equiv 0$. Διαφορετικά, θα καλείται μη ομογενής ΔΕ .
ii. Η $y \equiv 0$ είναι μια προφανής λύση της ΔΕ $y' + p(x)y = 0$. Αυτή η λύση θα ονομάζεται τετριμμένη. Κάθε άλλη μη μηδενική λύση της παραπάνω ΔΕ θα ονομάζεται μη τετριμμένη.

Παρακάτω θα δούμε πως ορίζεται η γενική λύση μιας γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης:

Ορισμός 3.3.2 : Έστω η γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης που έχει τη μορφή της (4.3.1). Εάν οι p και f είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα (α, b) , τότε υπάρχει ένας μοναδικός τύπος $y = y(x, c)$ που περιέχει το x και τη σταθερά c, ο οποίος καλείται γενική λύση της (4.3.1) και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. Για κάθε τιμή της σταθεράς c, η συνάρτηση του x είναι μια λύση της (4.3.1) στο διάστημα (α, b)
ii. Αν y είναι μια λύση της (4.3.1) στο (α, b) τότε η y μπορεί να προκύψει από τον τύπο με κατάλληλη επιλογή του c.

<u>Παρατήρηση:</u> Η ΔΕ της μορφής:

$$P_0(x)\, y' + P_1(x)\, y = F(x) \quad (4.3.2)$$

Έχει μια γενική λύση στο (α, b) όπου οι P_0 , P_1 και F είναι συνεχείς. Αν P_0 δεν έχει ρίζες, δηλ. $P_0 \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε την (4.3.2) στη μορφή της (4.3.1) θεωρώντας $p = P_1/P_0 \quad και \quad f = F/P_0$ οι οποίες είναι συνεχείς στο (α, b).

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να βρούμε την γενική λύση μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης.

Θεώρημα 3.3.1 : Αν p είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στο $(\alpha\ , b)$, τότε η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ

$$y' + p(x)y = 0 \quad (4.3.3)$$

στο (α, b) είναι

$$y = ce^{-P(x)}, \qquad \text{όπου } P(x) = \int p(x)dx$$

με $P'(x) = p(x),\ \alpha < x < b.$

Θα προχωρήσουμε αναπτύσσοντας τη μεθοδολογία επίλυσης μιας μη ομογενείς γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης.

Έστω η μη ομογενή ΔΕ $y' + p(x)y = f(x)$ (4.3.4).

Θα βρούμε τις λύσεις της (4.3.4) στη μορφή $y = uy_1$, όπου y_1 είναι μια μη τετριμμένη λύση της ομογενούς ΔΕ και στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το u. Η μέθοδος αυτή που αρχικά προσπαθεί να επιλύσει την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ της (4.3.4) ονομάζεται μεταβολή των σταθερών .

Στη συνέχεια παραγωγίζω τον τύπο που εκφράζει τις λύσεις της ΔΕ (4.3.4). Δηλαδή,

$$\text{Αν } y = uy_1, \text{ τότε } y' = u'y_1 + uy_1'.$$

Έπειτα ,αντικαθιστούμε τις εκφράσεις για y και y΄ σχέση (4.3.4) και έχουμε:

$$u'y_1 + u(y_1' + p(x)y_1) = f(x),$$

η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$u'y_1 = f(x) \text{ (4.3.5)}$$

Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $y1$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα όπου η p είναι συνεχής. Άρα μπορούμε να διαιρέσουμε την (4.3.5) με το $y1$ και συνεπώς θα προκύψει η σχέση $u' = \frac{f(x)}{y_1(x)}$. Τέλος ολοκληρώνουμε αυτή τη σχέση (εισάγοντας μια σταθερά ολοκλήρωσης) και πολλαπλασιάζουμε με y_1. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η γενική λύση της (4.3.4).

Θεώρημα 3.3.2 ύπαρξης και μοναδικότητας: Έστω οι p,f είναι συνεχείς συναρτήσεις στο (α, b) και έστω y_1 μια τυχαία μη τετριμμένη λύση της ομογενούς ΔΕ της μορφής

$$y' + p(x)y = 0 \ \sigma\tau o\ (\alpha, b).$$

Τότε:

i. Η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ στο (α, b) δίνεται από τον τύπο:
$$y = y_1(x) + \left(c + \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx\right)$$

ii. Αν x_0 τυχαίο σημείο του διαστήματος $(\alpha\ , b)$ και y_0 είναι ένας τυχαίος αριθμός ο οποίος ανήκει στους πραγματικούς, τότε το ΠΑΤ
$$y' + p(x)y = f(x), y(x_0) = y_0$$
έχει μοναδική λύση την

$$y = y_1(x)[\frac{y_0}{y_1(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)} dt].$$

στο (α, b).

Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων εξισώσεων

Ορισμός 3.3.3 : Μια ΔΕ πρώτης τάξης ονομάζεται *διαχωρίσιμη* ή *χωριζομένων μεταβλητών* αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$h(y)y' = g(x). \ (4.3.6)$$

Έτσι, μια διαχωρίσιμη ΔΕ αυτής της μορφής καλείται χωριζομένων μεταβλητών .

Για να επιλύσουμε την (4.3.6) θεωρώ ότι y είναι μια λύση της. Έστω $G(x)$ και $H(y)$ είναι οι παράγουσες των $g(x)$, αντίστοιχα :

$$H'(y) = h(y) \ \kappa\alpha\iota \ G'(x) = g(x) \ .$$

Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας η (4.3.6) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{d}{dx} H(y(x)) = \frac{d}{dx} G(x).$$

Δηλαδή, $H(y(x)) = G(x) + c$.

Το επόμενο θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλύσουμε μια ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή.

Θεώρημα 3.3.3 : Έστω ότι η $g = g(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο (α, b) και $h = h(y)$ είναι συνεχής στο (c, d). Έστω G μια παράγουσα της g στο (α, b) και x_0 ένα τυχαίο σημείο που ανήκει στο (α, b) και αντίστοιχα $y0$ τυχαίο σημείο που ανήκει στο (c, d), τέτοιο ώστε $h(y_0) \neq 0$. Τότε ορίζουμε

$$c = H(y_0) - G(x_0) \ (4.3.7)$$

Έτσι υπάρχει μια συνάρτηση $y = y(x)$ η οποία ορίζεται στο τυχαίο διάστημα (α_1, b_1) με $\alpha \leq \alpha_1 \leq x_0 < b_1 \leq b$, τέτοιο ώστε $y(x_0) = y_0$ και $H(y) = G(x) + c$ (4.3.8) για $\alpha_1 < x < b_1$. Άρα y είναι μια λύση του ΠΑΤ

$$h(y)y' = g(x), y(x_0) = x_0 \ (4.3.9)$$

Η (4.3.8) με c μια τυχαία σταθερά ονομάζεται πεπλεγμένη λύση της $h(y)y' = g(x)$. Επίσης οι καμπύλες που ορίζονται από την (4.3.8) είναι ολοκληρωτικές καμπύλες της $h(y)y' = g(x)$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

i. Αν c ικανοποιεί την (4.3.7), θα λέμε ότι η (4.3.8) είναι πεπλεγμένη λύση του παραπάνω ΠΑΤ (4.3.9)

ii. Για κάποιες τιμές του c μπορεί να μην υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις y που να ικανοποιούν την σχέση (4.3.8)

iii. Είναι προφανές ότι η συνάρτηση y στην σχέση (4.3.8) είναι μια λύση της $h(y)y' = g(x)$.

<u>Παρατήρηση</u> Μια ΔΕ της μορφής $y' = g(x)p(y)$ είναι χωριζομένων μεταβλητών αν τη φέρουμε στην μορφή $\frac{1}{p(y)}y' = g(x)$.

Ωστόσο, η διαίρεση με $p(y)$ δεν επιτρέπεται αν το $p(y) = 0$ για κάποια y.

