



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σχολή Θετικών επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Διπλωματική Εργασία
Τοπολογική και Διαφορική Δομή Χώρων
Πηλίκου.

Κιάμου Αντωνία

Επιβλέπων Καθηγητής: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Πάτρα, 2022

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Κιάμου Αντωνία.

Ιούνιος 2022

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέπων καθηγητή κύριο Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για την υπόδειξη του θέματος αυτής της εργασίας, την καθοδήγησή του καθώς και τις συμβουλές του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας στο πλαίσιο των προπτυχιακών σπουδών μου.

Κιάμου Αντωνία.

Περιεχόμενα.

1	Περίληψη.	5
2	Τοπολογικοί χώροι.	6
3	Λείες Πολλαπλότητες.	13
4	Ο χώρος πηλίκο και ο προβολικός χώρος.	21
5	Ο εφαπτόμενος χώρος.	33
6	Οι πολλαπλότητες Stiefel και Grassmann.	42
7	Βιβλιογραφία.	48
	References	48

1 Περίληψη.

Η διπλωματική αυτή εργασία πραγματεύεται τον χώρο πηλίκου καθώς και τη γεωμετρία του. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε ποιός ακριβώς είναι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, ορίζουμε κάποιες ήδη γνωστές τοπολογικές έννοιες. Αυτές θα είναι η βάση για να προχωρήσουμε στον ορισμό των τοπολογικών αλλά και λείων διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων. Περιγράφουμε αναλυτικά την λεία πολλαπλότητα και δίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών. Στην συνέχεια, είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τη δομή πηλίκου και παράλληλα την τοπολογία ενός χώρου πηλίκου. Σκοπός μας είναι να δείξουμε πώς από την δομή αυτή μπορούμε να δημιουργήσουμε μία τοπολογική αλλά και μία λεία πολλαπλότητα. Με την παρουσίαση των κατάλληλων προτάσεων, αυτό επιτυγχάνεται και μπορούμε πλέον να ορίσουμε το κεντρικό θέμα της εργασίας, τον προβολικό χώρο. Ο $\mathbb{R}P^n$ είναι ο χώρος πηλίκου του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, όπου $x \sim y \iff y = tx, t \neq 0$. Έτσι, περιγράφεται μια αντιστοιχία μεταξύ του προβολικού χώρου και του χώρου πηλίκου της $S^n/\sim$, με την $\sim$ να είναι η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας για $t = \pm 1$. Ως συνέπεια, έχουμε μια σαφή αναπαράσταση της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ και το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ και να εφοδιάζουμε τον προβολικό χώρο με δομή λείας πολλαπλότητας. Αφού αναλύσουμε το λείο άτλαντα που εφοδιάζει σε πολλαπλότητα τον προβολικό χώρο, συνεχίζουμε ορίζοντας τον εφαπτόμενο χώρο και την έννοια της λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων. Συγκεκριμένα, προβάλλονται κάποιες χρήσιμες προτάσεις σχετικά με τον εφαπτόμενο χώρο και έπειτα ορίζουμε τις εμφυτεύσεις, εμβαπτίσεις και υπεμβαπτίσεις. Αυτές θα μας βοηθήσουν να αναλύσουμε τις πολλαπλότητες Stiefel και Grassmann οι οποίες αποτελούν γενίκευση του προβολικού χώρου. Αφού δώσουμε επιγραμματικά κάποια θεωρήματα, φτάνουμε στο τελευταίο κεφάλαιο όπου ορίζουμε τις προαναφερόμενες πολλαπλότητες. Αποδεικνύεται έτσι πώς η Stiefel πολλαπλότητα είναι μία εμφυτευμένη πολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n \times p}$ και βρίσκουμε την διάστασή της. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τη Grassmann τοπολογία, να αποδείξουμε ότι είναι τοπολογική πολλαπλότητα και να την εφοδιάσουμε με τη δομή πηλίκου πολλαπλότητας. Τέλος, ταυτίζοντάς την με το χώρο πηλίκου $\mathbb{R}_*^{n \times p}/GL_p$, βρίσκουμε την διάστασή της και βλέπουμε ότι $Gr(1, n+1) = \mathbb{R}P^n$.

2 Τοπολογικοί χώροι.

Η Γενική Τοπολογία ασχολείται με τις ιδιότητες που παραμένουν αναλλοίωτες υπό ομοιομορφισμούς (συνεχείς, 1-1 και επί απεικονίσεις που έχουν συνεχείς αντίστροφες). Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζεται η έννοια του τοπολογικού χώρου, καθώς και ορισμένες εισαγωγικές προτάσεις που θα χρειαστούμε στην συνέχεια. Οι βασικές αναφορές μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι τα βιβλία [2], [6].

Ορισμός 2.1. Μία τοπολογία επί ενός συνόλου S είναι μια συλλογή $\mathcal{T}$ από υποσύνολα που περιέχουν το κενό σύνολο $\emptyset$ και το σύνολο S έτσι ώστε η ένωση οποιουδήποτε πλήθους στοιχείων του $\mathcal{T}$ ανήκει στο $\mathcal{T}$ και η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του $\mathcal{T}$ ανήκει στο $\mathcal{T}$. Δηλαδή, αν $U_\alpha \in \mathcal{T}$, για κάθε α στο σύνολο δεικτών A , τότε $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ και αν $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Τα στοιχεία του $\mathcal{T}$ καλούνται *ανοικτά σύνολα* και το ζεύγος $(S, \mathcal{T})$ καλείται *τοπολογικός χώρος*, ή απλώς *τοπολογικός χώρος* S . Μια *γειτονιά* ενός σημείου p στο S είναι ένα ανοικτό σύνολο U που περιέχει το p . Αν T_1 και T_2 δυο τοπολογίες επί ενός συνόλου S και $T_1 \subset T_2$, τότε λέμε ότι η T_1 είναι μικρότερη από την T_2 ή ότι η T_2 είναι μεγαλύτερη από την T_1 .

Παράδειγμα. Τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, όπως γνωρίζουμε από την ανάλυση, ορίζουν μια τοπολογία επί του $\mathbb{R}^n$, τη *συνήθη τοπολογία* επί του $\mathbb{R}^n$. Στην τοπολογία αυτή, ένα σύνολο U είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν για κάθε σημείο $p \in U$, υπάρχει μια ανοικτή μπάλα $B(p, \varepsilon)$ με κέντρο το σημείο p και ακτίνα ε που περιέχεται στο U . Θα θεωρούμε πάντα ότι ο $\mathbb{R}^n$ έχει την συνήθη τοπολογία, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Λήμμα 2.2. Έστω S ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο A είναι ανοικτό στο S αν και μόνο αν για κάθε $p \in A$, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V τέτοιο ώστε $p \in V \subset A$.

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Εάν το σύνολο A είναι ανοικτό, τότε παίρνουμε $V = A$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι για κάθε $p \in A$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V_p τέτοιο ώστε $p \in V_p \subset A$. Τότε

$$A \subset \bigcup_{p \in A} V_p \subset A,$$

Επομένως, ισχύει ότι $A = \bigcup_{p \in A} V_p$. Άρα ως ένωση ανοικτών συνόλων, το A είναι ανοικτό.

Μερικά βασικά παραδείγματα τοπολογικών χώρων είναι τα εξής :

Παράδειγμα 1. Για κάθε σύνολο S ορίζουμε την *τετριμμένη τοπολογία* η οποία είναι η συλλογή $\mathcal{S} = \{\emptyset, S\}$, που αποτελείται από το κενό σύνολο $\emptyset$ και ολόκληρο το σύνολο S .

Παράδειγμα 2. Για κάθε σύνολο S , έστω $\mathcal{S}$ να είναι η συλλογή όλων των υποσυνόλων του S . Τότε η $\mathcal{S}$ ορίζει μια τοπολογία επί του S , η οποία ονομάζεται *διακριτή τοπολογία*. Η διακριτή τοπολογία μπορεί να χαρακτηριστεί ως η τοπολογία στην οποία κάθε μονοσύνολο $\{p\}$ είναι ανοικτό. *Διακριτός χώρος* ονομάζεται ο τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την διακριτή τοπολογία.

Παράδειγμα 3. Θα ορίσουμε τώρα την τοπολογία των πεπερασμένων συμπληρωμάτων στον $\mathbb{R}^1$. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή υποσυνόλων του $\mathbb{R}^1$ που αποτελείται από το κενό σύνολο $\emptyset$, την γραμμή των πραγματικών αριθμών και τα συμπληρώματα πεπερασμένων συνόλων. Έστω F_α και F_i πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^1$ για κάποιο δείκτη α που ανήκει σε κάποιο σύνολο δεικτών A και $i = 1, \dots, n$. Έχουμε,

$$\bigcup_{\alpha} (\mathbb{R}^1 \setminus F_{\alpha}) = \mathbb{R}^1 \setminus \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$$

και

$$\bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R}^1 \setminus F_i) = \mathbb{R}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i$$

Εφόσον η αυθαίρετη τομή $\bigcap_{\alpha} A \in AF_{\alpha}$ και η πεπερασμένη ένωση $\bigcup_{i=1}^n F_i$ είναι και οι δυο πεπερασμένες, τότε η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς αυθαίρετες ενώσεις και πεπερασμένες τομές. Επομένως, η $\mathcal{S}$ ορίζει την τοπολογία των πεπερασμένων συμπληρωμάτων στον $\mathbb{R}^1$

Ορισμός 2.3. (Τοπολογία του υποχώρου.) Έστω $(S, \mathcal{S})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq S$. Ορίζουμε την συλλογή των υποσυνόλων T_A

$$T_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{S}\}.$$

Από την επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης και της τομής έχουμε,

$$\bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap A) = (\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}) \cap A$$

και

$$\bigcap_i (U_i \cap A) = (\bigcap_i U_i) \cap A,$$

από το οποίο έχουμε ότι η $\mathcal{T}_A$ είναι κλειστή ως προς αυθαίρετες ενώσεις και πεπερασμένες τομές. Επίσης, $\emptyset, A \in \mathcal{T}_A$. Επομένως, η $\mathcal{T}_A$ ορίζει μια τοπολογία επί του A , αυτή ονομάζεται τοπολογία του υποχώρου ή σχετική τοπολογία του A στο S .

Τα στοιχεία της $\mathcal{T}_A$ είναι ανοικτά στο A . Δηλαδή, είναι εφικτό ένα ανοικτό

σύνολο U στο A να μην είναι απαραίτητα ανοικτό στο S , τότε λέμε ότι το U είναι σχετικά ανοικτό στο A . Το υποσύνολο $A \subseteq S$ εφοδιασμένο με την τοπολογία του υποχώρου $\mathcal{T}_A$ ονομάζεται υπόχωρος του S .

Ορισμός 2.4. Μια υποσυλλογή $\mathcal{B}$ μιας τοπολογίας $\mathcal{T}$ επί ενός τοπολογικού χώρου S ονομάζεται *βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$* εάν δοθέντος ενός ανοικτού συνόλου U και σημείου $p \in U$, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $p \in B \subset U$. Τότε λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του τοπολογικού χώρου S ή αντίστοιχα ότι η $\mathcal{B}$ παράγει την τοπολογία S .

Παράδειγμα. Η συλλογή $\mathcal{B}$ όλων των ανοικτών μπαλών $B(p, r)$ του $\mathbb{R}^n$, όπου $p \in \mathbb{R}^n$ και $r \in \mathbb{R}^+$, είναι μια βάση της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 2.5. Μια συλλογή $\mathcal{B}$ ανοικτών συνόλων του S είναι βάση αν και μόνο αν κάθε ανοικτό σύνολο του S είναι ένωση συνόλων του $\mathcal{B}$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση και U ένα ανοικτό σύνολο του S . Για κάθε $p \in U$ υπάρχει ένα βασικά ανοικτό σύνολο B_p , έτσι ώστε $p \in B_p \subset U$. Επομένως, $U = \bigcup_{p \in U} B_p$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι κάθε ανοικτό σύνολο του S είναι ένωση από ανοικτά σύνολα του $\mathcal{B}$. Για ένα ανοικτό σύνολο U και ένα σημείο $p \in U$, εφόσον ισχύει ότι $U = \bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{B}} B_\alpha$ έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $B_\alpha \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $p \in B_\alpha \subset U$. Έτσι, η $\mathcal{B}$ είναι βάση.

Πρόταση 2.6. Έστω $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ μία βάση ενός τοπολογικού χώρου S και A υποχώρος του S . Τότε, το σύνολο $\{B_\alpha \cap A\}$ είναι μια βάση του A .

Απόδειξη. Έστω U' ένα ανοικτό σύνολο του A και $p \in U'$. Από τον ορισμό της υποχώρου τοπολογίας, έχουμε $U' = U \cap A$, για κάποιο ανοικτό σύνολο U στο S . Επειδή $p \in U \cap A \subset U$, υπάρχει ένα βασικά ανοικτό σύνολο B_α τέτοιο ώστε $p \in B_\alpha \subset U$. Τότε ισχύει

$$p \in B_\alpha \cap A \subset U \cap A = U',$$

κι έτσι η συλλογή $\{B_\alpha \cap A \mid B_\alpha \in \mathcal{B}\}$ είναι μια βάση του A .

Θα ορίσουμε τώρα το αξίωμα της δεύτερης αριθμησιμότητας, καθώς και ιδιότητα Hausdorff ενός τοπολογικού χώρου που θα χρειαστούμε στο επόμενο κεφάλαιο στον ορισμό των πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 2.7. Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται δεύτερος αριθμήσιμος εάν περιέχει μία αριθμήσιμη βάση.

Παράδειγμα. Ο $\mathbb{R}^n$ με την διακριτή τοπολογία δεν είναι δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Γενικότερα, οποιοδήποτε μη αριθμήσιμο σύνολο με την διακριτή τοπολογία δεν είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

Πρόταση 2.8. Ένας υπόχωρος A ενός δεύτερου αριθμήσιμου χώρου S είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.6., εάν $\mathcal{B} = \{B_i\}$ είναι μια μετρήσιμη βάση του S , τότε $B_\alpha := \{B_i \cap A\}$ είναι μετρήσιμη βάση του A .

Ορισμός 2.9. Ένας τοπολογικός χώρος S ονομάζεται *Hausdorff* εάν για οποιαδήποτε δυο σημεία $x, y \in S$ με $x \neq y$, υπάρχουν δυο ξένα ανοικτά σύνολα U, V , τέτοια ώστε $x \in U$ και $y \in V$.

Ένας χώρος Hausdorff ονομάζεται *κανονικός*, αν για οποιαδήποτε δύο ξένα κλειστά σύνολα $F, G \subset S$, υπάρχουν δύο ξένα ανοικτά σύνολα U, V τέτοια ώστε $F \subset U$ και $G \subset V$.

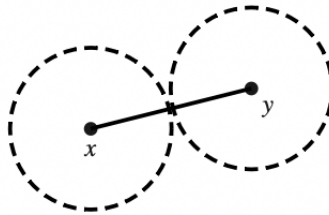
Πρόταση 2.10. Κάθε μονοσύνολο σε έναν Hausdorff χώρο S είναι κλειστό.

Απόδειξη. Έστω $x \in S$. Για κάθε $y \in S - \{x\}$, από την ιδιότητα Hausdorff υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V τέτοια ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Συγκεκριμένα έχουμε,

$$y \in V \subset S - U \subset S - \{x\}.$$

Από το Λήμμα 2.2. το σύνολο $S - \{x\}$ είναι ανοικτό. Άρα, το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό.

