



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

Σχολή Θετικών επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών

Διπλωματική Εργασία

Θεμελιώδης ομάδα και υπολογισμοί

Οικονόμου Βασίλειος-Νεκτάριος

Επιβλέπων Καθηγητής: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Πάτρα, 2022

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Οικονόμου Βασίλειος-Νεκτάριος

© 2022 - Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

# Περιεχόμενα

|   |                                        |    |
|---|----------------------------------------|----|
| 1 | Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας            | 1  |
| 2 | Ομοτοπία δρόμων και η Θεμελιώδης Ομάδα | 5  |
| 3 | Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου $S^1$    | 13 |
| 4 | Ιδιότητες της θεμελιώδους ομάδας       | 19 |
| 5 | Εφαρμογές                              | 24 |
| 6 | Το θεώρημα Seifert-Van Kampen          | 33 |
| 7 | Βιβλιογραφία                           | 44 |

## Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματεύεται την αλγεβρική τοπολογία. Πιο συγκεκριμένα θα επικεντρωθούμε στη θεμελιώδη ομάδα τοπολογικών χώρων. Ο κύριος στόχος μας είναι να ορίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα και στην πορεία να κάνουμε μερικούς υπολογισμούς ώστε να την υπολογίσουμε για κάποιους τοπολογικούς χώρους αλλά και να παραθέσουμε αποδείξεις κλασικών θεωρημάτων μέσω της αλγεβρικής τοπολογίας. Σε γενικότερο πλαίσιο, ο κλάδος της αλγεβρικής τοπολογίας μελετάει αλγεβρικές αναλλοίωτες που έχουν οι τοπολογικοί χώροι όπως η θεμελιώδης ομάδα, οι μεγαλύτερες ομάδες ομοτοπίας κ.α. Θεμελιωτής του κλάδου είναι ο H. Poincaré ο οποίος όρισε την ομοτοπία και τις ομάδες ομολογίας στο πλαίσιο της διαφορικής γεωμετρίας, με στόχο να διαχωρίσει τις 2-πολλαπλότητες σε δύο κατηγορίες (1894). Σε μεταγενέστερο στάδιο το αντικείμενο της αλγεβρικής τοπολογίας αναπτύχθηκε με σκοπό τη μελέτη πολλαπλοτήτων Αξιοσημείωτη είναι η δουλεία των Brouwer, Noether, και Hopf στο αντικείμενο της αλγεβρικής τοπολογίας. Θα κάνουμε μία σύντομη σύνοψη των κεφαλαίων.

Στο Κεφάλαιο 1 θα δώσουμε μερικούς βασικούς ορισμούς από τη γενική τοπολογία και θα παραθέσουμε βασικά πορίσματα, θεωρήματα και κατασκευές που θα χρειαστούν. Η μόνη απόδειξη που θα δούμε είναι αυτή του Λήμματος 1.0.1 καθώς θα χρησιμοποιηθεί πολλές φορές στη μελέτη μας.

Στο Κεφάλαιο 2 θα εισάγουμε την έννοια της ομοτοπίας δρόμων και θα ορίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα τοπολογικού χώρου. Με λίγα λόγια σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε την κατασκευή μιας αλγεβρικής δομής σε έναν τοπολογικό χώρο.

Στο Κεφάλαιο 3 θα κάνουμε τον πρώτο ουσιαστικό υπολογισμό θεμελιώδους ομάδας, ότι  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Η αποδεικτική μέθοδος που θα ακολουθήσουμε είναι αυτή του [1], και όπως θα δούμε η απόδειξη είναι αρκετά εκτενής και απαιτεί πολλούς συλλογισμούς. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην Πρόταση 3.0.1, και στον ορισμό του χώρου κάλυψης.

Στο Κεφάλαιο 4 δείχνουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι τοπολογική αναλλοίωτη και αποδεικνύουμε τέσσερα χρήσιμα θεωρήματα ώστε να επεκτείνουμε τους υπολογισμούς που έχουμε κάνει σε περισσότερους τοπολογικούς χώρους.

Το Κεφάλαιο 5 είναι ίσως το πιο ενδιαφέρον κεφάλαιο αυτής της εργασίας καθώς βλέπουμε αρκετούς υπολογισμούς, εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4 και επιπλέον παραθέτουμε αποδείξεις κλασικών θεωρημάτων μέσω της θεμελιώδους ομάδας.