Μη γραμμικές ΔΕ Πρώτης Τάξης

Σε αυτή την κατηγορία ΔΕ θα μελετήσουμε ορισμένες ειδικές υποκατηγορίες της οι οποίες αν μετασχηματιστούν κατάλληλα μπορούν να μετατραπούν σε γραμμικές ΔΕ και να επιλυθούν με τον τρόπο που παρουσιάσαμε προηγουμένως.

i. <u>Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli</u>

Η ΔΕ Bernoulli έχουν την μορφή:

$$y' + p(x)y = f(x)y^i\,, \qquad i \in \mathbb{R}, i \neq 0,1 \ (4.3.10)$$

Αν y_1 είναι μια μη τετριμμένη λύση της (4.3.3), αντικαθιστώντας την $y = uy_1$ στην (4.3.10) παρατηρούμε ότι η ΔΕ Bernoulli μετατρέπεται σε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

Πιο συγκεκριμένα :

$$u'y_1(x) = f(x)\big(y_1(x)\big)^i u^i \text{ ή } \frac{u'}{u^{\mathrm{i}}} = f(x)\big(y_1(x)\big)^{i-1},$$

όπου $y_1' + p(x)y_1 = 0$.

ii. <u>Άλλες μη γραμμικές ΔΕ που μετασχηματίζονται σε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών</u>

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ικανή συνθήκη με την οποία μια μη γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης $y' = f(x, y)$ (4.3.11), μπορεί να μετατραπεί σε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα,

Αν αντικαταστήσω την $y = uy_1$ στην (4.3.11) έχουμε

$$u'y_1(x) = f(x, uy_1(x)) - uy_1'(x) \ (4.3.12).$$

Αν $f(x, uy_1(x)) = q(u)y_1'(x)$ για κάποια συνάρτηση q, τότε η (4.3.12) γίνεται

$u'y_1(x) = (q(u) - u)y_1'(x)$, (4.3.13), η οποία είναι διαχωρίσιμη.

iii. <u>Διαφορικές Εξισώσεις Ricatti</u>

Η γενική μορφή μιας ΔΕ Ricatti είναι $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y_2$ (4.3.14), με P, Q, R συνεχείς σε κάποιο ανοικτό διάστημα.

Έστω y_1 μια γνωστή λύση και y μια αυθαίρετη λύση της (4.3.14). Αν η $R(x) = 0$ είναι προφανές ότι η ΔΕ (4.3.14) γίνεται γραμμική, ενώ αν $P(x) = 0$ γίνεται Bernoulli

Έστω $z = y - y_1$, τότε η z ικανοποιεί μια ΔΕ Bernoulli με $n = 2$. Για να βρούμε μια ειδική λύση y_1 αντικαθιστούμε δοκιμαστικά διάφορες συναρτήσεις της μορφής $y(x) = \alpha x^b$ ή $y(x) = \alpha x + b$, όπου α, b σταθερές για τις οποίες γίνονται κατάλληλοι υπολογισμοί. Επειδή κατά κανόνα δε μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν μια ειδική λύση χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$y(x) = -\frac{z(x)}{R(x)}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός μετατρέπει την (4.3.14) στην εξίσωση Ricatti

$$z^n + z^2 - (Q(x) + \frac{R'(x)}{R(x)})z + P(x)R(x) = 0 \quad (4.3.15)$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (4.3.15) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε εξίσωση Ricatti παίρνει τη μορφή

$p_2(x)[z^n + z^2] + p_1(x)z + p_0(x) = 0$ (4.3.16), με p_1, p_0 συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

i. Η εξίσωση Ricatti της μορφής (4.3.16) έχει ίδιο σύνολο λύσεων με μια γραμμική ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης της μορφής

$$p_2 u'' + p_1 u + p_0 = 0 \quad (4.3.17)$$

ii. Αν z είναι μια λύση της (4.3.16) και u μια λύση της (4.3.17), τότε

$$z(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

iv. <u>Ομογενείς Μη Γραμμικές ΔΕ</u>

Η ΔΕ της μορφής $y' = f(x, y)$ ονομάζεται ομογενής αν τα x και y εμφανίζονται στην f με τέτοιο τρόπο, ώστε η $f(x, y)$ να εξαρτάται μόνο από τον λόγο $\frac{y}{x}$. Έτσι η παραπάνω ΔΕ μπορεί να γραφεί $y' = q\left(\frac{y}{x}\right)$, όπου $q = q(u)$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Ακριβείς ΔΕ και Ολοκληρωτικός Παράγοντας

Ακριβείς ΔΕ

Μπορούμε να γράψουμε τις ΔΕ πρώτης τάξης στη μορφή

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ (4.3.18)$$

Αν η x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξίσωση γράφεται

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \ (4.3.19)$$

Αντίστοιχα, αν η y είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξίσωση γράφεται

$$M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0 \ (4.3.20)$$

Οι λύσεις των εξισώσεων (4.3.18) και (4.3.19) συχνά εμφανίζονται σε πεπλεγμένη μορφή $F(x,y) = c$ αν κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ ικανοποιεί την $F(x,y) = c$ είναι λύση της ΔΕ (4.3.20).

Σημειώνεται ότι κάθε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών γράφεται στη μορφή $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ως εξής:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Θεώρημα 3.3.4 : Αν $F = F(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους F_x , F_y με

$$F(x,y) = c \ , c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \ (4.3.21).$$

Μια πεπλεγμένη λύση της ΔΕ έχει την μορφή

$$F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0 \ (4.3.22)$$

Ορισμός 3.3.4 : Η ΔΕ της μορφής $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ονομάζεται *ακριβής ΔΕ* σε ένα ανοικτό τετράγωνο χωρίο R, εάν υπάρχει συνάρτηση $F = F(x,y)$ έτσι ώστε F_x και F_y να είναι συνεχείς και ισχύει:

$F_x(x,y) = M(x,y)$ *και* $F_y(x,y) = N(x,y)$ (4.3.23),

για όλα τα $x, y \in R$.

<u>Παρατήρηση</u> Η χρήση του «ακριβής» συσχετίζεται με το εάν η έκφραση $F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy$ είναι το τέλειο διαφορικό της F.

Θεώρημα 3.3.5 (Ακριβής Συνθήκη)

Υποθέτουμε ότι M και N είναι συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους M_y και N_x σε ένα ανοικτό τετράγωνο χωρίο R. Τότε η

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

είναι ακριβής στο R, αν και μόνο αν ισχύει

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \text{ (4.3.24), για όλα τα } (x,y) \in R.$$

Ολοκληρωτικός Παράγοντας

Μερικές φορές μια ΔΕ δεν είναι ακριβής. Για να την κάνουμε ακριβή την πολλαπλασιάζουμε με μια κατάλληλη συνάρτηση. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας ή πολλαπλασιαστής Euler. Παρακάτω δίνεται αναλύτικά ο ορισμός του ολοκληρωτικού παράγοντα.

Ορισμός 3.3.5 : Μια συνάρτηση $\mu = \mu(x,y)$ ονομάζεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* για τη ΔΕ της μορφής $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ εάν

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \text{ (4.3.25)}$$

είναι ακριβής.

Αν γνωρίζω τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ μιας ΔΕ της μορφής $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, μπορούμε να λύσουμε τη ΔΕ ως ακριβή ΔΕ κατά τα γνωστά.

Παρακάτω θα αναπτύξουμε μια μεθοδολογία εύρεσης του ολοκληρωτικού παράγοντα.

Αρχικά εφαρμόζω το θεώρημα (ακριβής συνθήκη) που αναπτύξαμε παραπάνω αντικαθιστώντας όπου M,N τα μM, μN αντίστοιχα.

Η ΔΕ της μορφής (4.3.25) είναι ακριβής σε ένα ανοικτό χωρίο R αν οι μM , μN , $(\mu M)_y$, $(\mu N)_x$ είναι συνεχείς και επίσης αν ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \text{ ή ισοδύναμα } \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \text{ στο } R.$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τη τελευταία εξίσωση ως εξής:

$$\mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \quad (4.3.26)$$

Η παραπάνω σχέση μας οδηγεί σε γνωστό αποτέλεσμα για τις ακριβείς ΔΕ.

Έτσι αν $M_y = N_x$, τότε η (4.3.26) ισχύει με $\mu = 1$, άρα η

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

είναι ακριβής.