Παράδειγμα. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι χώρος Hausdorff. Δοθέντων δύο διαφορετικών σημείων x, y του $\mathbb{R}^n$, αν $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$, τότε οι ανοικτές μπάλες $B(x, \varepsilon)$ και $B(y, \varepsilon)$ θα είναι ξένες.



2.1. Δύο ξένες γειτονιές του $\mathbb{R}^n$

Πρόταση 2.11. Κάθε υπόχωρος A ενός χώρου Hausdorff S είναι Hausdorff.

Απόδειξη. Έστω x και y σημεία του A με $x \neq y$. Επειδή ο S είναι χώρος

Hausdorff, υπάρχουν U και V ξένες μεταξύ τους γειτονιές των x και y αντίστοιχα στον χώρο S . Τότε, τα $U \cap A$ και $V \cap A$ είναι ξένες ανοικτές γειτονιές των x και y αντίστοιχα στον χώρο A . Επομένως, έχουμε το ζητούμενο.

Θα χρειαστεί επίσης να ορίσουμε την τοπολογία *γινόμενο*. Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X και Y , θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του $X \times Y$ της μορφής $U \times V$, όπου U ανοικτό στο X και V ανοικτό στον Y . Θα καλούμε τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ *βασικά ανοικτά σύνολα* του $X \times Y$. Εάν $U_1 \times V_1$ και $U_2 \times V_2$ ανήκουν στη συλλογή $\mathcal{B}$ τότε

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

τα οποία επίσης ανήκουν στη συλλογή $\mathcal{B}$. Αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες ώστε να είναι βάση και ορίζει μια τοπολογία επί του $X \times Y$ η οποία ονομάζεται *τοπολογία γινόμενο*.

Πρόταση 2.12. Έστω $\{U_i\}$ και $\{V_j\}$ βάσεις των τοπολογικών χώρων X και Y αντίστοιχα. Τότε, $\{U_i \times V_j\}$ είναι βάση του $X \times Y$.

Απόδειξη. Έστω W ένα ανοικτό σύνολο του $X \times Y$ και ένα σημείο $(x, y) \in W$. Τότε υπάρχει ένα βασικά ανοικτό σύνολο (δηλαδή ένα ανοικτό σύνολο της βάσης) $U \times V$ στον χώρο $X \times Y$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in U \times V \subset W$. Εφόσον το U είναι ανοικτό σύνολο του X και $\{U_i\}$ είναι μια βάση του X , τότε έχουμε $x \in U_i \subset U$, για κάποιο U_i . Παρόμοια, $y \in V_j \subset V$, για κάποιο V_j . Επομένως, $(x, y) \in U_i \times V_j \subset U \times V \subset W$. Άρα, από τον ορισμό της βάσης, το $\{U_i \times V_j\}$ είναι μια βάση του χώρου $X \times Y$.

Πρόταση 2.13. Το γινόμενο δύο χώρων που ικανοποιούν το δεύτερο αξίωμα αριθμησιμότητας, είναι επίσης χώρος ο οποίος ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα αριθμησιμότητας.

Πρόταση 2.14. Το γινόμενο δύο Hausdorff χώρων X και Y είναι επίσης χώρος Hausdorff.

Απόδειξη. Έστω δύο διαφορετικά σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $y_1 \neq y_2$. Επειδή ο Y είναι Hausdorff χώρος, τότε υπάρχουν τα ξένα, ανοικτά σύνολα $U_1, U_2 \subset Y$ τέτοια ώστε $y_1 \in U_1$ και $y_2 \in U_2$. Τότε τα σύνολα $X \times U_1$ και $X \times U_2$ είναι ανοικτές και ξένες μεταξύ του γειτονιές των (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα. Άρα, ο $X \times Y$ είναι χώρος Hausdorff.

Μία από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες που θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια είναι αυτή της συνέχειας σε έναν τοπολογικό χώρο. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας από την ανάλυση έχουμε:

Έστω $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση από τον τοπολογικό χώρο X στον Y . Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $p \in X$ εάν για κάθε γειτονιά V του

$f(p)$ στον χώρο Y , υπάρχει γειτονιά U του p στον X τέτοια ώστε $f(U) \subset V$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στον X , αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $p \in X$.

Πρόταση 2.15. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω V ανοικτό σύνολο του Y . Για να δείξουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον X , παίρνουμε σημείο $p \in f^{-1}(V)$. Τότε $f(p) \in V$. Επειδή η f είναι συνεχής στο p , τότε υπάρχει γειτονιά U του p έτσι ώστε $f(U) \subset V$. Επομένως, $p \in U \subset f^{-1}(V)$. Από το Λήμμα 2.2., έχουμε ότι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον τοπολογικό χώρο X .

($\Leftarrow$) Έστω p σημείο του X και V μια γειτονιά του $f(p)$ στον χώρο Y . Από την υπόθεση, $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον X . Εφόσον, $f(p) \in V$, $p \in f^{-1}(V)$. Τότε το σύνολο $U = f^{-1}(V)$ είναι μια γειτονιά του p τέτοια ώστε $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$, άρα η f είναι συνεχής στο p .

Παράδειγμα. Η απεικόνιση προβολής $\pi : X \times Y \rightarrow X$, με τύπο $\pi(x, y) = x$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω U ένα ανοικτό σύνολο του X . Τότε $\pi^{-1}(U) = U \times Y$, το οποίο είναι ανοικτό της τοπολογίας γινόμενο $X \times Y$.

Πρόταση 2.16. Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχής απεικόνιση: αν $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ συνεχείς απεικονίσεις, τότε η $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω V ανοικτό σύνολο του Z . Τότε ισχύει:

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)),$$

γιατί, για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι:

$$x \in (g \circ f)^{-1}(V) \iff g(f(x)) \in V \iff f(x) \in g^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

Από την Πρόταση 2.15 εφόσον η g είναι συνεχής, το $g^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον Y . Αντίστοιχα, επειδή η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(g^{-1}(V))$ είναι ανοικτό στον X . Έτσι, η $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι συνεχής.

Πρόταση 2.17. Μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής, αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε κλειστού συνόλου είναι κλειστή.

Πρόταση 2.18. Ένας υπόχωρος A ενός τοπολογικού χώρου S είναι συμπαγής, αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A στον S έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Πρόταση 2.19. Ένα κλειστό υποσύνολο F ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου S είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω $\{U_\alpha\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του F στο S . Η συλλογή $\{U_\alpha, S-F\}$ είναι τότε ένα ανοικτό κάλυμμα του S . Από την συμπαγεία του S , υπάρχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_\alpha, S-F\}$ το οποίο καλύπτει το S , ώστε $F \subset \bigcup_i U_{\alpha i}$. Επομένως, το F είναι συμπαγές σύνολο.

Πρόταση 2.20. Κάθε συμπαγές υποσύνολο K ενός χώρου Hausdorff S είναι κλειστό σύνολο.

Πρόταση 2.21. Η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση και K συμπαγές υποσύνολο του X . Έστω $\{U_\alpha\}$ κάλυμμα του $f(K)$ από ανοικτά σύνολα του Y . Επειδή η f είναι συνεχής, οι αντίστροφες εικόνες $f^{-1}(U_\alpha)$ είναι όλες ανοικτές. Επιπλέον,

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$$

Έτσι, τα $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του K στο χώρο X . Από τη συμπαγεία του K , υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{f^{-1}(U_{\alpha i})\}$ τέτοια ώστε,

$$K \subset \bigcup_i f^{-1}(U_{\alpha i}) = f^{-1}\left(\bigcup_i U_{\alpha i}\right).$$

Άρα, $f(K) \subset \bigcup_i U_{\alpha i}$ και τελικά το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Πρόταση 2.22. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ από έναν συμπαγή χώρο X σε έναν Hausdorff χώρο Y είναι κλειστή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου X . Από την Πρόταση 2.19 το F είναι συμπαγές. Ως εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω συνεχής απεικόνισης, το $f(F)$ είναι συμπαγές του Y . Ως συμπαγές υποσύνολο του Hausdorff χώρου Y , το $f(F)$ είναι κλειστό.

Πρόταση 2.23. Μια συνεχής και 1-1 απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ από τον συμπαγή χώρο X στο χώρο Hausdorff Y είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Από την πρόταση Πρόταση 2.17., για να δείξουμε ότι η $f^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι συνεχής, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε κλειστό σύνολο $F \in X$, το σύνολο $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ είναι κλειστό του Y , δηλαδή ότι η απεικόνιση f είναι κλειστή. Από την παραπάνω πρόταση έχουμε το ζητούμενο.

3 Λείες Πολλαπλότητες.

Θα ορίσουμε πρώτα τις πολλαπλότητες έτσι ώστε να μπορέσουμε στη συνέχεια να ορίσουμε τον χώρο πηλίκο. Υπάρχουν διάφορα είδη πολλαπλοτήτων για παράδειγμα τοπολογικές πολλαπλότητες, λείες πολλαπλότητες, μιγαδικές πολλαπλότητες κ.α. Παρακάτω θα αναλυθούν οι τοπολογικές καθώς και οι λείες πολλαπλότητες. Θα ορισθεί η έννοια του μεγιστικού άτλαντα, ο οποίος εφοδιάζει μια τοπολογική πολλαπλότητα με μια λεία διαφορίσιμη δομή. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν χρήσιμες προτάσεις μαζί με παραδείγματα τα οποία θα μας βοηθήσουν στην ερμηνεία του προβολικού χώρου. Οι κύριες αναφορές είναι από το βιβλίο [5] και ειδικότερα από το κεφάλαιο 2, παράγραφος 5 και το βιβλίο [1].

3.1 Τοπολογικές Πολλαπλότητες.

Ορισμός 3.1.1. Μία απεικόνιση $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται λεία κλάσης C^k στο σημείο $p \in U$, αν υπάρχουν οι μερικές παραγώγοι μέχρι την k τάξη και είναι συνεχείς.

Η f ονομάζεται λεία ή διαφορίσιμη στο $U \subset \mathbb{R}^n$ αν είναι κλάσης C^k , για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 3.1.2. Ένας τοπολογικός χώρος M ονομάζεται τοπικά Ευκλείδειος χώρος διάστασης n εάν κάθε σημείο $p \in M$ έχει μια ανοικτή γειτονιά U τέτοια ώστε, να υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το ζεύγος (U, φ) ονομάζεται *χάρτης* ή *σύστημα συντεταγμένων* στο U , το U ονομάζεται *συντεταγμένο ανοικτό σύνολο* και η απεικόνιση φ ονομάζεται *απεικόνιση συντεταγμένων*.

Ορισμός 3.1.3. Μία τοπολογική πολλαπλότητα M είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος είναι χώρος Hausdorff, δεύτερος αριθμήσιμος και τοπικά Ευκλείδειος.

Παράδειγμα. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα με χάρτη $(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})$ όπου $I_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η ταυτοτική απεικόνιση. Κάθε ανοικτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι επίσης τοπολογική πολλαπλότητα, με χάρτη (U, I_U) .

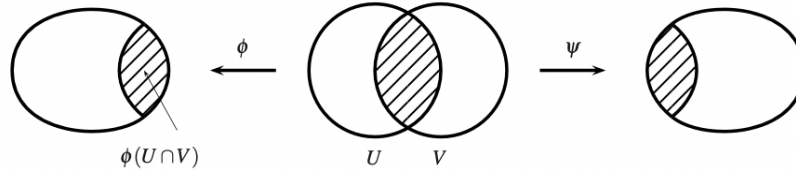
Υπενθυμίζουμε ότι η ιδιότητα Hausdorff ενός χώρου και το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας είναι ιδιότητες που "κληρονομούνται", δηλαδή ένας Hausdorff χώρος έχει υπόχωρο Hausdorff και αντίστοιχα ένας δεύτερος αριθμήσιμος χώρος έχει υπόχωρο δεύτερο αριθμήσιμο. Άρα, οποιοσδήποτε υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι αυτόματα Hausdorff και δεύτερος αριθμήσιμος.

Ορισμός 3.1.4. Έστω M μια τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n και έστω $(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n), (V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ δύο χάρτες αυτής. Οι χάρτες ονομάζονται C^∞ συμβατοί αν οι απεικονίσεις :

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V), \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

είναι λείες (με την συνήθη έννοια λείων απεικονίσεων από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$).

Αυτές οι δυο απεικονίσεις ονομάζονται απεικονίσεις μεταφοράς μεταξύ των χαρτών. Αν το $U \cap V = \emptyset$, τότε οι χάρτες είναι προφανώς C^∞ συμβατοί.



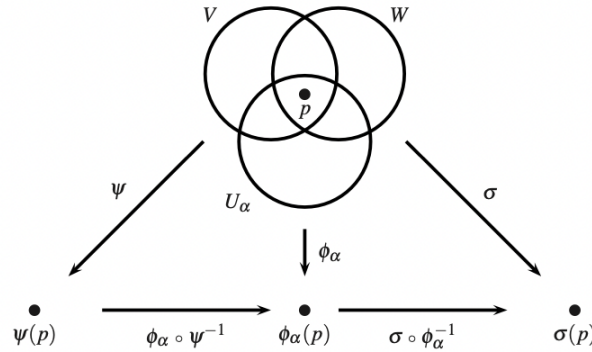
3.1 Η απεικόνιση μεταφοράς $\psi \circ \phi^{-1}$ ορισμένη στο $\phi(U \cap V)$.

Ορισμός 3.1.5. Έστω M ένας Ευκλείδειος χώρος. Ονομάζουμε C^∞ άτλαντα ή απλώς άτλαντα, τη συλλογή $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ από C^∞ συμβατούς χάρτες που καλύπτουν τον χώρο M , δηλαδή $M = \cup_\alpha U_\alpha$.

Λήμμα 3.1.6. Έστω $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ άτλαντας ενός τοπικά Ευκλείδειου χώρου. Εάν δύο χάρτες (V, ψ) , (W, σ) είναι και οι δυο συμβατοί με τον άτλαντα $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, τότε είναι και συμβατοί μεταξύ τους.

Απόδειξη. Έστω $p \in V \cap W$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\sigma \circ \psi^{-1}$ είναι C^∞ στο $\psi(p)$. Επειδή, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ είναι άτλας της M , ισχύει ότι $p \in U_\alpha$, για κάποιο α . Τότε, $p \in V \cap W \cap U_\alpha$.

Παρατηρώντας το παρακάτω διάγραμμα έχουμε ότι $\sigma \circ \psi^{-1} = (\sigma \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \psi^{-1}$ είναι C^∞ στο $\psi(p)$, και άρα στο $\psi(p)$. Αφού το p είναι τυχαίο σημείο του $V \cap W$, αυτό αποδεικνύει ότι η $\sigma \circ \psi^{-1}$ είναι C^∞ στο $\psi(V \cap W)$. Με τον ίδιο τρόπο, έχουμε ότι η απεικόνιση $\psi \circ \sigma^{-1}$ είναι C^∞ στο $\sigma(V \cap W)$.



3.2. Οι χάρτες (V, ψ) , (W, σ) συμβατοί με τον άτλαντα.

Ορισμός 3.1.7. Ένας άτλαντας M σε έναν Ευκλείδειο χώρο ονομάζεται μεγιστικός, αν δεν περιέχεται σε έναν μεγαλύτερο άτλαντα, δηλαδή αν για κάθε άτλαντα V με $M \subseteq V$ ισχύει $V = M$.