Στο Κεφάλαιο 6 κάνουμε μία σύντομη εισαγωγή στις ελεύθερες ομάδες και αποδεικνύουμε το Θεώρημα Seifert-Van Kampen το οποίο σχετίζει τη θεμελιώδη ομάδα ενός χώρου  $X$  με το ελεύθερο γινόμενο των θεμελιωδών ομάδων χώρων που η ένωση τους κάνει  $X$ .

Σε αυτό το σημείο θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα Καθηγητή Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για την καθοδήγηση του, τις παρατηρήσεις του και τον χρόνο που αφιέρωσε στην υλοποίηση αυτής της εργασίας. Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη του διδακτικού προσωπικού που λύσανε διάφορες απορίες μου, και με βοήθησαν να δω το αντικείμενο από αρκετές σκοπιές.

# Κεφάλαιο 1

## Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας

Η τοπολογία είναι ένας κλάδος που μελετάει, και προσπαθεί να γενικεύσει, την έννοια της συνέχειας. Όσον αφορά την έννοια της συνέχειας, έχουμε ότι μικρές περιοχές πρέπει να απεικονίζονται σε μικρές περιοχές. Για να το πετύχουμε αυτό σε πιο αφηρημένα σύνολα πρέπει να ορίσουμε τι σημαίνει μικρή ανοικτή περιοχή. Στην πραγματικότητα το μικρή από σκοπιά μετρικής δεν έχει καμία σημασία. Το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι να ξέρουμε τι είναι ανοικτό σύνολο στην πλήρη γενικότητά του.

**Ορισμός 1.0.1.** Έστω  $X$  ένα σύνολο και  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  μία συλλογή υποσυνόλων του. Η  $\mathcal{T}$  καλείται τοπολογία επί του  $X$  αν ικανοποιούνται οι τρεις παρακάτω ιδιότητες:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Αν  $U_i \in \mathcal{T}, i \in I$  τότε  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
3. Αν  $n \in \mathbb{N}$  και  $U_k \in \mathcal{T}$  για κάθε  $k = 1, \dots, n$  τότε  $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T}$

Τα υποσύνολα του  $X$  που ανήκουν στην  $\mathcal{T}$  καλούνται **ανοικτά** σύνολα. Τα σύνολα των οποίων τα συμπληρώματα ανήκουν στην τοπολογία καλούνται **κλειστά**, συμβολίζουμε  $\mathcal{T}^c = \{F \subset X : F^c = X - F \in \mathcal{T}\}$ . Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία τοπολογία καλείται **τοπολογικός χώρος**. Τέλος, αν κάποιο  $x \in X$  ανήκει σε κάποιο ανοικτό σύνολο  $U$  θα λέμε ότι το  $U$  είναι ανοικτή περιοχή του  $x$ .

**Παρατήρηση 1.0.1.** Είναι προφανές ότι ένα σύνολο μπορεί να εφοδιαστεί με πολλές τοπολογίες. Πιο συγκεκριμένα οι τοπολογίες  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  (η οποία ονομάζεται τετριμμένη) και η  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  (η οποία ονομάζεται διακριτή) είναι πάντα διαθέσιμες για να δώσουν σε οποιοδήποτε σύνολο δομή τοπολογικού χώρου. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εφοδιάζουμε τα σύνολα που μας δίνονται με πιο πλούσιες δομές.

**Πρόταση 1.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος. Τότε ισχύουν τα εξής:

1.  $X, \emptyset \in \mathcal{T}^c$ .
2. Η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή  
Αν  $F_i \in \mathcal{T}^c$ , τότε  $\bigcup_{i=1}^k F_i \in \mathcal{T}^c$ .
3. Η αυθαίρετη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή  
Αν  $F_i \in \mathcal{T}^c$  για  $i \in I$ , τότε  $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{T}^c$ .

Παρακάτω θα δώσουμε ορισμούς για βασικές έννοιες της τοπολογίας.