Αν $\mu(x,y) = P(x)Q(y)$, τότε $\mu_x(x,y) = P'(x)Q(y)$ και $\mu_y(x,y) = P(x)Q'(y)$. Έτσι η (4.3.26) γίνεται

$$P(x)Q(y)(M_y - N_x) = P'(x)Q(y)N - P(x)Q'(y)M \text{ (4.3.27)}$$

Μετά από διαίρεση της παραπάνω σχέσης με το $P(x)Q(y)$, αυτή (ενν. η (4.3.27)) γίνεται:

$$M_y - N_x = \frac{P'(x)}{P(x)}N - \frac{Q'(y)}{Q(y)}M \quad (4.3.28)$$

Θέτω $p(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$ και $q(y) = \frac{Q'(y)}{Q(y)}$ και η (4.3.28) γίνεται

$$M_y - N_x = p(x)N - q(y)M \quad (4.3.29)$$

Η (4.3.29) δημιουργήθηκε υποθέτοντας ότι η ΔΕ $Mdx + Ndy = 0$ έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$.

Ωστόσο η σχέση (4.3.28) μπορεί να εκφραστεί και διαφορετικά:

Αν υπάρχουν συναρτήσεις $p = p(x)$ και $q = q(y)$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τη σχέση (4.3.29) και αν ορίσουμε τις σχέσεις

$$P(x) = \pm e^{\int p(x)dx} \; \kappa\alpha\iota \; Q(y) = \pm e^{\int q(y)dy} \quad (4.3.30)$$

Έτσι, αν εφαρμόσουμε ανάποδα τα βήματα πού μας οδήγησαν από την σχέση (4.3.27) στη σχέση (4.3.29) μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την $Mdx + Ndy = 0$.

Θεώρημα 3.3.6 : Έστω M, N, M_y, N_x είναι συνεχείς σε ένα ανοιχτό χωρίο R. Τότε

i. Αν $\frac{M_y - N_x}{N}$ είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή του y στο R και ορίζουμε

$$p(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

Τότε $\mu(x) = \pm e^{\int p(x)dx}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, στο χωρίο R.

ii. Αν $\frac{(N_x - M_y)}{M}$ είναι ανεξάρτητη από το x στο R και ορίζουμε

$$q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

τότε $\mu(y) = \pm e^{\int q(y)dy}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, στο χωρίο R.

3.4 Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Ορισμός 3.4.1 : Ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{cases} y_1' = g_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' = g_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = g_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \qquad (4.4.1)$$

ονομάζεται σύστημα πρώτης τάξης, αφού οι μόνες παράγωγοι που εμφανίζονται είναι πρώτης τάξης. Η παράγωγος καθεμίας από τις άγνωστες μπορεί να εξαρτάται όσον αφορά την ανεξάρτητη μεταβλητή και όλες τις άγνωστες, άλλα όχι στις παραγώγους των αγνώστων .

<u>Παρατήρηση</u> Αν θέλουμε να εστιάσουμε στον αριθμό των άγνωστων συναρτήσεων στην (4.4.10) θα λέμε ότι αυτή είναι ένα σύστημα $n \times n$.

Συστήματα που περιέχουν ανώτερης τάξης παραγώγους μπορούν να εκφραστούν ως συστήματα με πρώτης τάξης παραγώγους. Αυτό μπορούμε να το δούμε αναλυτικά στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Γράψτε το παρακάτω σύστημα :

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x', y, y', y'') \\ y''' = g(t, x, x', y, y', y'') \end{cases}$$

σε μορφή συστήματος πρώτης τάξης.

Λύση

Θεωρούμε x , y , y' $και$ y'' ως άγνωστες συναρτήσεις και τις μετονομάζουμε ως εξής

$$x = x_1 , x' = x_2 , y = y_1 , y' = y_2 , y'' = y_3.$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις μπορούν να μετασχηματίσουν το σύστημα με τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ x_2' = f(t , x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , y_3) \\ y_3' = g(t , x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , y_3) \end{cases}$$

Ορισμός 3.4.2 : Ένα σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{cases} y_1' = \alpha_{11}(t)y_1 + \alpha_{12}(t)y_2 + \cdots + \alpha_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ y_2' = \alpha_{21}(t)y_1 + \alpha_{2}2(t)y_2 + \cdots + \alpha_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \alpha_{n2}(t)y_2 + \cdots + \alpha_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (4.4.2)$$

και ονομάζεται γραμμικό σύστημα.

<u>Παρατήρηση</u> Το γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ή για συντομία $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t)$ (4.4.3)

όπου $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς ο πίνακας A καλείται πίνακας συντελεστών για το (4.4.3) και $\boldsymbol{f}$ ο μη ομογενής όρος .

Τα A και $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχείς (αντ. παραγωγίσιμοι) αν τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων του είναι συνεχή (αντ. παραγωγίσιμα).

Αν το $\boldsymbol{f}$ ο μηδενικός πίνακας τότε το (4.4.3) είναι ομογενές , διαφορετικά το (4.4.3) ονομάζεται μη ομογενές .

Αν βρω μια λύση του (4.4.3) για συγκεκριμένο σταθερό διάνυσμα της μορφής :

$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$ την αρχική στιγμή t_0, τότε το ΠΑΤ για το (4.4.3) ορίζεται:

$$\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{y}(t0) = \boldsymbol{k}. \ (4.4.4).$$

Θεώρημα 3.4.1 : Έστω ότι ο πίνακας των συντελεστών A και το μη ομογενές μέρος $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχείς στο (α, b). Ακόμη, έστω $t_0 \in (\alpha, b)$ *και* $\boldsymbol{k}$ είναι ένα τυχαίο σταθερό διάνυσμα n διαστάσεων. Τότε, το ΠΑΤ $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{k}$, έχει μοναδική λύση στο (α, b).

Κεφάλαιο 4. Η προσέγγιση του Lie για την επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

Στη παρακάτω ενότητα θα αναπτύξουμε το κεντρικό θέμα αυτής της εργασίας, το οποίο είναι η θεωρία που ανέπτυξε ο Sophus Lie για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων τους. Ουσιαστικά, εφάρμοσε τη θεωρία των ομάδων συμμετριών Lie για να μπορέσει να επιλύσει γραμμικές και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις καθώς και συστήματα αυτών. Οι αναφορές μας για την ενότητα αυτή είναι τα [7] , [5] .

4.1 Θεώρημα Lie για επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων 1ης τάξης

Στην υποενότητα αυτή θα διατυπώσουμε το Θεώρημα του Lie το οποίο μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να επιλύσουμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Όμως, προτού διατυπώσουμε το θεώρημα θα δώσουμε κάποιες σημαντικές έννοιες που συμπεριλαμβάνονται σε αυτό.

Πρόταση 4.1.1: Έστω X ένα τυχαίο σύνολο και $B(X)$ το σύνολο όλων 1-1 και επί απεικονίσεων $\varphi: X \to X$.Τότε, το $B(X)$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

Απόδειξη

Έστω X ένα τυχαίο σύνολο και $B(X)$ το σύνολο όλων των 1-1 και επί απεικονίσεων,$\varphi: X \to X$.

Έστω τώρα, δυο τυχαίες απεικονίσεις $\varphi, \psi \in B(X)$. Συμβολίζουμε τη πράξη της σύνθεσης των συναρτήσεων με $\circ$ και την ορίζουμε ως εξής

$$\text{για κάθε } \varphi, \psi \in B(X), (\varphi \circ \psi)(\mathrm{x}) = \varphi(\psi(\mathrm{x})), \mathrm{x} \in \mathrm{X}$$

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος (B(X),∘) είναι ομάδα.

Αρχικά, από τη θεωρία συναρτήσεων γνωρίζουμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση $I: X \to X$, με τύπο $I(x) = x$, αποτελεί ουδέτερο στοιχείο της αλγεβρικής δομής (B(X), ∘), αφού έχει την ιδιότητα $\forall \varphi \in B(X), x \circ \varphi = \varphi \circ x = \varphi$.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε απεικόνιση φ που ανήκει στο B(X) υπάρχει ένα αντίστροφο στοιχείο, το οποίο είναι η αντίστροφη απεικόνιση της, φ^{-1}, η οποία επίσης ανήκει στο B(X), αφού έχει την ιδιότητα: $\forall \varphi \in B(X)$ υπάρχει η $\varphi^{-1} \in B(X)$ και ισχύει $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = x$, όπου x το ουδέτερο στοιχείο.