Ορισμός 3.1.8. Μία λεία ή C^∞ πολλαπλότητα είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με έναν μεγιστικό άτλαντα. Ο μεγιστικός άτλαντας ονομάζεται λεία ή διαφορική δομή της τοπολογικής πολλαπλότητας.

Πρόταση 3.1.9. Κάθε άτλαντας περιέχεται σε έναν μοναδικό μεγιστικό άτλαντα.

Πόρισμα 3.1.10. Μία λεία πολλαπλότητα είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα εφοδιασμένη με έναν λείο άτλαντα.

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος M είναι μία λεία πολλαπλότητα, αρκεί να ελέγξουμε αν ο χώρος M είναι Hausdorff και δεύτερος αριθμήσιμος και εάν είναι εφοδιασμένη με έναν λείο άτλαντα (λόγω του πορίσματος όχι απαραίτητα μεγιστικό.)

Πώς όμως μπορούμε να καταλάβουμε ότι ένα σύνολο X επιδέχεται έναν άτλαντα; Υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν επιδέχονται άτλαντα και επομένως δεν μπορούν να είναι πολλαπλότητες. Ένα απλό παράδειγμα είναι το σύνολο των ρητών αριθμών: αυτό το σύνολο δεν επιδέχεται ούτε χάρτες, διότι αν αυτό ίσχυε τότε δεν θα ήταν αριθμήσιμο. Επίσης, σύνολα τα οποία δεν "φαίνονται" διαφορίσιμα μπορεί να επιδέχονται άτλαντα. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο $\gamma(t) = (t, |t|)$ και έστω X το πεδίο ορισμού της γ . Θεωρούμε τον χάρτη $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} : (t, |t|) \mapsto t$. Τελικά, ο $A := \{(X, \varphi)\}$ είναι ένας άτλαντας του X , άρα είναι πολλαπλότητα.

Τώρα, μπορούμε να δώσουμε κάποια παραδείγματα τοπολογικών και λείων πολλαπλοτήτων.

Παράδειγμα 1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι μια λεία πολλαπλότητα με τον μοναδικό χάρτη $(\mathbb{R}^n, r^1, \dots, r^n)$, όπου $r^1, \dots, r^n$ είναι οι συνήθεις συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 2. Σε μία πολλαπλότητα μηδενικής διάστασης κάθε μονοσύνολο είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^0$ και επομένως είναι ανοικτό. Άρα, μία πολλαπλότητα μηδενικής διάστασης είναι ένα διακριτό σύνολο. Από το αξίωμα της δεύτερης αριθμησιμότητας, αυτό το σύνολο πρέπει να είναι δεύτερο αριθμήσιμο.

Παράδειγμα 3. Έστω υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, το γράφημα της f ορίζεται ως το σύνολο $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in A \times \mathbb{R}^m\}$. Εάν $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι λεία, τότε οι χάρτες

$$\phi : \Gamma(f) \rightarrow U, \quad (x, f(x)) \mapsto x$$

και

$$(1, f) : U \rightarrow \Gamma(f), \quad x \mapsto (x, f(x)),$$

είναι συνεχείς και αντίστροφες μεταξύ τους, και άρα είναι ομοιομορφισμοί. Το γράφημα $\Gamma(f)$ μιας C^∞ συνάρτησης $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ έχει άτλαντα με χάρτη $(\Gamma(f), \phi)$,

και επομένως είναι λεία πολλαπλότητα. Από αυτό παρατηρούμε ότι πολλές γνωστές μας επιφάνειες όπως τα παραβολοειδή είναι πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 4. Θα δείξουμε ότι η μοναδιαία σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ είναι λεία πολλαπλότητα. Αρχικά, η S^2 με την επαγόμενη τοπολογία από τον $\mathbb{R}^3$, είναι χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση. Χρησιμοποιώντας την στερεογραφική προβολή, θα εφοδιάσουμε την S^2 με έναν χάρτη. Συγκεκριμένα, έστω $N = \{(0, 0, 1)\}$ ο βόρειος πόλος της σφαίρας. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $U_N = S^2 \setminus \{N\}$ και την στερεογραφική προβολή

$$\phi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

με τύπο

$$\phi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right).$$

Η ϕ_N είναι 1-1, επί και συνεχής με αντίστροφη την

$$\phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_N, \quad \phi_N^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

Δηλαδή, η ϕ_N είναι ομοιομορφισμός. Θεωρούμε το σύνολο $U_S = S^2 \setminus \{S\}$, όπου $S = \{(0, 0, -1)\}$ ο νότιος πόλος της σφαίρας. Θεωρούμε ξανά, την στερεογραφική προβολή

$$\phi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0\right), \quad z \neq -1$$

Παρόμοια, η ϕ_S είναι ομοιομορφισμός με αντίστροφη την

$$\phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_S, \quad \phi_S^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

Καταλήγουμε ότι, για κάθε $p \in S^2$, υπάρχει τοπικός χάρτης (U, ϕ) στο p . Επομένως, η S^2 είναι τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης 2. Για να δείξουμε ότι είναι λεία πολλαπλότητα αρκεί να την εφοδιάσουμε με έναν λείο άτλαντα.

Έχουμε ότι $U_S \cup U_N = S^2$, όπου η S^2 με την επαγόμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^3$ και δείξαμε ότι οι απεικονίσεις ϕ_S, ϕ_N είναι ομοιομορφισμοί. Η σύνθεσή τους :

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \phi_N(U_N \cap U_S) \rightarrow \phi_S(U_N \cap U_S), \quad \phi_S \circ \phi_N^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

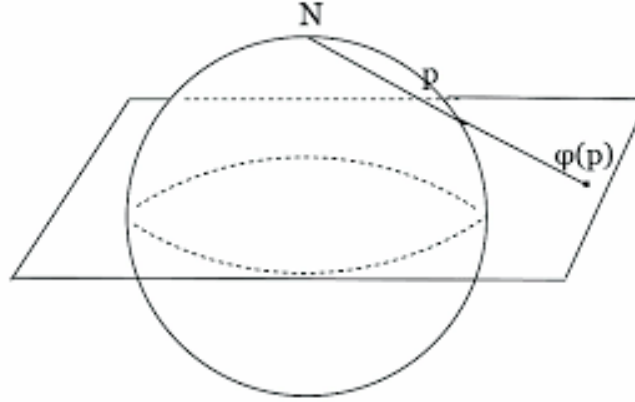
είναι λεία στο ανοικτό $\phi_N(U_S \cap U_N) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$. Αντίστοιχα,

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} : \phi_S(U_S \cap U_N) \rightarrow \phi_N(U_S \cap U_N) \quad \phi_N \circ \phi_S^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

είναι λεία. Άρα, ο $A = \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ είναι ένας λείος άτλαντας της S^2 . Τελικά, η σφαίρα είναι μια λεία πολλαπλότητα διάστασης 2.

(Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε 6 χάρτες στην S^2 , οι οποίοι αντιστοιχούν στα έξι ημισφαίρια και αρκεί να δείξουμε με βάση τους παραπάνω ορισμούς ότι είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης 2. Αυτοί είναι :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x < 0\}, & \phi_1(x, y, z) &= (y, z) \\ U_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x < 0\}, & \phi_2(x, y, z) &= (y, z) \\ &\vdots & & \vdots \\ U_6 &= \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}, & \phi_6(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$



3.3. Η στερεογραφική προβολή της σφαίρας.

Παράδειγμα 5. Έστω $\mathcal{E}$ ένας n -διάστατος διανυσματικός χώρος. Τότε δοθείσας μιας βάσης $(e_i)_i$, $i = 1, \dots, n$ της $\mathcal{E}$, η συνάρτηση

$$\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (x^1 \dots x^n)$$

τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ είναι χάρτης του $\mathcal{E}$. Όλοι οι χάρτες που είναι κατασκευασμένοι με αυτόν τον τρόπο είναι μεταξύ τους συμβατοί, επομένως δημιουργούν έναν άτλαντα για το σύνολο $\mathcal{E}$, το οποίο δίνει στο σύνολο τη δομή της πολλαπλότητας. Συνεπώς, κάθε διανυσματικός χώρος είναι γραμμική πολλαπλότητα κατά φυσικό τρόπο.

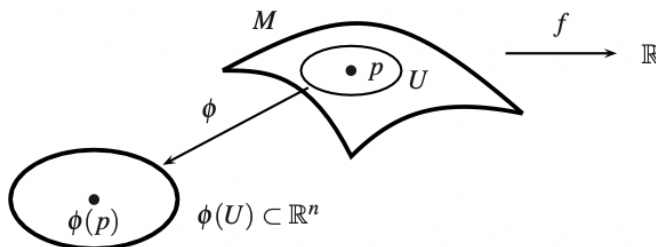
Πρόταση 3.1.11. Έστω M_1, M_2 πολλαπλότητες διάστασης m και n αντίστοιχα. Το σύνολο $M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$. Αν $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ χάρτες των πολλαπλοτήτων M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \quad (x_1, x_2) \mapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$$

είναι χάρτης για το σύνολο $M_1 \times M_2$. Όλοι οι χάρτες δημιουργούν έναν άτλαντα και με την διαφορετική δομή που ορίζεται από αυτόν, το $M_1 \times M_2$ ονομάζεται το γινόμενο των πολλαπλοτήτων M_1 και M_2 . Η τοπολογία αυτού είναι ισοδύναμη με την τοπολογία γινόμενου. Η διάσταση της πολλαπλότητας αυτής είναι $n + m$.

3.2. Λείες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Αφού ορίσαμε τις λείες πολλαπλότητες, θα μελετήσουμε τις απεικονίσεις μεταξύ αυτών. Λόγω της C^∞ συμβατότητας των χαρτών ενός άτλαντα, οι λείες απεικονίσεις είναι ανεξάρτητες από την επιλογή των χαρτών.



3.4. Λεία πραγματική συνάρτηση $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός 3.2.1. Έστω M μια λεία πολλαπλότητα διάστασης n . Μία συνάρτηση $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται C^∞ ή λεία στο $p \in M$, αν υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) στο p τέτοιος ώστε η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία στο $\phi(p)$. (Με την έννοια του απειροστικού λογισμού.)

Παρατήρηση. Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του χάρτη (U, ϕ) . Πράγματι, αν (V, ψ) ένας άλλος χάρτης στο $p \in M$, τότε στο $\psi(U \cap V)$ έχουμε ότι,

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$$

η οποία είναι λεία ως σύνθεση C^∞ στο $\psi(p)$.

Μια συνάρτηση $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται λεία στο ανοικτό $U \subseteq M$ αν είναι λεία σε κάθε σημείο $p \in U$.

Πρόταση 3.2.2. Έστω M λεία πολλαπλότητα διάστασης n και $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

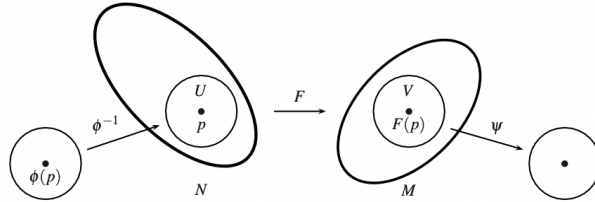
- (i) Η συνάρτηση $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ .
- (ii) Υπάρχει λείος άτλαντας A της M τέτοιος ώστε για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in A$ η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία.
- (iii) Για κάθε χάρτη (V, ψ) στην M , η συνάρτηση $f \circ \psi^{-1}: \psi(V) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία.

Απόδειξη. (ii) $\Rightarrow$ (i) : Αυτό ισχύει από τον ορισμό της λείας συνάρτησης, αφού από το (ii) κάθε σημείο $p \in M$ έχει γειτονιά (U, ϕ) τέτοια ώστε η $f \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ στο $\phi(p)$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Έστω (V, ψ) ένας τυχαίος χάρτης της M και έστω $p \in M$. Από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι η $f \circ \psi^{-1}$ είναι λεία στο $\psi(p)$. Αφού το p ήταν τυχαίο σημείο στο V , η $f \circ \psi^{-1}$ είναι λεία στο $\psi(V)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Προφανές.

Ορισμός 3.2.3. Έστω N, M πολλαπλότητες διάστασης n και m αντίστοιχα. Μια συνεχής απεικόνιση $F : N \rightarrow M$ είναι λεία σε ένα σημείο $p \in N$, αν υπάρχουν χάρτες (V, ψ) στο $F(p)$ και (U, ϕ) στο p τέτοιοι ώστε η σύνθεση:
 $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, είναι λεία στο $\phi(p)$.



3.5. Απεικόνιση $F : N \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Παρατήρηση. Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των χαρτών (V, ψ) , (U, ϕ) . Πράγματι, αν επιλέξω (U_1, ϕ_1) , (V_1, ψ_1) χάρτες στο p και $F(p)$ αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση $\psi_1 \circ F \circ \phi_1^{-1} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \phi_1^{-1})$, είναι επίσης λεία (λόγω συμβατότητας χαρτών στις M, N και εξ'ορισμού.).

Πρόταση 3.2.4. Έστω M, N λείες πολλαπλότητες και $F : M \rightarrow N$ συνεχής απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(i) Η απεικόνιση $F : M \rightarrow N$ είναι C^∞ .
(ii) Υπάρχουν άτλαντες $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ για τις πολλαπλότητες N, M αντίστοιχα τέτοιοι ώστε για κάθε χάρτη (U, ϕ) , (V, ψ) στους $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ αντίστοιχα, η απεικόνιση

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

είναι C^∞ .

(iii) Για κάθε χάρτη (U, ϕ) , (V, ψ) στις N, M αντίστοιχα, η απεικόνιση :

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

είναι C^∞ .

Απόδειξη. *(ii) $\Rightarrow$ (i)* : Έστω $p \in N$. Θεωρούμε (U, ϕ) χάρτη του p στον άτλαντα $\mathcal{U}$ και αντίστοιχα (V, ψ) χάρτη του $F(p)$ στο $\mathcal{V}$. Από το *(ii)*, η $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ στο $\phi(p)$. Από τον ορισμό της λείας απεικόνισης, η $F : N \rightarrow M$ είναι C^∞ στο p . Εφόσον, το p ήταν τυχαίο σημείο της N , τότε η $F : N \rightarrow M$ είναι C^∞ παντού.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Έστω οι χάρτες (U, ϕ) , (V, ψ) στις N, M αντίστοιχα τέτοιοι ώστε $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$. Έστω $p \in U \cap F^{-1}(V)$. Τότε (U, ϕ) είναι χάρτης του p και (V, ψ) χάρτης του $F(p)$. Από την παραπάνω παρατήρηση η $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι λεία στο $\phi(p)$ και αφού το p ήταν τυχαίο σημείο του $\phi(U \cap F^{-1}(V))$, η απεικόνιση $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ .

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Προφανές.

Πρόταση 3.2.5. Αν $F : N \rightarrow M$ και $G : M \rightarrow P$ είναι C^∞ απεικονίσεις μεταξύ των πολλαπλοτήτων, τότε η σύνθεση $G \circ F : N \rightarrow P$ είναι C^∞ .

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi), (V, \psi), (W, \sigma)$ χάρτες των N, M και P αντίστοιχα. Τότε,

$$\sigma \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1} = (\sigma \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}).$$

Επειδή οι F, G είναι διαφορίσιμες, από την παραπάνω πρόταση, έχουμε ότι οι $\sigma \circ G \circ \psi^{-1}$, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ . Ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων ανοικτών συνόλων Ευκλείδειων χώρων η $\sigma \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ . Άρα, η $G \circ F$ είναι C^∞ .

Παράδειγμα. Έστω M, N πολλαπλότητες και $\pi : M \rightarrow N, \pi(p, q) = p$ η προβολή της πρώτης συντεταγμένης. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση προβολής π είναι C^∞ απεικόνιση.

Έστω (p, q) τυχαίο σημείο του $M \times N$. Έστω $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^m)$, $(V, \psi) = (V, \psi^1, \dots, \psi^n)$ οι γειτονιές συντεταγμένων των p και q στις M και N αντίστοιχα. Από προηγούμενη πρόταση $(U \times V, \phi \times \psi) = (U \times V, x^1, \dots, x^m, \psi^1, \dots, \psi^n)$ είναι γειτονιά του (p, q) . Τότε η απεικόνιση

$$(\phi \circ \pi \circ (\phi \times \psi)^{-1})(\alpha^1, \dots, \alpha^m, b^1, \dots, b^n) = (\alpha^1, \dots, \alpha^m),$$

$$(\phi \circ \pi \circ (\phi \times \psi)^{-1}) : (\phi \times \psi)(U \times V) \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$$

είναι λεία απεικόνιση, άρα η π είναι C^∞ στο (p, q) . Επειδή, το (p, q) ήταν τυχαίο σημείο του $M \times N$, η απεικόνιση προβολής π είναι C^∞ στο $M \times N$.

4 Ο χώρος πηλίκο και ο προβολικός χώρος.

4.1. Ο χώρος πηλίκο.

Ξεκινάμε με μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο και ταυτίζουμε κάθε κλάση ισοδυναμίας με ένα σημείο. Εάν το αρχικό σύνολο είναι τοπολογικός χώρος, τότε μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο πηλίκο με μια τοπολογία τέτοια ώστε η κανονική απεικόνιση προβολής να είναι συνεχής. Αντίστοιχα, μπορούμε να δημιουργήσουμε ομάδες πηλίκο, δακτύλιους πηλίκο ή έναν διανυσματικό χώρο πηλίκο. Ακόμα κι αν ο αρχικός μας χώρος είναι πολλαπλότητα, ο χώρος πηλίκο δεν είναι απαραίτητα πολλαπλότητα. Σε αυτή την παράγραφο θα δοθούν οι απαραίτητες συνθήκες υπό τις οποίες ο χώρος πηλίκο είναι τοπολογική πολλαπλότητα καθώς και θα μελετηθεί ο προβολικός χώρος. Βασική αναφορά αυτού του κεφαλαίου είναι τα βιβλία [5], [1].

Θυμίζουμε ότι μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο S είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ ενός $x \in S$ είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του S τα οποία είναι ισοδύναμα με το x . Μία σχέση ισοδυναμίας στο S , χωρίζει το σύνολο σε ξένες κλάσεις ισοδυναμίας. Ορίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως $S/\sim$ και καλούμε το σύνολο πηλίκο του S από την σχέση ισοδυναμίας $\sim$. Υπάρχει η κανονική απεικόνιση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$, $S \ni x \mapsto [x]$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύνολο S είναι ένας τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε μια τοπολογία επί του $S/\sim$ θεωρώντας ένα σύνολο $U \subset S/\sim$ να είναι ανοικτό εάν και μόνο αν το σύνολο $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο S . Προφανώς, τα σύνολα $\emptyset$, $S/\sim$ είναι ανοικτά. Επίσης,

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} \pi^{-1}(U_{\alpha})$$

και

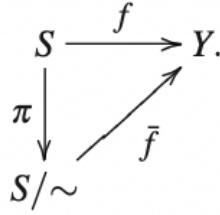
$$\pi^{-1}\left(\bigcap_i U_i\right) = \bigcap_i \pi^{-1}(U_i),$$

άρα, η συλλογή ανοικτών συνόλων του $S/\sim$ είναι κλειστή υπό πεπερασμένες τομές και ανθαίρετες ενώσεις και τελικά είναι τοπολογία. Αυτή ονομάζεται τοπολογία πηλίκο επί του $S/\sim$. Με την τοπολογία αυτή, το σύνολο $S/\sim$ ονομάζεται χώρος πηλίκο του S ως προς την σχέση ισοδυναμίας $\sim$. Με την τοπολογία πηλίκο επί του $S/\sim$, η απεικόνιση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$ είναι αυτόματα συνεχής, αφού η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού συνόλου του $S/\sim$ είναι ανοικτό από τον ορισμό ανοικτού του S .

Έστω $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο τοπολογικό χώρο S και $S/\sim$ η τοπολογία πηλίκο. Έστω η συνάρτηση $f : S \rightarrow Y$ από τον τοπολογικό χώρο S στον τοπολογικό χώρο Y , η οποία είναι σταθερή ως προς κάθε κλάση ισοδυναμίας. Τότε, επάγεται η απεικόνιση $\bar{f} : S/\sim \rightarrow Y$ με τύπο

$$\bar{f}([p]) = f(p),$$

για κάθε $p \in S$. Δηλαδή, δημιουργείται το εξής μεταθετικό διάγραμμα :



Πρόταση 4.1.1. Η επαγόμενη απεικόνιση $\bar{f} : S/\sim \rightarrow Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η απεικόνιση $f : S \rightarrow Y$ είναι συνεχής.

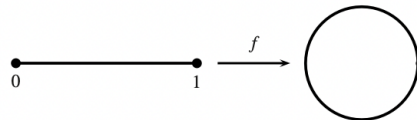
Απόδειξη. ($\Rightarrow$). Εάν η $\bar{f}$ είναι συνεχής, τότε η απεικόνιση $f := \bar{f} \circ \pi$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

($\Leftarrow$) Έστω ότι η f είναι συνεχής. Έστω $V \subset Y$ ανοικτό. Τότε, $f^{-1}(V) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))$ είναι ανοικτό στο S . Από τον ορισμό της πηλίκου τοπολογίας, το σύνολο $\bar{f}^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στο $S/\sim$. Επειδή το σύνολο V είναι τυχαίο, η απεικόνιση $\bar{f} : S/\sim \rightarrow Y$ είναι συνεχής.

Η πρόταση αυτή μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε κατά πόσον μια συνάρτηση $\bar{f}$ είναι συνεχής στο χώρο πηλίκου $S/\sim$. Απλά ελέγχουμε την $f \circ \pi$ στο S .

Ορισμός 4.1.2. Εάν A υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου S , μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση $\sim$ στο S έχοντας $x \sim x$, $\forall x \in S$ και $x \sim y$, για κάθε $x, y \in A$, ώστε η σχέση αυτή είναι ανακλαστική. Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο χώρος πηλίκου $S/\sim$ προέρχεται από το S ταυτίζοντας το A με ένα σημείο.

Παράδειγμα. Έστω $I = [0, 1]$ και $I/\sim$ ο χώρος πηλίκου που προήλθε από το I ταυτίζοντας τα δυο σημεία $\{0, 1\}$ με ένα σημείο. Ορίζουμε S^1 τη μοναδιαία σφαίρα στο μιγαδικό επίπεδο. Η συνάρτηση $f : I \rightarrow S^1$, $f(x) = e^{2ix\pi}$, με $f(0) = f(1)$ και άρα επάγει τη συνάρτηση $\bar{f} : I/\sim \rightarrow S^1$.



4.1.1. Ο μοναδιαίος κύκλος ως χώρος πηλίκου του $I = [0, 1]$.

Πρόταση 4.1.3. Η παραπάνω συνάρτηση $\bar{f} : I/\sim \rightarrow S^1$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής, τότε λόγω της Πρότασης 4.1.1. η $\bar{f}$ είναι

συνεχής. Η $\bar{f}$ είναι 1-1 και επί. Επίσης, ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς I , το πηλίκο $I/\sim$ είναι συμπαγές. Επομένως, η $\bar{f}$ είναι συνεχής 1-1 και επί από τον συμπαγή χώρο $I/\sim$ στον χώρο Hausdorff S^1 . Από την Πρόταση 2.23., η συνάρτηση $\bar{f}$ είναι ομοιομορφισμός.

Γενικά, κατά την κατασκευή του χώρου πηλίκο δεν διατηρείται η ιδιότητα Hausdorff ή το αξίωμα της δεύτερης αριθμησιμότητας. Γι αυτό τον λόγο θα δώσουμε τις κατάλληλες προτάσεις ώστε ο χώρος πηλίκο να είναι δεύτερος αριθμήσιμος και Hausdorff χώρος. Πράγματι, επειδή κάθε μονοσύνολο σε ένα χώρο Hausdorff είναι κλειστό, αν $\pi : S \rightarrow S/\sim$ η απεικόνιση προβολής και ο χώρος πηλίκο είναι $S/\sim$ Hausdorff, τότε για κάθε $p \in S$, η εικόνα $\{\pi(p)\}$ είναι κλειστή στο $S/\sim$. Από την συνέχεια της απεικόνισης προβολής, η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(\{\pi(p)\}) = [p]$ είναι κλειστή στο S . Άρα, έχουμε μια αναγκαία συνθήκη ώστε ο χώρος πηλίκο να είναι Hausdorff χώρος. Συγκεκριμένα:

Πρόταση 4.1.4. Εάν ο χώρος πηλίκο $/\sim$ είναι Hausdorff, τότε η κλάση ισοδυναμίας $[p]$ για οποιοδήποτε $p \in S$ είναι κλειστή στο S .

Παράδειγμα. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ταυτίζοντας το ανοικτό διάστημα $(0, \infty)$ με ένα σημείο. Τότε, ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}/\sim$ δεν είναι Hausdorff διότι η κλάση ισοδυναμίας $(0, \infty)$ της $\sim$ στο $\mathbb{R}$ που αντιστοιχεί στο σημείο $(0, \infty)$ στο $\mathbb{R}/\sim$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 4.1.5. Μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ σε έναν τοπολογικό χώρο καλείται ανοικτή αν η απεικόνιση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$ είναι ανοικτή.

Με άλλα λόγια, η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο S είναι ανοικτή αν και μόνο αν, για κάθε ανοικτό $V \subset S$, το σύνολο

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in U} [x]$$

όλων των ισοδυναμιών σε κάποιο σημείο του U , σημείων, είναι ανοικτό.

Παράδειγμα. Γενικά, η απεικόνιση προβολής ενός χώρου πηλίκο δεν είναι ανοικτή. Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στην πραγματική γραμμή του $\mathbb{R}$ η οποία ταυτίζει τα δύο σημεία -1 και 1 , και έστω $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ η απεικόνιση προβολής. Η π είναι ανοικτή αν και μόνο αν για κάθε $V \subset \mathbb{R}$, V ανοικτό, η εικόνα $\pi(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}/\sim$, το οποίο από τον ορισμό της τοπολογίας πηλίκο σημαίνει ότι το $\pi^{-1}(\pi(V))$ είναι ανοικτό του $\mathbb{R}$. Έστω, $V = (-2, 0)$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε,

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = (-2, 0) \cup \{1\},$$

το οποίο δεν είναι ανοικτό του $\mathbb{R}$. Επομένως, η απεικόνιση προβολής $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ δεν είναι ανοικτή απεικόνιση.

Ορισμός 4.1.6. Δοθείσας μιας σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ στο S , έστω $R \subset S \times S$ ένα σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \sim y\}.$$

Το R ονομάζεται *γράφημα* της σχέσης ισοδυναμίας $\sim$.

Θεώρημα 4.1.7. Έστω $\sim$ μια ανοικτή σχέση ισοδυναμίας σε έναν τοπολογικό χώρο S . Τότε ο χώρος πηλίκου $S/\sim$ είναι Hausdorff αν και μόνο αν το γράφημα R της $\sim$ είναι κλειστό στο $S \times S$.

Απόδειξη. Έστω ότι το R είναι κλειστό στο $S \times S$, δηλαδή το $(S \times S) \setminus R$ είναι ανοικτό στο $S \times S$, δηλαδή για κάθε $(x, y) \in (S \times S) \setminus R$ υπάρχει ένα βασικά ανοικτό $U \times V$, $(x, y) \in U \times V$ τέτοιο ώστε $(U \times V) \cap R = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \neq y \in S$, υπάρχουν γειτονιές U του x και V του y έτσι ώστε κανένα στοιχείο του U δεν είναι ισοδύναμο με κάποιο στοιχείο του V . Δηλαδή, για οποιαδήποτε δυο σημεία $[x] \neq [y] \in S/\sim$, υπάρχουν γειτονιές U, V των x, y αντίστοιχα τέτοιες ώστε

$$\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset \quad (1)$$

στο $S/\sim$. Θα δείξουμε τώρα ότι η (1) είναι ισοδύναμη με το ότι ο $S/\sim$ είναι Hausdorff. Έστω ότι ισχύει η (1). Επειδή η $\sim$ είναι ανοικτή σχέση ισοδυναμίας, τα $\pi(U), \pi(V)$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα του $S/\sim$ τα οποία περιέχουν τα $[x], [y]$ αντίστοιχα. Άρα, ο $S/\sim$ είναι Hausdorff. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο $S/\sim$ είναι Hausdorff. Έστω $[x] \neq [y]$ στο $S/\sim$. Επομένως υπάρχουν ανοικτά και ξένα ματεζύ τους σύνολα $A, B \subset S/\sim$ έτσι ώστε $[x] \in A$, $[y] \in B$. Από την απεικόνιση π , έχουμε $A = \pi(\pi^{-1}A)$, $B = \pi(\pi^{-1}B)$. Έστω $U = \pi^{-1}A$ και $V = \pi^{-1}B$. Τότε $x \in U, y \in V$ και $A = \pi(U), B = \pi(V)$, με $A \cap B = \emptyset$ στο $S/\sim$.

Εάν η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ είναι ισότητα, τότε ο χώρος πηλίκου $S/\sim$ είναι ο ίδιος ο S και το γράφημα R είναι απλά η διαγώνιος $\Delta = \{(x, x) \in S \times S\}$.

Πρόταση 4.1.8. Ένας τοπολογικός χώρος S είναι Hausdorff αν και μόνο αν η διαγώνιος Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $S \times S$.

Θεώρημα 4.1.9. Έστω $\sim$ μια ανοικτή σχέση ισοδυναμίας σε έναν τοπολογικό χώρο S με απεικόνιση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$. Αν $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ μια βάση του S , τότε η εικόνα $\pi(B_\alpha)$ είναι μια βάση του χώρου πηλίκου $S/\sim$.

Απόδειξη. Επειδή η απεικόνιση προβολής π είναι ανοικτή απεικόνιση, το $\pi(B_\alpha)$ είναι μια συλλογή από ανοικτά σύνολα στο $S/\sim$. Έστω W ανοικτό σύνολο του $S/\sim$ και $[x] \in W, x \in S$. Τότε, $x \in \pi^{-1}(W)$. Αφού το $\pi^{-1}(W)$ είναι ανοικτό, τότε υπάρχει ένα βασικά ανοικτό σύνολο $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$x \in B \subset \pi^{-1}(W).$$

Τότε, $[x] = \pi(x) \in \pi(B) \subset W$, το οποίο αποδεικνύει ότι $\pi(B_\alpha)$ είναι μια βάση του $S/\sim$.

Πρόταση 4.1.10. Εάν $\sim$ είναι μία ανοικτή σχέση ισοδυναμίας σε έναν δεύτερο αριθμήσιμο χώρο S , τότε η χώρος πηλίκου $S/\sim$ είναι κι αυτός δεύτερος αριθμήσιμος.