Τέλος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η προσεταιριστικότητα όσον αφορά τη πράξη της σύνθεσης. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $\varphi, \psi, \tau \in B(X)$ ισχύει

$$((\varphi \circ \psi) \circ \tau)(x) = (\varphi\psi)(\tau(x)) = \varphi(\psi(\tau(x)) = (\varphi \circ (\psi \circ \tau))(x).$$

Με βάση τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η αλγεβρική δομή (B(X) ∘) είναι ομάδα. Ωστόσο δεν είναι αβελιανή ομάδα.

Παράδειγμα

Έστω το σύνολο X έχει τη μορφή $X = \{1,2,3\}$. Τότε το $B(X)$ αποτελείται από όλες τις μεταθέσεις των 1, 2, 3.

Θεωρώ $\varphi: X \to X$ με $\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 3\ \kappa\alpha\iota\ \varphi(3) = 2,$ καθώς και $\psi: X \to X\ \mu\varepsilon$ $\psi(1) = 2, \psi(2) = 1\ \kappa\alpha\iota\ \psi(3) = 3$. Τότε δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα διότι: $(\varphi \circ \psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(2) = 3,$ αλλά $(\psi \circ \varphi)(1) = \psi(\varphi(1)) = \psi(1) = 2 \neq 3 = (\varphi \circ \psi)(1)$.

Έτσι η $B(X)$ είναι μια ομάδα, οι υποομάδες της οποίας ονομάζονται ομάδες μετασχηματισμού του Χ.

Παρακάτω δίνεται ένας ορισμός για την ομάδα μετασχηματισμών.

Ορισμός 4.1.1 : Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο είναι ένα χωρίο και ένα σημείο $\boldsymbol{x} \in K$, με $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Τότε *ομάδα μετασχηματισμών* στο χωρίο Κ καλείται το σύνολο των μετασχηματισμών το οποίο συμβολίζεται με $\boldsymbol{x}^* = T(\boldsymbol{x}; \kappa), \forall \boldsymbol{x} \in K$ και εξαρτάται από μια παράμετρο $\kappa \in M \subseteq \mathbb{R}$, με εσωτερική πράξη $\psi : M \times M \to M$,με M τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.Επίσης ,ισχύουν τα παρακάτω:

i. Για κάθε παράμετρο $\kappa \in M$ οι μετασχηματισμοί που προκύπτουν είναι $1-1$ και επί του χωρίου Κ. Δηλαδή ισχύει $\boldsymbol{x}^* \in K$.
ii. Η αλγεβρική δομή (Μ, ψ) είναι ομάδα.
iii. Αν $\boldsymbol{x}^* = x\ \kappa\alpha\iota\ \kappa = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας ,τότε προκύπτει η σχέση $x = T(x\,;\, e)$.
iv. Αν ισχύει $\boldsymbol{x}^* = T(\boldsymbol{x}\,;\, \kappa)$ και $x^{**} = T(\boldsymbol{x}*\,;\, \rho)$, τότε ισχύει $\boldsymbol{x}^{**} = T(\boldsymbol{x}\,;\, \psi(\kappa\,, \rho\,))$.

Με βάση τα παραπάνω θα αναπτύξουμε κάποιες σημαντικές έννοιες στο κομμάτι των ΔΕ 1ης τάξης ,οι οποίες είναι σημαντικές για τη προσέγγιση του Lie

Αρχικά, έστω μια ΔΕ 1ης τάξης στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = F(x\,, y). \quad (4.1.1)$$

Μια λύση της παραπάνω ΔΕ είναι μια συνάρτηση $y = u(x)$ την οποία αν αντικαταστήσω στην (4.1.1) γίνεται : $u'(x) = F(\,x\,, u(x))$.

Γεωμετρικά , όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα μια λύση μιας ΔΕ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$.

<u>Σημείωση:</u> Ένας μετασχηματισμός $T \in B(X)$ (όπου $X = \mathbb{R}^2$) κάνει την ΔΕ (4.1.1) σταθερή, αν ο μετασχηματισμός μεταθέτει την ολοκληρωτική καμπύλη. Ουσιαστικά, ένας μετασχηματισμός ο οποίος είναι ένας προς ένα μπορεί να μετατοπίσει ή να στρίψει κατά μια γωνία την ολοκληρώσιμη καμπύλη, μέσω της οποίας απεικονίζεται γεωμετρικά μια λύση της ΔΕ (4.1.1), αφήνοντας ωστόσο το σχήμα αναλλοίωτο.

Ειδική περίπτωση

$Αν\ F(x,y) = g(x)$. Τότε η (4.1.1) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\ ,$$

Και έχει λύσεις της μορφής : $u(x) = \int_0^x g(t)dt + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$.

<u>Σημείωση:</u> Γεωμετρικά, οι παραπάνω λύσεις είναι ολοκληρωτικές καμπύλες, οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. Έτσι, κάθε μετασχηματισμός $T_t : (x,y) \to (x, y+t)$, ο οποίος μετατοπίζει κατά t πάνω τις ολοκληρωτικές καμπύλες, αφήνει την ΔΕ σταθερή.

<u>Παρατήρηση</u> Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μετασχηματισμοί έχουν την εξής ιδιότητα

$$T_{s+t} = T_s T_t\ ,$$

όπου $t \to T_t$ είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα.

Παρακάτω θα δώσουμε έναν ορισμό των μονοπαραμετρικών ομάδων Lie.

Ορισμός 4.1.2 : Μια ομάδα μετασχηματισμών, όπως ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται *μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie* αν επιπλέον για αυτήν ισχύουν τα παρακάτω

i. Το κ είναι μια συνεχής παράμετρος. Αναλυτικότερα ,αυτό σημαίνει ότι το M είναι διάστημα. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $0 \in M$ και το ουδέτερο στοιχείο του M ταυτίζονται, δηλαδή $e = 0$.
ii. Ο μετασχηματισμός T ,που ορίσαμε στον ορισμό 4.1.1,είναι μια απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς $\boldsymbol{x}$ καθώς και αναλυτική συνάρτηση του κ στο M.
iii. Η $\psi(\kappa\ ,\rho)$ είναι αναλυτική συνάρτηση των $\kappa\ ,\rho$.

Έτσι, ακόμα πιο γενικά έστω η ΔΕ της μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x\ ,y)}{X(x\ ,y)} \quad (4.1.2)$$

και έστω ότι έχουμε μια μονοπαραμετρική ομάδα φ_t ($t \in \mathbb{R}$), η οποία αποτελείται από όλες τις διαφορίσιμες, $1-1$ και επί απεικονίσεις του $\mathbb{R}^2$, οι οποίες αφήνουν την (4.1.2) αναλλοίωτη.

Έστω το διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ με $\Phi_p = \left\{\frac{d(\varphi_t \cdot p)}{dt}\right\}$. Γεωμετρικά, το Φ_p είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο $p \in \mathbb{R}^2$ στη τροχιά του $\varphi_t \cdot p$.

Ορισμός 4.1.3: Έστω $f(x,y,z)$ με $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της f. Επίσης, έστω $\lambda = (a,b,c)$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε, η *κατά διεύθυνση παράγωγος* της f στην διεύθυνση του λ και στο σημείο p_0 ορίζεται σαν

$$Df(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|}, \text{ όπου } \nabla f(p_0) = (f_x(p_0), f_y(p_0), f_z(p_0)).$$

Έτσι, με βάση τον παραπάνω ορισμό, έστω ένα διάνυσμα στο σημείο $p = (x\,, y)$, τότε η κατά διεύθυνση παράγωγος της συνάρτησης του διανυσματικού πεδίου στην διεύθυνση του διανύσματος στο p μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\Phi_p = \Phi_{x\,,y} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (4.1.3)$$

Έτσι, αφού αναπτύξαμε όλες τις απαραίτητες εισαγωγικές έννοιες μπορούμε παρακάτω να διατυπώσουμε το Θεώρημα του Lie.