Πρόταση 4.1.11. Έστω M μια πολλαπλότητα και έστω $M/\sim$ το πηλίκου της M . Τότε το $M/\sim$ έχει το πολύ μία δομή πολλαπλότητας, η οποία το μετατρέπει σε πηλίκου πολλαπλότητα της M .

Δοθέντος ένα πηλίκου $M/\sim$ μιας πολλαπλότητας M , λέμε ότι το σύνολο $M/\sim$ είναι πηλίκου πολλαπλότητα, εάν επιδέχεται μια (μοναδική) δομή πηλίκου πολλαπλότητας. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ είναι κανονική (regular), ενώ αναφερόμαστε στο σύνολο $M/\sim$ εφοδιασμένο με αυτή τη δομή πολλαπλότητας ως η πολλαπλότητα $M/\sim$.

4.2. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$.

Σε αυτή τη παράγραφο θα περιγραφεί ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, θα αποδειχθεί ότι είναι τοπολογική, καθώς και C^∞ πολλαπλότητα. Θα δοθούν ειδικότερα παραδείγματα όπως η περιγραφή της πραγματικής προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ αλλά και του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$.

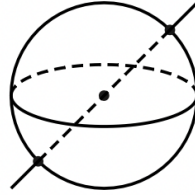
Ξεκινάμε ορίζοντας μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ με τύπο

$$x \sim y \iff y = tx, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι ο χώρος πηλίκο του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ως προς την σχέση ισοδυναμίας.

Ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας ενός σημείου $(\alpha^0, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ως $[\alpha^0, \dots, \alpha^n]$ και έστω $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$

η απεικόνιση προβολής. Καλούμε $[\alpha^0, \dots, \alpha^n]$ ομογενείς συντεταγμένες στον $\mathbb{R}P^n$.



4.1. Μια ευθεία στον χώρο μαζί με τα αντιδιαμετρικά σημεία στην σφαίρα.

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι δύο μη μηδενικά σημεία στον $\mathbb{R}P^n$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν βρίσκονται στην ίδια ευθεία που διέρχεται από το 0. Άρα ο $\mathbb{R}P^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο όλων των ευθειών που διέρχονται από την αρχή του $\mathbb{R}^{n+1}$. Κάθε τέτοια ευθεία συναντά την μοναδιαία σφαίρα S^n σε ένα ζευγάρι αντιδιαμετρικών σημείων και αντίστροφα, κάθε ζευγάρι αντιδιαμετρικών σημείων στην S^n ορίζει μοναδική ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αυτό δηλώνει ότι μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στην S^n ταυτίζοντας τα αντιδιαμετρικά σημεία : $x \sim y \iff x = \pm y, x, y \in S^n$

Τότε έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\mathbb{R}P^n \leftrightarrow S^n / \sim$.

Πρόταση 4.2.1. Για $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, έστω $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ η νόρμα του x . Τότε, η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \rightarrow S^n / \sim$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \rightarrow S^n / \sim$ με τύπο

$$\bar{f}[x] = \left[\frac{x}{\|x\|} \right] \in S^n / \sim.$$

Αυτή είναι καλώς ορισμένη, επειδή $\bar{f}[tx] = \left[\frac{tx}{|tx|} \right] = \left[\pm \frac{x}{\|x\|} \right] = \left[\frac{x}{\|x\|} \right]$. Επίσης, έστω

$$\pi_1 : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad \pi_2 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \sim$$

οι απεικονίσεις προβολής. Τότε υπάρχει το εξής διάγραμμα :

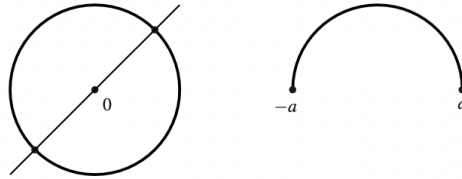
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^n / \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{S}^n / \sim \end{array}$$

Αφού η π_2 είναι συνεχής, από γνωστή πρόταση, η $\bar{f}$ είναι συνεχής. Στη συνέχεια, ορίζουμε $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ με τύπο $g(x) = x$. Αυτή η απεικόνιση επάγει την απεικόνιση $\bar{g} : \mathbb{S}^n / \sim \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\bar{g}([x]) = [x]$. Για τον ίδιο λόγο όπως παραπάνω, η $\bar{g}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον,

$$\bar{g} \circ \bar{f}([x]) = \left[\frac{x}{\|x\|} \right] = [x] = \bar{f} \circ \bar{g}([x]) = [x],$$

Επομένως, η $\bar{g}$ είναι η αντίστροφη της $\bar{f}$. Συνεπώς, επειδή υπάρχει η συνεχής αντίστροφη απεικόνιση $\bar{g} : \mathbb{S}^n / \sim \rightarrow \mathbb{R}P^n$, προκύπτει το ζητούμενο.

Η πραγματική προβολική ευθεία $\mathbb{R}P^1$



4.2.Η πραγματική προβολική ευθεία ως το σύνολο των ευθειών στο επίπεδο.

Κάθε ευθεία που διέρχεται από την γραμμή των αξόνων στο $\mathbb{R}^2$ τέμνει τον μοναδιαίο κύκλο σε ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Από την Πρόταση 4.2.1., ο $\mathbb{R}P^1$ είναι ομοιόμορφος με το πηλίκιο $\mathbb{S}^1 / \sim$, το οποίο με την σειρά του είναι ομοιομορφικό με το κλειστό άνω ημικύκλιο με ταυτισμένα άκρα. Επομένως, ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^1$ είναι ομοιόμορφος με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$.

Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$. Από την Πρόταση 4.2.1., υπάρχει ομοιομορφισμός

$$\mathbb{R}P^2 \simeq \mathbb{S}^2 / \sim,$$

όπου $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που περιγράφεται παραπάνω.

Για τα σημεία που δεν βρίσκονται στον ισημερινό, κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων περιέχει ένα μοναδικό σημείο στο άνω ημισφαίριο. Με αυτόν τον τρόπο, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της $\mathbb{S}^2 / \sim$ και του πηλίκιου του κλειστού άνω ημισφαιρίου στο οποίο κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων στον ισημερινό ταυτίζονται.

Εύκολα, αποδεικνύεται ότι αυτή η 1-1 αντιστοιχία είναι ομοιομορφισμός.

Σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε μια ακολουθία ομοιομορφισμών, τέτοια ώστε το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ να είναι ομοιομορφικό με έναν χώρο πηλίκο. Για να το κάνουμε αυτό ορίζουμε το $\mathbb{H}^2$, το κλειστό άνω ημισφαίριο

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

και έστω D^2 ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\},$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτοί οι δυο χώροι είναι ομοιομορφικοί. θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow D^2, \quad \phi(x, y, z) = (x, y),$$

και την αντίστροφή της

$$\psi : D^2 \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad \psi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Ορίζουμε, τώρα στο $\mathbb{H}^2$ μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ταυτίζοντας τα αντιδιαμετρικά σημεία του ισημερινού :

$$(x, y, 0) \sim (-x, -y, 0), \quad x^2 + y^2 = 1$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον D^2 ταυτίζοντας τα αντιδιαμετρικά σημεία στον συνοριακό κύκλο :

$$(x, y) \sim (-x, -y), \quad x^2 + y^2 = 1$$

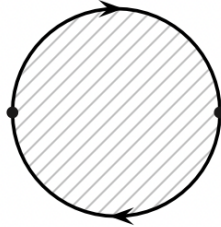
Τότε, οι ϕ και ψ επάγουν τους εξής ομοιομορφισμούς :

$$\bar{\phi} : \mathbb{H}^2 / \sim \longrightarrow D^2 / \sim, \quad \bar{\psi} : D^2 / \sim \longrightarrow \mathbb{H}^2 / \sim.$$

Επομένως, καταλήγουμε στη ζητούμενη ακολουθία ομοιομορφισμών :

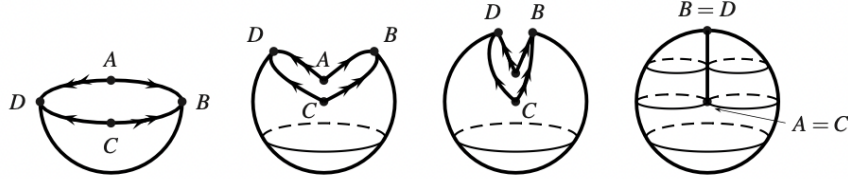
$$\mathbb{R}P^2 \xrightarrow{\sim} S^2 / \sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^2 / \sim \xrightarrow{\sim} D^2 / \sim,$$

η οποία ταυτίζει το πραγματικό προβολικό επίπεδο ως τον χώρο πηλίκο του κλειστού δίσκου D^2 με τα αντιδιαμετρικά σημεία στο σύνορό του να ταυτίζονται. Ένας τρόπος να παρουσιάσουμε τον $\mathbb{R}P^2$ είναι ο παρακάτω :



4.3. Το πραγματικό προβολικό επίπεδο ως πηλίκο ενός δίσκου.

Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ δεν μπορεί να εμφυτευτεί ως υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$. Ωστόσο, εάν επιτρέψουμε αυτοτομές, τότε μπορούμε να απεικονίσουμε $\mathbb{R}P^2$ στον $\mathbb{R}^3$. Η απεικόνιση όμως αυτή δεν είναι 1-1.



4.4. Το προβολικό επίπεδο εμβαπτισμένο στον χώρο.

Μπορούμε πλέον να ασχοληθούμε με τον πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι ο $\mathbb{R}P^n$ είναι μια λεία πολλαπλότητα. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, αρκεί ναδειχθεί ότι ο $\mathbb{R}P^n$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n και στη συνέχεια να εφοδιαστεί με μία λεία δομή, δηλαδή με έναν C^∞ άτλαντα.

Πρόταση 4.2.2. Η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ στον ορισμό του $\mathbb{R}P^n$ είναι μια ανοικτή σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Για να αποδειχθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της ανοικτής σχέσης ισοδυναμίας.

Για ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, η εικόνα $\pi(U)$ είναι ανοικτή στον $\mathbb{R}P^n$, αν και μόνο αν $\pi^{-1}(\pi(U))$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Όμως το $\pi^{-1}(\pi(U))$ περιέχει όλα τα μη μηδενικά βαθμωτά γινόμενα σημείων στο U τα οποία :

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup tU = \bigcup \{tp \mid p \in U, t \in \mathbb{R}^x\}.$$

Επειδή ο πολλαπλασιασμός με $t \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, το σύνολο tU είναι ανοικτό για κάθε t . Επομένως, η ένωση τους $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup tU$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο. Άρα, έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 4.2.3. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

Απόδειξη. Μόλις αποδείξαμε ότι η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ στον ορισμό του προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$ είναι ανοικτή σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή, έχουμε μια ανοικτή σχέση ισοδυναμίας στον $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ο οποίος είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Επομένως, από την Πρόταση 4.1.10, έχουμε ότι ο χώρος πηλίκο

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{R}P^n$$

ικανοποιεί το αξίωμα της δεύτερης αριθμησιμότητας.

Πρόταση 4.2.4. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι χώρος Hausdorff.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο $\mathbb{R}P^n$ είναι χώρος Hausdorff, θεωρούμε δυο στοιχεία x και y με $x \neq y$. Θεωρώντας τα ως δυο ευθείες στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και χρησιμοποιώντας τον χώρο πηλίκο, μπορούμε να ταυτίσουμε καθένα από τα σημεία με ένα ζευγάρι αντιδιαμετρικών σημείων στην S^n . Έστω τα αντιδιαμετρικά σημεία $+p, -p$ για το x και $+q, -q$ για το y .

Τότε, η S^n είναι πολλαπλότητα, άρα και Hausdorff και υπάρχουν τέσσερις ξένες ανοικτές γειτονιές. Έστω $+p \in U_+, -p \in U_-, +q \in V_+$ και $-q \in V_-$.

Από την συμμετρία της S^n , παίρνουμε ότι κάθε ζεύγος U_+, U_- και V_+, V_- είναι αντικατοπτρικές εικόνες (mirror images). Δηλαδή, $a \in U_+ \iff -a \in U_-$. Επομένως, αν τα σύνολα μας είναι συμμετρικά, γνωρίζουμε ότι $\pi(U_+) = \pi(U_-)$ και $\pi(V_+) = \pi(V_-)$.

Αν $a \in U_+ \cup U_-$ τότε προφανώς $-a \in U_+ \cup U_-$ και από υπόθεση $-a \notin V_+ \cup V_-$. Επομένως, η απεικόνιση πηλίκο δεν ταυτίζει τα σημεία μεταξύ των ανοικτών συνόλων U και V . Άρα, $\pi(U_+) \cap \pi(V_+) = \emptyset$ και αυτά είναι τα ξένα ανοικτά σύνολα γύρω από τα x και y . Επομένως, ο $\mathbb{R}P^n$ είναι χώρος Hausdorff.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο $\mathbb{R}P^n$ είναι τοπικά Ευκλείδειος :

Έστω $[\alpha^0, \dots, \alpha^n]$ οι ομογενείς συντεταγμένες στον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$. Παρόλο που το α^0 δεν είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση στον $\mathbb{R}P^n$, η συνθήκη $\alpha^0 \neq 0$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής αντιπροσώπου από $[\alpha^0, \dots, \alpha^n]$. Επομένως, η συνθήκη $\alpha^0 \neq 0$ έχει νόημα στον $\mathbb{R}P^n$, και μπορούμε να ορίσουμε τα εξής :

$$U_0 := \{[\alpha^0, \dots, \alpha^n] \in \mathbb{R}P^n \mid \alpha^0 \neq 0\}$$

Αντίστοιχα, για κάθε $i = 1, \dots, n$ έστω

$$U_i := \{[\alpha^0, \dots, \alpha^n] \in \mathbb{R}P^n \mid \alpha^i \neq 0\}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση :

$$\phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

με τύπο

$$[\alpha^0, \dots, \alpha^n] \mapsto \left(\frac{\alpha^1}{\alpha^0}, \dots, \frac{\alpha^n}{\alpha^0}\right).$$

Η απεικόνιση αυτή έχει συνεχή αντίστροφο : $(b^1, \dots, b^n) \mapsto [1, b^1, \dots, b^n]$ και επομένως είναι ομοιομορφισμός.

Αντίστοιχα, υπάρχουν ομοιομορφισμοί για κάθε $i = 1, \dots, n$:

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$[\alpha^0, \dots, \alpha^n] \mapsto \left(\frac{\alpha^0}{\alpha^i}, \dots, \frac{\hat{\alpha}^i}{\alpha^i}, \dots, \frac{\alpha^n}{\alpha^i}\right),$$

όπου το σύμβολο πάνω από το $\frac{\alpha^i}{\alpha^0}$ σημαίνει ότι η καταχώρηση αυτού του όρου εξαιρείται. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $\mathbb{R}P^n$, είναι τοπικά Ευκλείδειος με τα (U_i, ϕ_i) ως χάρτες.