Θεώρημα 4.1.1 (Lie 1874)

Έστω η διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x\,,y)}{X(x\,,y)}$$

και έστω μια μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών του Lie, η οποία αποτελείται από όλες τις διαφορίσιμες, $1-1$ και επί απεικονίσεις, φ_t $(t \in \mathbb{R}^2)$. Ακόμη, αυτή η μονοπαραμετρική ομάδα αφήνει την ΔΕ (4.1.2) σταθερή. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $U(x\,,y)$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} = \frac{-\mathrm{Y}}{\mathrm{X}\eta - Y\xi}\ ,\ \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}\eta - Y\xi} \qquad (4.1.4)$$

και η $U(x,y) = ct$ να αποτελεί λύση της (4.1.2).

Θα δώσουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης στην επόμενη υποενότητα.

<u>Παρατήρηση:</u> Το παραπάνω θεώρημα είναι ισοδύναμο με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.1 : Αν η ΔΕ της μορφής $\frac{Xdy - Ydx}{\mathrm{X}\eta - Y\xi}$ είναι ακριβής ΔΕ, τότε μπορεί να μετατραπεί στη μορφή $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$.

Ισοδύναμα: Η σχέση $(X\eta - Y\xi)^{-1}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την εξίσωση $Xdy - Ydx = 0$.

<u>Παρατήρηση:</u> Από το θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η λύση της ΔΕ (4.1.2) μπορεί να βρεθεί κατόπιν ολοκλήρωσης των σχέσεων (4.1.4).

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια μεθοδολογία με την οποία θα μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση U(x , y).

Από την προηγούμενη ενότητα θέτουμε τις σχέσεις (4.1.4) ως εξής:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$$

Έστω ότι η U αποτελεί μια λύση. Ολοκληρώνοντας ως προς y την $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$ έχουμε

$$U(x, y) = \int_{\alpha}^{y} N(x, z)dz + g(x) \qquad (4.1.5),$$

για κάποια συνάρτηση g(x).

Κατόπιν, παίρνω την σχέση (4.1.5) και την παραγωγίζω ως προς x. Έτσι έχουμε:

$$M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha}^{y} N(x, z)dz = g'(x).$$

Αφού η μερική παράγωγος ως προς y του αριστερού μέλους της εξίσωσης ισοδυναμεί με :

$$My - Nx = 0$$

Η συνάρτηση $g(x)$ υπάρχει και ο τύπος της $U(x, y)$ δίνει μια λύση.

4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος

Στην προηγούμενη υποενότητα διατυπώσαμε το Θεώρημα του Lie, το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση Διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτή την υποενότητα θα διατυπώσουμε μια σύντομη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος.

Έστω φ_t είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών, η οποία αποτελείται από όλες τις διαφορίσιμες, $1-1$ και επί απεικονίσεις στο $\mathbb{R}^2$, και αφήνει την εξίσωση: $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$ αναλλοίωτη.

Αν $U(x,y) = c$ είναι μια λύση σε συνδυασμό με τον τύπο της μονοπαραμετρικής ομάδας $\varphi_t(x,y) = (x_t, y_t)$ μας δίνει

$$U(x_t, y_t) = c(t), \text{ για όλα τα t}$$

Έτσι αν παραγωγίσω την παραπάνω σχέση ως προς x , y έχω :

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx_t}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy_t}{dt} = c'(t)$$

και σε συνδυασμό με την (4.1.3) έχουμε :

$$\frac{\partial U}{\partial x}\xi + \frac{\partial U}{\partial y}\eta = c'(0) \qquad (4.2.1)$$

Ακόμη ισχύει ότι,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (4.2.2)$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\frac{\partial U}{\partial x}X + \frac{\partial U}{\partial y}Y = 0 \quad (4.2.3)$$

Αν $c'(0) \neq 0$, τότε κανονικοποιούμε το U.Δηλαδή δίνουμε την τιμή 1 στο $c'(0)$, $c'(0) = 1$. Τότε αν συνδυάσω τις σχέσεις $(4.2.1), (4.2.3)$ παίρνω τις ζητούμενες σχέσεις

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-Y}{X\eta - Y\xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{X}{X\eta - Y\xi}$$

Έτσι, ο $(X\eta - Y\xi)^{-1}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την $Xdy - Ydx = 0$.

Αν, τώρα $c'(0) = 0$, από τις σχέσεις $(4.1.4), (4.1.5)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi}$. Σε αυτή την περίπτωση, οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι απλά οι τροχιές της μονοπαραμετρικής ομάδας φ_t.

4.3 Παραδείγματα

Σε αυτήν την υποενότητα θα μελετήσουμε κάποια παραδείγματα στα οποία θα

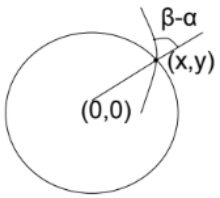
εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Lie έτσι ώστε να μπορέσουμε να λύσουμε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

<u>Παράδειγμα 1:</u> Να επιλύσετε τη παρακάτω εξίσωση.

$$(4.3.1) \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{y+x(x^2+y^2)}{\mathrm{x}-\mathrm{y}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)} .$$

Λύση

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως



$$(4.3.2) \quad \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = x^2 + y^2$$

Με βάση το παραπάνω σχήμα , μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση (4.3.2) αναπαριστά έναν κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$.

Η κλίση της ακτίνας του κύκλου από το $(0,0)$ έως το $(x\,, y)$ είναι $\frac{y}{\mathrm{x}} = tan\alpha$

ενώ, η κλίση της εφαπτομένης στην ολοκληρωτική καμπύλη στο σημείο

$$(x\,, y) \text{ είναι } \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = tan\,\beta\ .$$

Γενικά ισχύει ότι $tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\beta - tan\alpha}{1+tan\alpha tan\beta}$

Συνεπώς ο τύπος (4.3.2) μπορεί να γραφεί $tan(\alpha - \beta) = x^2 + y^2$.

Αυτό σημαίνει ότι η γωνία $\beta - \alpha$ είναι συνεχής καθώς το σημείο $(x\,, y)$ κινείται πάνω στον κύκλο κέντρου $(0,0)$.

Έτσι κάθε περιστροφή του εκφράζεται από την μονοπαραμετρική ομάδα

$$(4.3.3) \qquad \varphi_t : (x\,, y) \rightarrow (xcost - ysint\,,\ xsint + ycost)$$

η οποία, απεικονίζει κάθε ολοκληρωτική καμπύλη μέσα σε κάποια άλλη ολοκληρωτική καμπύλη. Με άλλα λόγια, η εξίσωση (4.3.1) παραμένει αναλλοίωτη.

Έτσι από την (4.3.3) το διανυσματικό πεδίο είναι

$$\Phi_p = \left(\frac{d(\varphi_t \cdot p)}{dt}\right) = -\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}$$

Έτσι από το θεώρημα του Lie

$$(X\eta - Y\xi)^{-1} = \left[\left(x - y(x^2 + y^2)\right)x - \left(y + x\,(x^2 + y^2)\right)(-y)\right]^{-1} =$$

$$= (x^2 + y^2)^{-1}$$

είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας. Επίσης

$$\frac{Xdy - Ydx}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - y\right)dy - \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x\right)dx$$

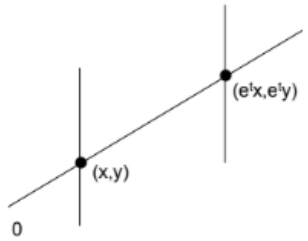
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή :

Η λύση $U(x\,,y) = c$ μπορεί να γραφεί

$$y = x\,tan\,(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c).$$

<u>Παράδειγμα 2:</u> Να επιλύσετε την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα , σε κάθε ακτίνα, θεωρήστε την εφαπτομένη της ακέραιας καμπύλης στο σημείο $(x\,,y)$. Στο σημείο $(xe^t\,,ye^t)$ η κλίση της εφαπτομένης είναι η ίδια. Για αυτό η απεικόνιση

$$\varphi_t : (x\,,y) \rightarrow (xe^t\,,ye^t)$$

αφήνει την εξίσωση αναλλοίωτη . Επίσης , $\varphi_{t+s} = \varphi_t\varphi_s$. Έτσι, το διανυσματικό πεδίο είναι

$$\Phi_p = \left\{\frac{d(\varphi_t \cdot p)}{dt}\right\}_{t=0} = \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}.$$

Από το θεώρημα , η $-f\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy$ έχει ολοκληρωτικό παράγοντα το

$\left(y - f\left(\frac{y}{x}\right)x\right)^{-1}$. Με άλλα λόγια, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y-f\left(\frac{y}{x}\right)x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right)}{y-\ f\left(\frac{y}{x}\right)x}\right)$

και παίρνει τη μορφή

$$\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right)}{y-\ f\left(\frac{y}{x}\right)x}dx + \frac{1}{y-f\left(\frac{y}{x}\right)x}dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Η λύση είναι $U(x\,,y)\ =\ c$.

Για να βρω την U χρησιμοποιούμε την τελευταία εξίσωση από την οποία γνωρίζουμε ότι $U(x\,,\,y\,) = \int_1^y \frac{dz}{z-f\left(\frac{y}{x}\right)x} + g(x)$.

και όπως εξηγήσαμε πριν , η σχέση

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-f\left(\frac{y}{x}\right)}{y-f\left(\frac{y}{x}\right)x}$$

δίνει έναν τύπο για την $g'(x)$.

Για την επίλυση του παρακάτω παραδείγματος χρησιμοποιούμε ομάδες με περισσότερες παραμέτρους.

<u>Παράδειγμα 3</u>: Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και G μια υποομάδα του $B(X)$, η οποία διατηρεί τις αποστάσεις και τον προσανατολισμό. Αν $\sigma \in G$ και t είναι μια παράλληλη μετατόπιση τέτοια ώστε $\sigma \cdot 0 = t \cdot 0$. Τότε , ισχύει $t^{-1} \cdot \sigma \cdot 0 = 0$. Έτσι , η $t^{-1} \cdot \sigma$ είναι μια περιστροφή k γύρω από την αρχή των αξόνων. Ακόμη , έστω ότι $\theta(\sigma)$ είναι η γωνία ανάμεσα στον άξονα $x'x$ του L και του $k \cdot L$, όπου L είναι μια μετάθεση η οποία εξαρτάται από το θ και κατ' επέκταση από το σ(θ) και διατηρεί σταθερές τις γωνίες και τις αποστάσεις . Τέλος , έστω ότι t= (x(σ), y(σ)). Τότε

$$\sigma : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(\sigma) \\ y(\sigma) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\theta(\sigma) & sin\theta(\sigma) \\ -sin\theta(\sigma) & cos\theta(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Με έναν απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$x(\sigma\tau^{-1}) = x(\sigma) - x(\tau)cos(\theta(\sigma) - \theta(\tau)) + y(\tau)(sin\theta(\sigma) - \theta(\tau))$$

$$y(\sigma\tau^{-1}) = y(\sigma) - x(\tau)sin(\theta(\sigma) - \theta(\tau)) - y(\tau)cos(\theta(\sigma) - \theta(\tau))$$

$\theta(\sigma\tau^{-1}) \equiv (\theta(\sigma) - \theta(\tau))\ mod(2\pi)$.

Για αυτό , τα στοιχεία του G παραμετρικοποιούνται από 3 παραμέτρους , τέτοιες ώστε οι παραγόμενοι παράμετροι είναι λείες απεικονίσεις των παραμέτρων των παραγόντων και αντίστροφα.

4.4. Γενίκευση Θεωρήματος Lie για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις ανώτερης τάξης.

Στη παρακάτω υποενότητα θα διατυπώσουμε το θεώρημα του Lie για διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης. Θα δώσουμε επίσης ένα ενδεικτικό παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση του παραδείγματος.

Θεώρημα 4.4.1 : Έστω ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$(4.4.1) \qquad \frac{dy_j}{\alpha x} = f^j(x, y_1, \dots, y_r), \ 1 \leq j \leq r$$

έχει μια επιλύσιμη ομάδα ευστάθειας r −διαστάσεων στο $(x, y_1, \dots, y_r)$ με τροχιές r −διαστάσεων. Τότε η λύση μπορεί να βρεθεί από επαναλαμβανόμενους τετραγωνισμούς, οι οποίοι δίνονται από μια ομάδα.

Παράδειγμα

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$(4.4.2) \qquad x^2 \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} = f\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)$$

Λύση

Αν θέσουμε z = $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ η παραπάνω εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης. Πιο συγκεκριμένα

$$(4.4.3) \qquad x^2 \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = f(xz - y) \ , \ \frac{dy}{dx} = \mathrm{z}$$

Στη προκειμένη περίπτωση , οι μετασχηματισμοί

$$T_{s,t}: (x, y, z) \to \left(s_x, y + t_x, \frac{z}{s} + \frac{t}{s}\right), s > 0, t \in \mathbb{R}$$

αφήνουν το σύστημα (5.4.3) αναλλοίωτο. Επίσης,

$$T_{\sigma,\tau} \circ T_{s,t} = T_{\sigma s\,, t\,+\,\tau s}\,.$$

Οι μονοπαραμετρικές υποομάδες $T_{s,0}$ και $T_{1\,,t}$ δημιουργούν τα διανυσματικά πεδία

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}, \ \ X_2 = x\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}.$$

Τότε ισχύει $[X_1, X_2] = X_2$. Έτσι, η άλγεβρα Lie $\mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2$ είναι επιλύσιμη. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η (4.4.2) λύνεται με διαδοχικούς τετραγωνισμούς. Αναλυτικότερα, αν θέσω $w = xz - y$, τότε $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = x\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}$ και έτσι ισχύει

$$X\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f(w)}$$

δεδομένου ότι $\int \frac{dw}{f(w)} = \log|x| + C$.

Θέτοντας στη παραπάνω εξίσωση $w = g(x)$ καταλήγω στην εξίσωση

$$\frac{\mathrm{Dy}}{\mathrm{dx}} - \frac{\mathrm{y}}{x} = \frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{x}}$$

Αυτή η εξίσωση έχει συμμετρική ομάδα $(x, y) \to (x, y + tx)$ με διανυσματικό πεδίο $x\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$.

Από το αρχικό Θεώρημα του Lie για ΔΕ 1ης τάξης έχουμε ότι το x^{-1} είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την

$$dy - \frac{\mathrm{y+g(x)}}{\mathrm{x}}dx = 0$$

το οποίο είναι της μορφής

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{y+g(x)}}{\mathrm{x}^2}dx = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}dy$$

Για αυτό,

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{x}} \quad , \text{έτσι} \quad U = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} + h(x).$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2} + h'(x) = -\frac{y}{x^2} - \frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{x}^2}.$$

Έτσι ,

$$h(x) = -\int_1^x \frac{g(t)}{t^2}dt$$

και η λύση της (4.4.2) παίρνει τη μορφή

$$y = -x\int_1^x \frac{g(t)}{t^2}dt + cx.$$

Κεφάλαιο 5. Διάφορες Εφαρμογές του Θεωρήματος Lie

Στο παρακάτω κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με δυο βασικές εφαρμογές του Θεωρήματος Lie, την εξίσωση Riccati και την γεωμετρική της ερμηνεία και τις σφαιρικές συναρτήσεις . Οι αναφορές για αυτό το κεφάλαιο είναι το [6].

5.1 Η εξίσωση Riccati

Μελετήσαμε στην υποενότητα 4.4 ότι, ένα σύστημα ΣΔΕ της μορφής:

$$(5.1.1) \quad \frac{dx^i}{dt} = F_i(\, t\, , x_i\, , \cdots , x_n), \qquad i = 1, \dots , n$$

έχει ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αν η γενική λύση του συστήματος μπορεί να εκφραστεί από έναν πεπερασμένο αριθμό m λύσεων , οι οποίες είναι συγκεκριμένες και έχουν επιλεγεί αυθαίρετα. Δηλαδή

$$(5.1.2)\ x_k = (x_k^1\, , \cdots , x_k^n), \qquad \mu\varepsilon\ k = 1\, , \dots , m.$$

από εκφράσεις της μορφής

$$(5.1.3)\ x_i = \varphi_i(x_1, \cdots , x_m, c_1, \cdots , c_n)$$

η οποία περιέχει n συγκεκριμένες σταθερές $c_1, \cdots , c_n$.

Σε αυτή την περίπτωση, οι συγκεκριμένες λύσεις (5.1.2) αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (5.1.1) .