Με τις παραπάνω προτάσεις μόλις αποδείξαμε ότι ο $\mathbb{R}P^n$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n . Για να αποδειχθεί ότι είναι C^∞ πολλαπλότητα, αρκεί να εφοδιαστεί με μια λεία δομή. Η διαδικασία αυτή έχει ως εξής :

Στην τομή $U_0 \cap U_1$, έχουμε ότι $\alpha^0 \neq 0$ και $\alpha^1 \neq 0$, έτσι έχουμε δυο συστήματα συντεταγμένων που περιγράφονται με αυτόν τον τρόπο :

$$\begin{array}{ccc} & [a^0, a^1, a^2, \dots, a^n] & \\ \phi_0 \swarrow & & \searrow \phi_1 \\ \left(\frac{a^1}{a^0}, \frac{a^2}{a^0}, \dots, \frac{a^n}{a^0} \right) & & \left(\frac{a^0}{a^1}, \frac{a^2}{a^1}, \dots, \frac{a^n}{a^1} \right). \end{array}$$

Θα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις συντεταγμένων στο U_0 ως $x^1, \dots, x^n$ και τις συναρτήσεις συντεταγμένων στο U_1 ως $y^1, \dots, y^n$. Θέτουμε στο U_0 ,

$$x^i = \frac{\alpha^i}{\alpha^0}, \quad i = 1, \dots, n$$

και αντίστοιχα στο U_1 ,

$$y^1 = \frac{\alpha^0}{\alpha^1}, \quad y^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^1}, \quad \dots, \quad y^n = \frac{\alpha^n}{\alpha^1}.$$

Έτσι στην τομή $U_0 \cap U_1$ έχουμε,

$$y^1 = \frac{1}{x^1}, \quad y^2 = \frac{x^2}{x^1}, \quad y^3 = \frac{x^3}{x^1}, \quad \dots, \quad y^n = \frac{x^n}{x^1},$$

έτσι ώστε

$$(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(x) = \left(\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \dots, \frac{x^n}{x^1} \right).$$

Αυτή είναι μια λεία συνάρτηση αφού $x^1 \neq 0$ στο $\phi_0(U_0 \cap U_1)$. Αντίστοιχα σε κάθε άλλη $U_i \cap U_j$ έχουμε έναν ανάλογο τύπο. Επομένως, η συλλογή χαρτών $\{(U_i, \phi_i)\}, i = 0, \dots, n$ είναι ένας C^∞ άτλαντας για τον $\mathbb{R}P^n$, ο οποίος καλείται τυπικός άτλαντας (standard atlas). Έτσι, ολοκληρώσαμε την απόδειξη ότι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι μια C^∞ πολλαπλότητα.

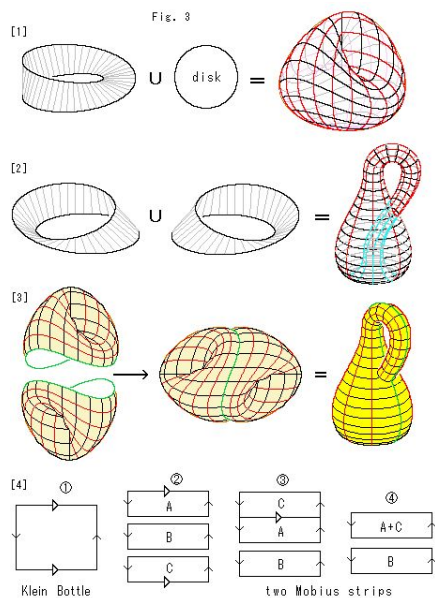
Πρόταση 4.2.5. Ο προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.2.1. υπάρχει ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$ και $S^n/\sim$ και μία συνεχής απεικόνιση

$$\phi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n.$$

Εφόσον η S^n είναι συμπαγής, τότε η συνεχής εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγές σύνολο. Επομένως, ο $\mathbb{R}P^n$ είναι συμπαγής χώρος.

Η σημασία του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ είναι ότι είναι μια πολύ βασική, μη προσανατολισμένη, κλειστή και συμπαγής επιφάνεια. Από αυτήν μπορούν να δημιουργηθούν και άλλες επιφάνειες που να είναι επίσης μη προσανατολισμένες, κλειστές και συμπαγείς. Από ένα ορθογώνιο μπορούμε να πάρουμε διάφορες επιφάνειες, όπως τον κύλινδρο και τον τόρο. Χρησιμοποιώντας άλλου είδους ταυτίσεις θα έχουμε άλλες τοπολογικές επιφάνειες, όπως την κορδέλα του Möbius. Συγκεκριμένα, βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα πως προκύπτει:



5 Ο εφαπτόμενος χώρος.

Εξ ορισμού ο εφαπτόμενος χώρος μίας πολλαπλότητας σε ένα σημείο είναι ο διανυσματικός χώρος που αποτελείται από παραγωγίσεις στο σημείο αυτό. Μία λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων επάγει μία γραμμική απεικόνιση, το διαφορικό, μεταξύ εφαπτόμενων χώρων στα αντίστοιχα σημεία. Σε τοπικές συντεταγμένες, το διαφορικό απεικονίζεται από τον Ιακωβιανό πίνακα των μερικών παραγώγων της απεικόνισης. Με αυτόν τον τρόπο, το διαφορικό μίας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι μια γενίκευση της παραγώγου μιας απεικόνισης μεταξύ Ευκλείδειων χώρων.

Μία βασική αρχή της θεωρίας πολλαπλοτήτων είναι η αρχή της γραμμικοποίησης, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να προσεγγίσουμε μια πολλαπλότητα σε ένα σημείο από τον εφαπτόμενό της χώρο στο σημείο, καθώς και μία λεία απεικόνιση μπορεί να προσεγγιστεί από το διαφορικό της απεικόνισης. Με αυτόν τον τρόπο, πετυχαίνεται η μετατροπή ενός τοπολογικού προβλήματος σε γραμμικό πρόβλημα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις έννοιες του εφαπτόμενου χώρου, του διαφορικού μιας απεικόνισης αλλά και αυτές της εμβάπτισης και εμφύτευσης. Οι βασικές αναφορές είναι τα βιβλία [5], [7], [8],

Ορισμός 5.1.1. Μια παραγωγή σε μία πολλαπλότητα M ή σημειακή παραγωγή του $C_p^\infty(M)$ (το οποίο είναι ισοδύναμο με το C^∞ πραγματικών συναρτήσεων στο σημείο $p \in M$), είναι μια γραμμική απεικόνιση $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg,$$

δηλαδή ικανοποιεί τον κανόνα του Leibnitz.

Ορισμός 5.1.2. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο p σε μία πολλαπλότητα M είναι μια παραγωγή στο p .

Στην M τα εφαπτόμενα διανύσματα στο p δημιουργούν έναν διανυσματικό χώρο $T_p(M)$ που ονομάζεται ο εφαπτόμενος χώρος της M στο p . Επίσης, θα γράφουμε $T_p M$ αντί για $T_p(M)$.

Δοθείσας μιας γειτονιάς συντεταγμένων $(U, \phi = (U, x^1, \dots, x^n))$ σε ένα σημείο p σε μια πολλαπλότητα M , ορίζουμε τις μερικές παραγώγους. Έστω $r^1, \dots, r^n$ οι συνήθεις συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$x^i = r^i \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Αν f είναι μια λεία συνάρτηση σε μια γειτονιά του p , ορίζουμε

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \in \mathbb{R}.$$

Θα ορίσουμε τώρα το διαφορικό μιας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων. Έστω $F : M \rightarrow N$ μία C^∞ απεικόνιση μεταξύ των δύο πολλαπλοτήτων. Σε κάθε σημείο $p \in M$, η απεικόνιση F επάγει μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων, η οποία καλείται το διαφορικό στο p ,

$$F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

Αν $X_p \in T_p M$, τότε $F_*(X_p)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στον $T_{F(p)} N$ που ορίζεται ως εξής:

$$(F_*(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}, \quad f \in C_{F(p)}^\infty(N)$$

Συνεχίζουμε, εκφράζοντας τον κανόνα της αλυσίδας: Έστω $F : n \rightarrow M$, $G : M \rightarrow P$ λείες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$. Τα διαφορικά της F , G στα p , $F(p)$ είναι οι γραμμικές απεικονίσεις:

$$T_p N \xrightarrow{F_{*,p}} T_{F(p)} M \xrightarrow{G_{*,F(p)}} T_{G(F(p))} P.$$

Θεώρημα 5.1.3. Έστω $F : N \rightarrow M$, $G : M \rightarrow P$ λείες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$. Τότε

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}.$$

Απόδειξη. Έστω $X_p \in T_p N$ και έστω f μια λεία συνάρτηση στο $G(F(p))$ στο P . Τότε,

$$((G \circ F)_* X_p)f = X_p(f \circ G \circ F)$$

και

$$((G_* \circ F_*) X_p)f = (G_*(F_* X_p))f = (F_* X_p)(f \circ G) = X_p(f \circ G \circ F).$$

Παράδειγμα. Το διαφορικό της ταυτοτικής απεικόνισης $1_M : M \rightarrow M$, για κάθε $p \in M$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση

$$1_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$$

γιατί

$$((1_M)_* X_p)f = X_p(f \circ 1_M) = X_p f, \quad \forall X_p \in T_p M \text{ και } f \in C_p^\infty(M).$$

Ορισμός 5.1.4. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων $\phi : N \rightarrow M$ ονομάζεται αμφιδιαφόριση, εάν είναι 1-1, επί και η αντίστροφη της $\phi^{-1} : M \rightarrow N$ είναι επίσης διαφορίσιμη. Οι πολλαπλότητες M και N ονομάζονται αμφιδιαφορικές.

Πρόταση 5.1.5. Έστω $F : N \rightarrow M$ αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$. Τότε η απεικόνιση $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Το ότι η F είναι αμφιδιαφόριση σημαίνει ότι έχει διαφορίσιμη αντίστροφη απεικόνιση $G : M \rightarrow N$, τέτοια ώστε $G \circ F = 1_N$ και $F \circ G = 1_M$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* = (1_N)_* = 1_{T_p N},$$

$$(F \circ G)_* = F_* \circ G_* = (1_M)_* = 1_{T_{F(p)} N}.$$

Θεώρημα 5.1.6. (Αναλλοίωτου της διάστασης- λεία εκδοχή.) Εάν ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφορικό με ένα ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^m$, τότε $m = n$.

Απόδειξη. Έστω η αμφιδιαφόριση $F : U \rightarrow V$ και έστω $p \in U$. Από την Πρόταση 5.1.4. έχουμε ότι η απεικόνιση $F_{*,p} : T_p U \rightarrow T_{F(p)} V$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ διανυσματικών χώρων. Εφόσον υπάρχουν οι ισομορφισμοί των διανυσματικών χώρων $T_p U \simeq \mathbb{R}^n$ και $T_{F(p)} V \simeq \mathbb{R}^m$, αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $m = n$.

Πρόταση 5.1.7. Έστω $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ χάρτης της πολλαπλότητας M στο σημείο p . Τότε για την απεικόνιση του διαφορικού

$$\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$$

ισχύει :

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)}.$$

όπου r^i , $i = 1, \dots, n$ οι συνήθεις συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$ και $x^i = r^i \circ \phi$.

Απόδειξη. Για κάθε $f \in C_{\phi(p)}^\infty(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) f &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ \phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} f. \end{aligned}$$

Πρόταση 5.1.8. Έστω $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ χάρτης που περιέχει το p . Τότε ο εφαπτόμενος χώρος $T_p M$ έχει βάση:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων μεταφέρει μια βάση σε μια βάση. Από την Πρόταση 5.1.7. ο ισομορφισμός $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ απεικονίζει τα

$$(\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p) \longmapsto (\partial/\partial r^1|_{\phi(p)}, \dots, \partial/\partial r^n|_{\phi(p)}),$$

τα οποία αποτελούν βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_{\phi(p)}(\mathbb{R}^n)$. Επομένως, τα

$$(\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p)$$

αποτελούν μια βάση του $T_p M$.

Πρόταση 5.1.9. Έστω $(U, x^1, \dots, x^n)$ και $(V, y^1, \dots, y^n)$ δύο χάρτες συντεταγμένων μιας πολλαπλότητας M . Τότε

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \text{στο } U \cap V.$$

Δοθείσας μιας λείας απεικόνισης $F : N \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$, έστω $(U, x^1, \dots, x^n)$, $(V, Y^1, \dots, y^m)$ χάρτες στο $p \in N$ και $F(p) \in M$ αντίστοιχα. Θα εκφράσουμε την απεικόνιση του διαφορικού σε τοπικές συντεταγμένες σχετικά με τους δυο χάρτες. $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$.

Από τις παραπάνω προτάσεις έχουμε ότι μία βάση του $T_p N$ είναι η $\{\partial/\partial x^j|_p\}_{j=1}^n$ και μια βάση του $T_{F(p)} M$ είναι η $\{\partial/\partial y^i|_{F(p)}\}_{i=1}^n$. Επομένως, το διαφορικό $F_* = F_{*,p}$ εξαρτάται πλήρως από τους αριθμούς α_j^i τέτοιοι ώστε:

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^m \alpha_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$(\text{Γνωρίζουμε ότι ισχύει : } \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \alpha_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}.)$$

Εφαρμόζοντας το y^i , έχουμε ότι

$$\alpha_j^i = \left(\sum_{k=1}^m \alpha_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)} \right) y^i = F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) y^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (y^i \circ F) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p).$$

Έτσι έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.1.10. Έστω μία λεία απεικόνιση $F : N \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$, έστω επίσης $(U, x^1, \dots, x^n)$, $(V, y^1, \dots, y^m)$ οι χάρτες συντεταγμένων στο $p \in N$ και $F(p) \in M$ αντίστοιχα. Η απεικόνιση του διαφορικού $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ παριστάνεται από τον πίνακα $[\partial F^i / \partial x^j(p)]$, όπου $F^i = y^i \circ F$ η i -οστή συντεταγμένη της F .

5.2. Εμβάπτισεις, εμφυτεύσεις και υπεμβάπτισεις.

Θα ορίσουμε τώρα τις έννοιες της εμφύτευσης εμβάπτισης και υπεμβάπτισης μαζί με παραδείγματα που έχουν ως κεντρικό στόχο τη περιγραφή του προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$ και συμβάλλουν στην κατανόηση του επόμενου κεφαλαίου.

Ορισμός 5.2.1. Για θετικούς ακέραιους $m, n \in \mathbb{Z}^+$ με $m \leq n$, μια δι-αφορίσιμη απεικόνιση $\phi : M \rightarrow N$ μεταξύ πολλαπλοτήτων καλείται *εμβάπτιση*, αν για κάθε $p \in M$, η απεικόνιση του διαφορικού $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ είναι 1-1. Αντίστοιχα, *εμφύτευση* ονομάζουμε την εμβάπτιση $\phi : M \rightarrow N$, η οποία είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας του $\phi(M)$.

Παράδειγμα.1. Για θετικούς ακέραιους m, n με $m < n$ έχουμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ με τύπο

$$\phi : (x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{m+1}, 0, \dots, 0).$$

Το διαφορικό $d\phi_x$ στο x είναι 1-1 απεικόνιση αφού $d\phi_x(v) = (v, 0)$. Η απεικόνιση ϕ είναι ομοιομορφισμός προς την εικόνα $\phi(\mathbb{R}^{m+1})$ επομένως, είναι εμφύτευση. Παρόμοια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός $\phi|_{S^m} : S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow S^n$ είναι εμφύτευση.

Έχουμε παρουσιάσει την έννοια του πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$ ως πολλαπλότητα, αλλά θα κατασκευάσουμε επίσης μια ενδιαφέρουσα εμφύτευση του $\mathbb{R}P^n$ στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$ των συμμετρικών πραγματικών $(n+1) \times (n+1)$ πινάκων.

Παράδειγμα.2. Έστω S^n η n -διάσταση μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Για ένα σημείο $p \in S^n$ ορίζουμε

$$l_p = \{\lambda \cdot p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

την ευθεία που διέρχεται από το p . Επιπλέον, έστω

$$R_p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

η ανάκλαση περί την ευθεία l_p . Τότε, η απεικόνιση R_p είναι στοιχείο του $\text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$, δηλαδή του συνόλου των γραμμικών ενδομορφισμών του $\mathbb{R}^{n+1}$, το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ των πραγματικών $(n+1) \times (n+1)$ πινάκων και ικανοποιεί $R_p \cdot R_p^t = R_p \cdot R_p = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο των πινάκων. Η απεικόνιση αυτή έχει τύπο :

$$R_p : q \mapsto 2 \langle p, q \rangle p - q.$$

Τότε έχουμε

$$R_p(q) = 2 \langle p, q \rangle p - q = 2p \langle p, q \rangle - q = (2p \cdot p^t - e) \cdot q,$$

όπου $\langle, \rangle$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Έτσι, ο συμμετρικός πίνακας στο $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ που αντιστοιχεί στην R_p είναι ο

$$(2p \cdot p^t - e).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση $\phi : S^n \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$ με τύπο $\phi : p \mapsto R_p$ είναι μια εμβάπτιση.

Έστω p τυχαίο σημείο πάνω στη S^n και $\alpha, \beta : I \rightarrow S^n$ δύο καμπύλες που διέρχονται από το p , δηλαδή ισχύει ότι $\alpha(0) = \beta(0) = p$ και $X_p = \dot{\alpha}(0)$, $Y_p = \dot{\beta}(0)$. Για κάθε $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ έχουμε ότι

$$\phi \circ \gamma : t \mapsto (q \mapsto 2 \langle q, \gamma(t) \rangle - \gamma(t) \cdot \gamma(t))$$

και

$$(d\phi)_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma(t))|_{t=0} = (q \mapsto 2 \langle q, \dot{\gamma}(0) \rangle - \gamma(0) \cdot \gamma(0) + 2 \langle q, \gamma(0) \rangle - \dot{\gamma}(0) \cdot \dot{\gamma}(0)).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$d\phi_p(X_p) = (q \mapsto 2 \langle q, X_p \rangle - p \cdot p + 2 \langle q, p \rangle - X_p \cdot X_p)$$

και

$$d\phi_p(Y_p) = (q \mapsto 2 \langle q, Y_p \rangle - p \cdot p + 2 \langle q, p \rangle - Y_p \cdot Y_p).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα $X_p, Y_p \in T_p S^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε, οι συμμετρικοί γραμμικοί τελεστές

$$d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

ικανοποιούν

$$d\phi_p(X_p)(p) = 2X_p \neq 2Y_p = d\phi_p(Y_p)(p).$$

Αυτό σημαίνει τώρα ότι η γραμμική απεικόνιση του διαφορικού $d\phi_p$ της ϕ στο p είναι 1-1 και επομένως η απεικόνιση $\phi : S^n \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$ είναι εμβάπτιση.

Εάν δύο σημεία $p, q \in S^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε οι αντίστοιχες ευθείες που τα καθορίζουν l_p, l_q είναι διαφορετικές. Επειδή οι πίνακες που αντιστοιχούν στους ιδιοχώρους R_p, R_q έχουν ορίζουσα ίση με το μηδέν, είναι ακριβώς οι ιδιοχώροι με ιδιοτιμή +1 αντίστοιχα. Αυτό μας δείχνει ότι οι γραμμικοί ενδομορφισμοί R_p, R_q του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι διαφορετικοί σε αυτήν τη περίπτωση.

Εάν όμως τα σημεία p και q είναι παράλληλα μεταξύ τους, δηλαδή $p = \pm q$, τότε $R_p = R_q$. Δηλαδή η εικόνα $\phi(S^n)$ μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο πηλίκου $S^n / \sim$, όπου η $\sim$ ορίζεται ως

$$x \sim y \iff x = \pm y.$$

Ο χώρος πηλίκου αυτός είναι ο γνωστός πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, οπότε η απεικόνιση ϕ επάγει μια εμφύτευση $\Phi : \mathbb{R}P^n \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Η εμφύτευση αυτή αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής του παρακάτω σημαντικού θεωρήματος εμφύτευσης του Nash :

Θεώρημα 5.2.2. Για $r \in [1, \infty]$ έστω M μια m -διάστατη C^r πολλαπλότητα. Τότε υπάρχει μια C^r εμφύτευση $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ της M στον $(2m+1)$ -διάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Παράδειγμα.3. Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, ο n -διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ μπορεί να εμφυτευθεί στο χώρο $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$. Η εμφύτευση $\Phi : \mathbb{R}P^n \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\Phi : [p] \mapsto R_p = \begin{pmatrix} 2p_1^2 - 1 & 2p_1p_2 & \cdots & 2p_1p_{n+1} \\ 2p_2p_1 & 2p_2^2 - 1 & \cdots & 2p_2p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2p_{n+1}p_1 & 2p_{n+1}p_2 & \cdots & 2p_{n+1}^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$, όπου έχουμε την εμφύτευση $\Phi : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^3)$ στον 6-διάστατο χώρο $\text{Sym}(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^6$ των συμμετρικών γραμμικών πραγματικών 3×3 πινάκων. Αυτή είναι η :

$$\Phi : [(x, y, z)] \mapsto \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - 1 & 2xy & 2xz \\ 2yx & 2y^2 - 1 & 2yz \\ 2zx & 2zy & 2z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Εν κατακλείδι, έχουμε ορίσει τον πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$ όχι μόνο ως μια λεία πολλαπλότητα, αλλά και ως εμφύτευση στον γνωστό μας χώρο $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1})$ των συμμετρικών $(n+1) \times (n+1)$ πινάκων με την απεικόνιση που περιγράψαμε παραπάνω.

Ορισμός 5.2.3. Για θετικούς ακέραιους $m, n \in \mathbb{Z}^+$, με $m \geq n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\phi : M^m \rightarrow N^n$ μεταξύ πολλαπλοτήτων ονομάζεται *υπεμβάπτιση (submersion)*, εάν για κάθε $p \in M$, το διαφορικό $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ είναι επί απεικόνιση.

Παράδειγμα.4. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}^+$, με $m \geq n$ τότε έχουμε την απεικόνιση προβολής $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, με τύπο $\pi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Το διαφορικό αυτής $d\pi_x$ σε ένα τυχαίο σημείο x είναι επί αφού

$$d\pi_x(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_n).$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση προβολής είναι υπερβάπτιση.

5.3 Υποπολλαπλότητες.

Ορισμός 5.3.1. Ένα υποσύνολο S μίας πολλαπλότητας N διάστασης n είναι κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k , αν για κάθε $p \in S$, υπάρχει γειτονιά συντεταγμένων $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ του p στον μεγιστικό άτλαντα της N έτσι ώστε το $U \cap S$ ορίζεται εξαφανίζοντας τις $n - k$ συναρτήσεις συντεταγμένων. Θεωρούμε ότι αυτές είναι $x^{k+1}, \dots, x^n$.

Ονομάζουμε το χάρτη (U, ϕ) στην N προσαρμοσμένο χάρτη της S . Στο $U \cap S$, έχουμε $\phi = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$. Έστω

$$\phi_S : U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k$$

ο περιορισμός των πρώτων k συνιστωσών της ϕ στο $U \cap S$, όπου $\phi_S = (x^1, \dots, x^k)$. Ο χάρτης $(U \cap S, \phi_S)$ είναι στην υποχώρο τοπολογία.

Θεώρημα 5.3.2. Έστω M και N πολλαπλότητες διάστασης m και n αντίστοιχα :

(i)(Θεώρημα Εμβάπτισης) Έστω $f : N \rightarrow M$ μια εμβάπτιση στο $p \in N$. Τότε υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) στο p στην N και αντίστοιχα (V, ψ) στο $f(p)$ στην M τέτοιοι ώστε σε μια γειτονιά του $\phi(p)$,

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^n, 0, \dots, 0).$$

(ii)(Θεώρημα Υπεμβάπτισης) Έστω $f : N \rightarrow M$ μια υπεμβάπτιση στο $p \in N$. Τότε υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) στο p στην N και αντίστοιχα (V, ψ) στο $f(p)$ στην M τέτοιοι ώστε σε μια γειτονιά του $\phi(p)$,

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^m, r^{m+1}, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^m).$$

Θεώρημα 5.3.3. (Θεώρημα Υπεμβάπτισης.) Έστω $F : M_1 \rightarrow M_2$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ δυο πολλαπλοτήτων διάστασης d_1 και d_2 αντίστοιχα με $d_1 > d_2$ και έστω y σημείο της M_2 . Εάν η τάξη (rank) της F είναι d_2 σε κάθε σημείο του $F^{-1}(y)$, τότε η $F^{-1}(y)$ είναι μια κλειστή εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M_1 και ισχύει ότι $\dim(F^{-1}(y)) = d_1 - d_2$.

Πρόταση 5.3.4. Μια υπεμβάπτιση $f : N \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι μια ανοικτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω W ένα ανοικτό υποσύνολο της N . Πρέπει να δείξουμε ότι η εικόνα $f(W)$ είναι ανοικτή στη M . Επιλέγουμε αρχικά ένα σημείο $f(p) \in f(W)$. Από το παραπάνω Θεώρημα της υπεμβάπτισης, έχουμε ότι η f είναι τοπικά μια απεικόνιση προβολής. Εφόσον, μια προβολή είναι μια ανοικτή απεικόνιση, τότε υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά U του p στο W έτσι ώστε το $f(U)$ να είναι ανοικτό στη M . Προφανώς ισχύει ότι

$$f(p) \in f(U) \subset f(W).$$

Αφού το $f(p) \in f(U)$ ήταν τυχαίο, το $f(W)$ είναι ανοικτό στη M .

Παρατήρηση. Δοθείσας μιας πολλαπλότητας πηλίκου $M/\sim$ μιας πολλαπλότητας M , λέμε ότι η πολλαπλότητα πηλίκου $M/\sim$ επιδέχεται μια (μοναδική) δομή πολλαπλότητας πηλίκου. Τότε ονομάζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ κανονική.

Πρόταση 5.3.5. Μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στη πολλαπλότητα M είναι κανονική (και επομένως $M/\sim$ είναι πηλίκου πολλαπλότητα) αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Το γράφημα της $\sim$ είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της γινομένου πολλαπλότητας $M \times M$.

(ii) Η απεικόνιση προβολής $\pi_1 : R \rightarrow M$, $\pi_1(x, y) = x$ είναι υπεμβάπτιση. (όπου $R = \text{graph}(\sim)$.)

Το γράφημα R της σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ είναι κλειστό υποσύνολο του $M \times M$.

Η διάσταση της πηλίκου πολλαπλότητας $M/\sim$ δίνεται από την εξής σχέση:

$$\dim(M/\sim) = 2\dim(M) - \dim(R).$$

Πρόταση 5.3.6. Οι συνθήκες (i), (ii) στην παραπάνω πρόταση είναι αναγκαίες και επαρκείς έτσι ώστε η $/\sim$ να επιδέχεται ένα άτλαντα που μετατρέπει την π σε υπεμβάπτιση. Αυτός ο άτλαντας είναι μοναδικός, και η τοπολογία της $/\sim$ είναι η τοπολογία πηλίκου. Η συνθήκη (iii) είναι επαρκής και πλήρης έτσι ώστε η τοπολογία πηλίκου να διατηρεί την ιδιότητα Hausdorff.

Πρόταση 5.3.7. Έστω $M/\sim$ πηλίκου πολλαπλότητα της M και π η κανονική απεικόνιση προβολής. Εάν $\dim(M/\sim) < \dim(M)$, τότε κάθε κλάση ισοδυναμίας $\pi^{-1}(\pi)(x)$, $x \in M$ είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M με διάσταση $\dim(M) - \dim(M/\sim)$.

6 Οι πολλαπλότητες Stiefel και Grassmann.

Στο κεφάλαιο αυτό θα οριστούν και θα περιγραφούν οι πολλαπλότητες Stiefel και Grassmann καθώς και το πώς συνδέονται μεταξύ τους.

Σκοπός είναι η διασύνδεση της πολλαπλότητας Grassmann με τον πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$. Βασικές αναφορές είναι τα βιβλία [9], [7], [4], [3].

Το σύνολο $\mathbb{R}^{n \times p}$ των $n \times p$ πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος με πράξεις την συνήθη πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Επομένως, έχει μια φυσική γραμμική δομή πολλαπλότητας. Ένας χάρτης της πολλαπλότητας δίνεται από την απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{np} : X \mapsto \text{vec}(X)$, όπου $\text{vec}(X)$ δηλώνει το διάνυσμα που προέρχεται τοποθετώντας τις στήλες του X την μία κάτω από την άλλη. Ονομάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}^{n \times p}$ με τη γραμμική δομή πολλαπλότητας ως την πολλαπλότητα $\mathbb{R}^{n \times p}$, με διάσταση np .

Άρα η πολλαπλότητα $\mathbb{R}^{n \times p}$ ταυτίζεται με τον Ευκλείδειο χώρο, στον οποίο ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle := \text{vec}(Z_1)^t \text{vec}(Z_2) = \text{tr}(Z_1^t Z_2).$$

Η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο είναι η νόρμα του Frobenius που ορίζεται από $\|Z\|_F^2 = \text{tr}(Z^t Z)$. Η τοπολογία της πολλαπλότητας $\mathbb{R}^{n \times p}$ είναι η κανονική τοπολογία ενός Ευκλείδειου χώρου.

Έστω $\mathbb{R}_*^{n \times p}$ ($p \leq n$) το σύνολο όλων των $n \times p$ πινάκων με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Αυτό το σύνολο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n \times p}$ επειδή το συμπλήρωμά του είναι το κλειστό σύνολο $\{X \in \mathbb{R}^{n \times p} : \det(X^t X) = 0\}$. Συνεπώς, έχει δομή ανοικτής υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}^{n \times p}$. Η διαφορίσιμη δομή του δίνεται από τον χάρτη $\phi : \mathbb{R}_*^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{np} : X \mapsto \text{vec}(X)$.

Αυτή η πολλαπλότητα ονομάζεται μη συμπαγής πολλαπλότητα Stiefel μέγιστης τάξης (η μέγιστη τάξη εξασφαλίζεται από το ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) $n \times p$ πινάκων.

Ορισμός 6.1.1. Η (μη συμπαγής) πολλαπλότητα Stiefel είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n \times p}$, που ορίζεται ως εξής :

$$\text{St}(p, n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times k} : \text{rank}(A) = k\}$$

δηλαδή,

$\text{St}(p, n) := \{A = (\alpha_1 \dots \alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times k} : \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ γραμμικώς ανεξάρτητα} \}$. Συνήθως, η $\text{St}(p, n)$ καλείται το σύνολο όλων των k -πλαίσιων (όπου ένα k -πλαίσιο στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο από k γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$) του $\mathbb{R}^n$.

Όπως προαναφέραμε η $\text{St}(p, n)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n \times k}$ ως εικόνα του ανοικτού συνόλου $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $A \mapsto \det(A^t A)$ και με τοπολογία της $\mathbb{R}^{n \times p}$.