<u>Παρατήρηση:</u> Είναι αναγκαίο ο τύπος της (5.1.3) να είναι ανεξάρτητος από την επιλογή κάποιων συγκεκριμένων λύσεων της (5.1.2).

Ο γενικός τύπος των εξισώσεων, οι οποίες επιλύονται από κάποιο θεμελιώδες σύστημα λύσεων, δημιουργήθηκε από τον Lie, ο οποίος απέδειξε το παρακάτω θεώρημα (αυτό που αναφέραμε και στην υποενότητα 4.4).

Θεώρημα 5.1.1 : Το σύστημα των εξισώσεων (5.1.1) έχει ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αν αυτό μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(5.1.4) \quad \frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\xi_r^i(x)$$

τέτοιο ώστε οι τελεστές

$$(5.1.5) \quad X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\ , \mu\varepsilon\ \alpha = 1\, , \dots , r, i = 1, \dots , n$$

να αποτελούν μια άλγεβρα Lie διάστασης r. Ακόμη ισχύει η συνθήκη $nm \geq r$, όπου m ο αριθμός των ειδικών λύσεων μιας ΔΕ.

Προτού, προχωρήσουμε στην μελέτη της ΔΕ Riccati, θα παραθέσουμε κάποια παραδείγματα. Το πρώτο αφορά τις γραμμικές ομογενείς ΔΕ 1ης τάξης, το δεύτερο τις γραμμικές μη ομογενείς ΔΕ πρώτης τάξης και το τρίτο ένα σύστημα δυο γραμμικών, ομογενών ΔΕ πρώτης τάξης. Αναλυτικότερα,

Παράδειγμα 1

Για μια γραμμική ομογενή ΔΕ της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

έχουμε $n = 1\,, m = 1\,, r = 1\,, X = x\frac{d}{dx}$. Η γενική λύση της παραπάνω ΔΕ έχει την μορφή $x = cx_1$.

Παράδειγμα 2

Για μια γραμμική μη ομογενή ΔΕ της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$$

έχουμε $n = 1\,, m = 2\,, r = 2$. Οι τελεστές σύμφωνα με τη σχέση (6.1.5) έχουν τη μορφή

$$X_1 = \frac{d}{dx}\ , X_2 = x\frac{d}{dx}.$$

Άρα $[X_1\,, X_2] = X_1$.Έτσι, προφανώς παράγουν μια άλγεβρα Lie δυο διαστάσεων.

Εδώ , η γενική λύση της παραπάνω ΔΕ έχει την μορφή $x = x_1 + c\tilde{x}$, όπου x_1 είναι μια ειδική λύση της παραπάνω ΔΕ και η $\tilde{x}$ ορίζεται ως η διαφορά δύο λύσεων της παραπάνω ΔΕ , $\tilde{x} = x_2 - x_1$.

Παράδειγμα 3

Έστω το ομογενές σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \alpha_{11}(\mathrm{t})\mathrm{x} + \alpha_{12}(\mathrm{t})\mathrm{y} \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \alpha_{21}(\mathrm{t})\mathrm{x} + \alpha_{22}(\mathrm{t})\mathrm{y} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύστημα μπορεί να πάρει την μορφή της σχέσης (5.1.4) με συντελεστές

$$T_1 = \alpha_{11}(t), \qquad T_2 = \alpha_{12}(t), \qquad T_3 = \alpha_{21}(t), \qquad T_4 = \alpha_{22}(t)$$

$$\xi_1 = (x\,, 0), \qquad \xi_2 = (y\,, 0), \qquad \xi_3 = (0, x), \qquad \xi_4 = (0, y)$$

Επομένως , οι τελεστές X_1 , X_2 , X_3 , X_4 παίρνουν την μορφή

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

οι οποίοι, όπως είναι εύκολο να αποδείξουμε , δημιουργούν μια άλγεβρα Lie L_4 . Έτσι, οι γενικές λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 , \quad y = c_1y_1 + c_2y_2$$

όπου (x_1, y_1) είναι οι ειδικές λύσεις του παραπάνω συστήματος και (x_2,y_2) είναι οι λύσεις της μορφής (5.1.3) . Επομένως , έχουμε m = 2 , n = 2 , r = 4.

Παράδειγμα 4

Μια εξίσωση Riccati πρόκειται για μια μη γραμμική ΔΕ , η οποία έχει την μορφή

$$(5.1.6) \quad \frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή της (5.1.4) για r = 3 και οι τελεστές είναι οι εξής

$$(5.1.7) \quad X_1 = \frac{d}{dx}, \qquad X_2 = x\frac{d}{dx}, \qquad X_3 = x^2\frac{d}{dx}$$

οι οποίοι δημιουργούν μια άλγεβρα Lie , L_3.

Έτσι, για να απεικονίσουμε τη γενική λύση της εξίσωσης Riccati με καθορισμένους συντελεστές χρειαζόμαστε τουλάχιστον τρεις συγκεκριμένες λύσεις. Στη πραγματικότητα, επαρκεί να ξέρουμε ακριβώς 3, καθώς οποιεσδήποτε τέσσερις λύσεις της εξίσωσης Riccati είναι μεταξύ τους γραμμικώς εξαρτημένες υπό την προϋπόθεση ότι ο αναρμονικός τους λόγος είναι σταθερός. Δηλαδή:

$$[X_1, X_3; X_2, X_4] = \frac{(X_2 - X_1)(X_4 - X_3)}{(X_2 - X_3)(X_4 - X_1)}$$

5.2 Γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης Riccati

Το θεώρημα που αναπτύχθηκε στη προηγούμενη ενότητα μας βοηθάει να βρούμε όλες τις ΣΔΕ της μορφής (5.1.1) με ένα σύστημα θεμελιωδών λύσεων μειώνοντας το πρόβλημα σε αυτό της απαρίθμησης όλων των πιθανών ομάδων μετασχηματισμό, οι οποίες έχουν πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων (ή αντίστοιχα τελεστές ομάδων Lie, πεπερασμένης διάστασης) στον n −διάστατο χώρο των μεταβλητών

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Η παραπάνω απαρίθμηση πραγματοποιήθηκε από τον Lie για $n = 1$ και για $n = 2$. Γεωμετρικά εκφράζουν την ευθεία των πραγματικών αριθμών και το επίπεδο των πραγματικών αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη υποενότητα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $n = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, η επιλογή είναι πολύ περιορισμένη. Συγκεκριμένα, κάθε ομάδα μετασχηματισμών στην ευθεία των πραγματικών αντιστοιχεί στην ομάδα των μετασχηματισμών, η οποία δημιουργείται από μια 3 −παραμετρική ομάδα Lie με βάση τα X_1 , X_2 , X_3 της σχέσης (5.1.7), ή με μια από τις υποομάδες της.

Αυτό σημαίνει ότι για $n = 1$ η εξίσωση Riccati της μορφής (5.1.6) είναι η πιο γενική εξίσωση η οποία έχει ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Για αυτό η εξίσωση Riccati, κατά μια έννοια δημιουργεί την ομάδα των μετασχηματισμών. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της διαπίστωσης είναι το θεώρημα της σταθερότητας του αναρμονικού λόγου για οποιεσδήποτε 4 λύσεις της εξίσωσης Riccati.

Για να αποδείξουμε το παραπάνω , εισάγουμε τις ομογενείς μεταβλητές u,v θέτοντας

$x = \frac{u}{v}$. Τότε η εξίσωση Riccati παίρνει τη μορφή

$$(5.1.6') \; v\left(\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}Qu - Pv\right) - u\left(\frac{dv}{dt} + Ru + \frac{1}{2}Qv\right) = 0 .$$

Από τον ορισμό, γνωρίζουμε ότι η $x = \frac{u}{v}$ περιέχει δυο συναρτήσεις. Έτσι μπορούμε να τις περιορίσουμε προσθέτοντας μια ακόμη συνθήκη. Για παράδειγμα, ζητώντας να ισχύει η εξίσωση $\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}Qu - Pv = 0$. Τότε η (5.1.6΄) μετατρέπεται σε ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}Q(t) + P(t)v , \qquad \frac{dv}{dt} = -R(t)u - \frac{1}{2}Q(t)v$$

στο επίπεδο.