Στην περίπτωση όπου $p = 1$, η μη συμπαγής πολλαπλότητα Stiefel είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ χωρίς την αρχή των αξόνων, δηλαδή ο $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Όταν $p = n$, τότε η μη συμπαγής πολλαπλότητα Stiefel είναι η γενική γραμμική ομάδα $GL(p, \mathbb{R})$, δηλαδή το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων.

Ορισμός 6.1.2. Ορίζουμε, επίσης, τη συμπαγή πολλαπλότητα Stiefel ως το σύνολο όλων των $n \times p$ ορθοκανονικών πινάκων

$$St_*(p, n) : \{A \in St(p, n) : A^t A = I_k\}.$$

Συνήθως καλείται ως το σύνολο όλων των ορθοκανονικών k -πλαισίων των γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$. Εάν ορίσουμε σε αυτό το σύνολο τη δομή μιας υποπολλαπλότητας, τότε μπορούμε να αναφερθούμε σε αυτό ως η συμπαγής πολλαπλότητα Stiefel η οποία είναι διαφορετική από την μη συμπαγή.

Θα αποδείξουμε τώρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της υπερβάπτισης (Θεώρημα 5.3.3.), ότι είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n \times p}$.

Πρόταση 6.1.3. Αρκεί να βρούμε μια απεικόνιση F από τον $\mathbb{R}^{n \times p}$ σε κάποιον διανυσματικό χώρο έτσι ώστε η απεικόνιση αυτή να είναι υπερβάπτιση. Προφανώς, $St_*(p, n) \subset \mathbb{R}_*^{n \times p}$ Αυτή είναι η εξής :

$$F : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \text{Sym}_p, \quad X \mapsto X^t X - I_p,$$

όπου $X, I_p \in \text{Sym}_p$ και Sym_p είναι το σύνολο των συμμετρικών $p \times p$ πινάκων ο οποίος είναι διανυσματικός χώρος.

Προφανώς, ισχύει

$$St_*(p, n) = F^{-1}(O_p),$$

όπου O_p ο μηδενικός πίνακας. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η F είναι μια υπερβάπτιση σε κάθε σημείο $X \in St_*(p, n)$ με βάση το Θεώρημα 5.3.3. Έχουμε ότι,

$$DF(X)[Z] = X^t Z + Z^t X.$$

Δηλαδή,

$$DF(X)\left[\frac{1}{2}X\hat{Z}\right] = \hat{Z},$$

όπου $\hat{Z} \in \text{Sym}_p$.

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι η F έχει μέγιστη τάξη (full rank) και από το Θεώρημα 5.3.3. έχουμε ότι η $St_*(p, n)$ είναι μια εμφυτευμένη πολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n \times p}$.

Η διάσταση της πολλαπλότητας Stiefel είναι η εξής :

$$\dim(St_*(p, n)) = \dim(\mathbb{R}^{n \times p}) - \dim(\text{Sym}_p) = np - \frac{1}{2}p(p+1) = \frac{p}{2}(2n - p - 1).$$

Επίσης, για $p=1$, έχουμε ότι $St_*(1, n) = S^{n-1}$ το οποίο μας θυμίζει το τελευταίο παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου, ενώ για $p=n$ $St_*(n, n) = O(n)$, όπου $O(n)$ οι ορθογώνιες ομάδες, με διάσταση $\dim(St_*(n, n)) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Παρατήρηση. Καλούμε την πηλίκο δομή ως προς μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ μιας πολλαπλότητας M , $M/\sim$ πηλίκο πολλαπλότητα πινάκων. Καθώς μία πολλαπλότητα M είναι το $\mathbb{R}^{n \times p}$ ή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n \times p}$, τότε ονομάζουμε πολλαπλότητα πινάκων οποιαδήποτε πολλαπλότητα που έχει κατασκευαστεί από το $\mathbb{R}^{n \times p}$ παίρνοντας πολλαπλότητες πηλίκο και εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την πολλαπλότητα Grassmann. Έστω $n, p \in \mathbb{Z}^+$, με $p \leq n$. Τότε η πολλαπλότητα Grassmann $\text{Gr}(p, n)$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των p -διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$,

$$\text{Gr}(p, n) := \{V \subseteq \mathbb{R}^n : \dim(V) = p\},$$

όπου V είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\pi : \mathbb{R}_*^{n \times p} \rightarrow \text{Gr}(p, n)$$

με τύπο

$$A = (\alpha_1 \dots \alpha_p) \mapsto \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\},$$

και εφοδιάζουμε την $\text{Gr}(p, n)$ με την τοπολογία που ονομάζεται *τοπολογία Grassmann* και ένα σύνολο $U \subseteq \text{Gr}(p, n)$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν η εικόνα $\pi^{-1}[U]$ είναι ανοικτή στο $St(p, n)$.

Πρόταση 6.1.4. Θεωρούμε τη $\text{Gr}(p, n)$ με τη τοπολογία Grassmann.

(i) Η απεικόνιση π είναι 1-1 και για κάθε $A \in \mathbb{R}_*^{n \times p}$ έχουμε

$$\pi^{-1}[\pi(A)] = \{AP : P \in \text{GL}(p, \mathbb{R})\}. \quad (1)$$

(ii) Η απεικόνιση π είναι συνεχής και ανοικτή.

Απόδειξη. Προφανώς η απεικόνιση προβολής π είναι 1-1 και συνεχής. Επιπλέον, $A, B \in \mathbb{R}_*^{n \times p}$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο, δηλαδή $\pi(A) = \pi(B)$, αν και μόνο αν υπάρχουν οι πίνακες $P \in \text{GL}(p, \mathbb{R})$ έτσι ώστε $B = AP$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $A = BP$ και $B = AQ = BPQ$ για κάποια $P, Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, από τα οποία έχουμε ότι $P = Q^{-1} \in \text{GL}(p, \mathbb{R})$. Επίσης, για ένα ανοικτό σύνολο $V \subseteq \mathbb{R}_*^{n \times p}$ έχουμε ότι

$$\pi^{-1}[\pi(V)] = \bigcup_{P \in \text{GL}(p, \mathbb{R})} [V]P,$$

δηλαδή η $\pi^{-1}[\pi(V)]$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων. Επομένως, $\pi[V] \subseteq \text{Gr}(p, n)$ το οποίο είναι ανοικτό από τον ορισμό της τοπολογίας Grassmann.

Πρόταση 6.1.5. Θεωρούμε τη πολλαπλότητα Grassmann $\text{Gr}(p, n)$ με τη τοπολογία Grassmann. Έστω Ω ένας τοπολογικός χώρος και

$$f : \text{Gr}(p, n) \rightarrow \Omega.$$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι συνεχής
2. Η $f \circ \pi$ είναι συνεχής
3. Η $f \circ \bar{\pi}$ είναι συνεχής,

όπου $\bar{\pi} := \pi|_{St_*(p,n)}$ και $GS(A)$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt για τις στήλες του A . Επίσης, ισχύει $\bar{\pi} \circ GS = \pi$ και $\bar{\pi}$ είναι 1-1 και συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη.

(1) $\iff$ (2) Προκύπτει από τον ορισμό της παραπάνω τοπολογίας και της απεικόνισης π .

(2) $\Rightarrow$ (3) Είναι προφανές, εφόσον $\bar{\pi}$ είναι ο περιορισμός της π .

(3) $\Rightarrow$ (2) Προκύπτει από την απεικόνιση $f \circ \pi = f \circ \bar{\pi} \circ GS$ και της συνέχειας της GS απεικόνισης.

Επειδή η πολλαπλότητα Grassmann $Gr(p, n)$ είναι ο χώρος που αποτελείται από γραμμικούς p -διάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να επιλέξουμε βάσεις από p γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ και $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε για κάθε πίνακα $g = [g_{ij}] \in GL(p, \mathbb{R})$ να έχουμε

$$y_j = \sum x_i g_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

Τότε για τους πίνακες $X = [x_1, \dots, x_p]$, $Y = [y_1, \dots, y_p]$ θα ισχύει $Y = Xg$. Θεωρούμε τη μη συμπαγή πολλαπλότητα Stiefel $St(p, n)$ που ορίσαμε παραπάνω με τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$

$$X \sim Y \iff \text{span}(X) = \text{span}(Y),$$

δηλαδή

$$X \sim Y \iff Y = Xg,$$

όπου $g \in GL(p, \mathbb{R})$

Πρόταση 6.1.6. Αν ένας πίνακας X και ένας υπόχωρος Y ικανοποιούν τη σχέση $Y = \text{span}(X)$, λέμε ότι ο Y είναι το span του X . Το σύνολο όλων των $\text{span}(X)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας $\pi^{-1}(\pi(X)) = \{Xg : g \in GL(p, \mathbb{R})\} =: XGL(p, \mathbb{R})$. Πράγματι, η πράξη $X \mapsto Xg, g \in GL(p, \mathbb{R})$ αντιστοιχεί σε όλες τις πιθανές αλλαγές της βάσης για το $\text{span}(X)$. Επομένως υπάρχει μια αμφιδι-αφόριση μεταξύ της πολλαπλότητας Grassmann $Gr(p, n)$ και του χώρου πηλίκου $St(p, n)/\sim$,

$$Gr(p, n) \simeq St(p, n)/GL_p = St(p, n)/\sim.$$

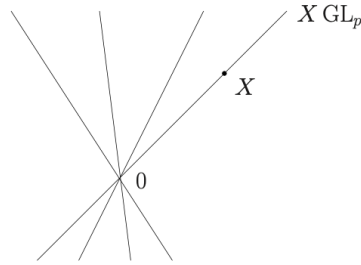
Μερικά παραδείγματα της πολλαπλότητας Grassmann είναι :

Παράδειγμα 1. Αν πάρουμε τη Grassmannian $Gr(1, 1)$ για $p = 1$ στον $\mathbb{R}^1$,

τότε επειδή υπάρχει μόνο ένας 1-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^1$, η $\text{Gr}(1, 1)$ είναι το $\{\mathbb{R}^1\}$.

Παράδειγμα 2. Αν πάρουμε τη πολλαπλότητα Grassmann $\text{Gr}(1, 2)$ για $p = 1$ στον $\mathbb{R}^2$, τότε απεικονίζουμε έναν χώρο με ευθείες, οι οποίες διέρχονται από την αρχή του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι ακριβώς η πραγματική προβολική ευθεία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 4.

Μία απεικόνιση αυτής είναι η παρακάτω εικόνα όπου κάθε σημείο είναι ένας 2×1 πίνακας και κάθε γραμμή είναι μια κλάση ισοδυναμίας των πινάκων που έχουν το ίδιο span. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο της πολλαπλότητας Grassmann.



Παράδειγμα 3. Αν πάρουμε τη $\text{Gr}(1, 3)$ για $p = 1$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε απεικονίζουμε έναν χώρο με ευθείες, οι οποίες διέρχονται από την αρχή του $\mathbb{R}^3$. Θα έχουμε τότε ένα προβολικό επίπεδο.

Επίσης η $\text{Gr}(1, n + 1)$ είναι ο γνωστός μας προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$.

Παράδειγμα 4. Έστω η πολλαπλότητα Grassmann για $p = 2$ στον $\mathbb{R}^4$ $\text{Gr}(2, 4) = \{2\text{-διάστατοι υπόχωροι στον } \mathbb{R}^4\} = \{\text{ευθείες στον } \mathbb{R}P^3\}$. Αυτή περιέχει ευθείες στο $\mathbb{R}P^3$. Ειδικότερα, έστω l μια ευθεία στο $\mathbb{R}P^3$. Χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ στο $\mathbb{R}P^3$. Η ευθεία l θα δίνεται ως $x_0 = x_1 = 0$, άρα $[(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]$. Έτσι οι ευθείες που είναι διαφορετικές από την l θα είναι της μορφής $[(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)]$.

Αυτό ισχύει επειδή αν θεωρήσουμε $X, Y \subset \mathbb{R}^4$ με $X = \{e_3, e_4\}$ και $Y = \{w_1, w_2\}$ με $w_1 = (1, 0, 0, 0), w_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Τότε υπάρχουν τρία ενδεχόμενα για την διάσταση $\dim(X + Y)$: είτε οι ευθείες θα είναι ξένες μεταξύ τους, είτε οι δυο ευθείες θα ταυτίζονται ή θα τέμνονται. Οπότε η τάξη του πίνακα θα είναι δύο ή τρία ή τέσσερα. Αν οι ευθείες είναι διαφορετικές τότε έχουμε έναν 4×4 πίνακα. Οπότε:

$$(X + Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας είναι 4×4 τότε δεν γίνεται μια στήλη να είναι μηδέν, δηλαδή δεν γίνεται για παράδειγμα $w_{11} = w_{21} = 0$. Έτσι, θεωρούμε ότι $w_{11} = 1, w_{21} =$

$0, w_{12} = 0$ και $w_{22} = 1$.

Άρα, ο πίνακας θα είναι της μορφής :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

Πρόταση 6.1.7. Η πολλαπλότητα Grassmann $\text{Gr}(p, n)$ είναι χώρος Hausdorff.

Απόδειξη. Έστω $X = \text{Gr}(p, n)$ και θεωρούμε το γράφημα

$$R = \{(x, y) \in X \times X : y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Τα x, y είναι διανύσματα τα οποία γράφονται σε μορφή πίνακα στήλη $[x, y]$ με τάξη μικρότερη ή ίση του p . Επειδή η ελάχιστου ορίζουσα $(p-1) \times (p-1)$ του πίνακα $[x, y]$ είναι μηδέν, το γράφημα R είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$. Τέλος, επειδή η $\sim$ είναι μια ανοικτή σχέση ισοδυναμίας στο X και το R είναι κλειστό στο $X \times X$, από το Θεώρημα 4.1.7. έχουμε ότι το πηλίκο $\text{St}(p, n)/\sim$ είναι Hausdorff.

Πρόταση 6.1.8. Το σύνολο πηλίκο $\text{St}(p, n)/\text{GL}(p, \mathbb{R}) \simeq \text{Gr}(p, n)$ έχει μοναδική δομή πολλαπλότητας πηλίκο.

Η απόδειξη αυτή παραλείπεται, αλλά χρησιμοποιείται η Πρόταση 5.3.4.

7 Βιβλιογραφία.

References

- [1] Α. Αρβανιτογεώργος: Γεωμετρία Πολλαπλοτήτων, Πολλαπλότητες Riemann και Ομάδες Lie, Συνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, Αθήνα 2015.
- [2] Δ.Ν.Γεωργίου : Γενική τοπολογία, Εκδ. Τζιόλα 2017
- [3] C.E.D.Fernandez : *An elementary introduction to the Grassmann Manifolds*, pp 1-14, XX Brazilian Topology Meeting, UFPR, 2016.
- [4] D.Karrasch : *An Introduction to Grassmann Manifolds and their Matrix Representation*, pp 1-5, Technische Universität München, 2017.
- [5] L. W. Tu : *An Introduction to Manifolds*, Springer-Verlag, New York Second Edition, 2011.
- [6] M.Manetti : *Topology*, Springer, 2015.
- [7] P.-A. Absil, R. Mahoney,R. Sepulchre : Chapter 3. *Matrix Manifolds: First-Order Geometry*, Princeton University Press, pp 21-32, 2008.
- [8] S. Gudmundsson : *An Introduction to Riemannian Geometry, Lecture Notes*, version 14000, pp 17-22, 36-38, Lund University, 2022.
- [9] T. Bendokat, R. Zimmermann, P. A. Absil : *A Grassmann Manifold Handbook : Basic Geometry and Computational Aspects*, University of Southern Denmark, 2020.