Έστω (u_1 , v_1) και (u_2 , v_2) να είναι δυο ειδικές λύσεις του συστήματος, επιλεγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε οι λόγοι $\frac{u_1}{v_1}$ και $\frac{u_2}{v_2}$ να μην είναι ισοδύναμοι για την ίδια σταθερά. Τότε

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \ , v = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

Επομένως, η γενική λύση της εξίσωσης Riccati της μορφής (5.1.6) δίνεται από τον τύπο

$$x_0 = \frac{c_1 u_1 + c_2 u_2}{c_1 v_1 + c_2 v_2} = \frac{u_1 + K_0 u_2}{v_1 + K_0 v_2} \ . (5.2.1)$$

Έστω τώρα, $x_1 , x_2 , x_3 \ , x_4$ τέσσερις λύσεις της ΔΕ Riccati , οι οποίες αντιστοιχούν σε κάποιες ειδικές τιμές $K_1 , \dots , K_4$ της σταθεράς K, η οποία υπάρχει στη σχέση (5.2.1). Τότε από την σχέση (5.1.8) , έχουμε την εξίσωση:

$$[x_1, x_3 \ ; \ x_2, x_4] =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)} = \frac{(K_2 - K_1)(K_4 - K_3)}{(K_2 - K_3)(K_4 - K_1)} = c$$

Το οποίο αποδεικνύει ότι ο αναρμονικός λόγος οποιονδήποτε 4 λύσεων της εξίσωσης Riccati είναι σταθερός.

5.3 Σφαιρικές συναρτήσεις

Ορισμός 5.3.1 : Η *εξίσωση Laplace* σε δυο διαστάσεις είναι η εξίσωση με τύπο

$\nabla^2\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ ή ισοδύναμα με τελεστή Laplace $\Delta\varphi = 0$.

Οι λύσεις της εξίσωσης ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις. Τυπικές λύσεις της εξίσωσης είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο.

Έστω, η εξίσωση Laplace $\Delta u = 0$ ως προς τις 3 ανεξάρτητες μεταβλητές x, y, z και έστω ότι οι λύσεις της είναι αναλλοίωτες εφόσον υπάρξουν περιστροφές ή μετατοπίσεις στις ανεξάρτητες μεταβλητές και στην συνάρτηση u.

Είναι βολικό να αλλάξουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες

$x = r\,sin\theta cos\varphi\,, y = r\,sin\theta sin\varphi,\ z = r\,cos\theta,\ \mu\varepsilon\ 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

και γράφω τον τελεστή Laplace στη μορφή

$\Delta = \frac{1}{r^2}\ (\frac{\partial}{\partial r}\, r^2\, \frac{\partial}{\partial r} + \Delta_2\,)$, όπου με Δ_2 συμβολίζεται ο τελεστής Laplace-Betrami στη μοναδιαία σφαίρα ως εξής

$$\Delta_2 = \frac{1}{sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta} sin\theta\ + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Μια λύση, η οποία είναι αναλλοίωτη εφόσον συμβεί κάποια περιστροφή στον χώρο (σφαιρικά συμμετρική) έχει τον τύπο $u = R(r)$. Για αυτό η εξίσωση Laplace οδηγεί σε $(r^2R')' = 0$, από αυτό έχουμε

$$(5.3.1)\ \ R = \frac{c_1}{r} + c_2$$

Για την ομάδα μετατοπίσεων στο u με συμβολισμό $X = u\frac{\partial}{\partial u}$ τα αναλλοίωτα στοιχεία είναι οποιαδήποτε συνάρτηση των x, y, z. Για αυτό μια λύση της μορφής $u = \varphi(x, y, z)$ δεν μπορεί να είναι αναλλοίωτη, όσον αφορά τη συγκεκριμένη ομάδα, καθώς η u είναι αναλλοίωτη.

Τώρα, ας βρούμε τις αναλλοίωτες λύσεις, για την ομάδα των μετατοπίσεων, στις ανεξάρτητες μεταβλητές και τη συνάρτηση u.

$$(5.3.2)\quad \bar{x} = \alpha x\,,\qquad \bar{y} = \alpha y\ ,\qquad \bar{z} = \alpha z\,,\qquad \bar{u} = \alpha^n u$$

Ορισμός 5.3.2 : Μια συνάρτηση $u = \varphi(x, y, z)$, η οποία είναι αναλλοίωτη αν σε αυτή εφαρμοστεί η οποιαδήποτε μετατόπιση της μορφής (5.3.2), ονομάζεται *ομογενής βαθμού n*.

Για αυτό , έστω ότι οι λύσεις της εξίσωσης Laplace είναι ομογενείς βαθμού n . Τότε, σε αυτή την περίπτωση, καλό θα ήταν να θυμόμαστε την επέκταση μιας καθορισμένης λύσης στις ομογενείς λύσεις, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον n ως ακέραιο.

Γράφουμε τον τελεστή της ομάδας των μετατοπίσεων (5.3.2) με σφαιρικές συντεταγμένες στη μορφή

$$X = r\frac{\partial}{\partial r} + nu\frac{\partial}{\partial u}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε από την εξίσωση $XJ = 0$ ότι μια βάση των αναλλοίωτων στοιχείων $\lambda = ur^{-n}, \theta, \varphi$. Η αναλλοίωτη εξίσωση $\lambda = Y^n(\theta, \varphi)$ (ο δείκτης n σημαίνει ότι για κάθε επιλογή του n έχουμε μια διαφορετική εξίσωση Y) μας δίνει τον παρακάτω γενικό τύπο μιας αναλλοίωτης λύσης

$$(5.3.3)\ u = r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

Τότε

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(nr^{n+1}Y_n) + r^n\Delta_2 Y_n\right] = r^{n-2}[n(n+1)Y_n + \Delta_2 Y_n],$$

και η εξίσωση Laplace μπορεί να πάρει τη μορφή

$$(5.3.4)\ \Delta_2 Y_n + n(n+1)Y_n = 0$$

Για αυτό οι συντελεστές της Y_n της αναλλοίωτης λύσης της μορφής (5.3.1) είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Laplace - Betrami Δ_2 (με ιδιοτιμή την $n(n+1)$) , η οποία ονομάζεται *σφαιρική συνάρτηση τάξης* n**.**

Η εξίσωση (5.3.4) είναι αναλλοίωτη , άμα θέσω $n = -(m+1)$, αφού $n(n+1) = m(m+1)$. Για αυτό, αν (5.3.3) είναι μια λύση, έχουμε επίσης μια λύση της εξίσωσης Laplace , η οποία δίνεται από την συνάρτηση

$$(5.3.3')\ r^{-(n+1)}Y_n(\theta, \varphi)$$

Ακόμη , μια σειράς της οποίας οι όροι αποτελούν αναλλοίωτες λύσεις της μορφής (5.3.1) , (5.3.3) , (5.3.3΄) με σταθερούς συντελεστές

$$(5.3.5)\ u(r, \theta, \varphi) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)Y_n(\theta, \varphi)$$

Είναι μια λύση της εξίσωσης Laplace, από την αρχή της υπέρθεσης. Ο τύπος (5.3.5) δίνει μια απεικόνιση της γενικής λύσης και συνήθως προέρχεται από τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών.

Βιβλιογραφία

[1] **Α. Αρβανιτογεώργος**, Γεωμετρία Πολλαπλοτήτων ,Εκδόσεις: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, (2015)

[2] **Θ. Θεοχάρη Αποστολίδου , Χ. Μ. Α. Χαραλάμπους,** Θεωρία Galois , Εκδόσεις : Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, (2015)

[3] **Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη ,** Εισαγωγή στη θεωρία ομάδων , Εκδόσεις : :Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών , (2015)

[4] **Β. Ρόθος , Χ. Σφυράκης ,** Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις : Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών , (2015)

[5] **P. Olver , P. J.** Applications of Lie groups to Differential Equations Vol. 107 . Spinger Science & Business Media , (2000)

[6] **N. Ibragimov , Nail Kh.** ‘’Group Analysis of Ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie)’’ , Russian Mathematical Surveys 47(4) , 89

[7] **S. Helgason ,** Sophus Lie´s approach to differential equations , IAP lecture (2006)

[8] **Γ. Δάσιος ,** Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Πανεπιστήμιο Πατρών , (1991)