**Ορισμός 1.0.2.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος  $M \subset X$  και  $x \in X$ . Τότε:

1. Το  $x$  καλείται σημείο επαφής του  $M$  αν για κάθε ανοικτή περιοχή του  $x$ , έστω  $U$  ισχύει ότι  $U \cap M \neq \emptyset$ . Το σύνολο των σημείων επαφής καλείται **κλειστή θήκη ή κλειστότητα** του  $M$ . Συμβολίζουμε  $Cl(M)$
2. Το  $x$  καλείται εσωτερικό σημείο του  $M$  αν υπάρχει ανοικτή περιοχή του  $x$ , έστω  $U$  και ισχύει ότι  $U \subset M$ . Το σύνολο των εσωτερικών σημείων καλείται **εσωτερικό** του  $M$ . Συμβολίζουμε  $int(M)$
3. Το  $x$  καλείται συνοριακό σημείο του  $M$  αν για κάθε ανοικτή περιοχή του  $x$ , έστω  $U$  ισχύει ότι  $U \cap M \neq \emptyset$  και  $U \cap M^c \neq \emptyset$ . Το σύνολο των συνοριακών σημείων καλείται **σύνορο** του  $M$ . Συμβολίζουμε  $Bd(M)$

**Ορισμός 1.0.3.** Έστω  $X, \mathcal{T}$  τοπολογικός χώρος και  $A \subset X$ . Θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ . Αποδεικνύεται ότι το  $A$  αποκτά δομή τοπολογίας με τοπολογία την  $\mathcal{T}_A$  η οποία καλείται **σχετική τοπολογία ή τοπολογία υποχώρου** επί του  $A$

**Πρόταση 1.0.2.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$  τοπολογικός χώρος και  $A \subset X$ . Αν  $U$  κλειστό στον  $A$  με την σχετική τοπολογία τότε το  $U$  είναι κλειστό στον  $(X, \mathcal{T}_X)$ . Δηλαδή αν  $U \in \mathcal{T}_A^c$  τότε  $U \in \mathcal{T}_X^c$

**Ορισμός 1.0.4.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  καλείται **βάση** της τοπολογίας αν κάθε ανοικτό  $U \in \mathcal{T}$  μπορεί να γραφεί ως ένωση στοιχείων του  $\mathcal{B}$

**Θεώρημα 1.0.1.** Ένα υποσύνολο της τοπολογίας  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  είναι βάση αν και μόνο αν για κάθε  $x \in X$  και  $U \in \mathcal{T}$  ανοικτή περιοχή του  $x$  υπάρχει  $V \in \mathcal{B}$  τέτοιο ώστε  $x \in V \subset U$

**Ορισμός 1.0.5.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$  και  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικοί χώροι και μία απεικόνιση:

$$f : X \rightarrow Y$$

1. Η  $f$  καλείται **συνεχής** αν για κάθε  $V \in \mathcal{T}_Y$  το σύνολο  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ . Δηλαδή η αντίστροφη εικόνα ανοικτού είναι ανοικτό.
2. Η  $f$  καλείται **ανοικτή** αν για κάθε  $U \in \mathcal{T}_X$  τότε  $f(U) \in \mathcal{T}_Y$
3. Η  $f$  καλείται **κλειστή** αν για κάθε  $U \in \mathcal{T}_X^c$  τότε  $f(U) \in \mathcal{T}_Y^c$
4. Η  $f$  καλείται ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής, αντιστρέψιμη, και η  $f^{-1}$  είναι συνεχής. Αν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ των τοπολογικών χώρων  $(X, \mathcal{T}_X)$  και  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  οι χώροι καλούνται ομοιόμορφοι και γράφουμε  $X \cong Y$

Η συνέχεια είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες καθώς διατηρεί πολλές τοπολογικές ιδιότητες που θα δούμε παρακάτω. Ακόμα πιο ισχυρή έννοια είναι αυτή του ομοιομορφισμού καθώς διατηρεί ιδιότητες γνωστές ως τοπολογικές αναλλοίωτες. Όταν δύο χώροι είναι ομοιόμορφοι τους θεωρούμε το όμοιους και ο ομοιομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας στους τοπολογικούς χώρους κάτι το οποίο δημιουργεί το ερώτημα της ταξινόμησης τοπολογικών χώρων. Τώρα που ξέρουμε για ομοιομορφισμούς είμαστε σε θέση να ορίσουμε τοπολογικές ιδιότητες που διατηρούνται μέσω αυτού (σε κάποιες περιπτώσεις αρκεί μόνο η συνέχεια).

Θα παραθέσουμε κάποιες προτάσεις που αφορούν τη συνέχεια και θα αποδείξουμε ένα εξαιρετικά σημαντικό λήμμα για τη μελέτη μας.

**Πρόταση 1.0.3.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$  τοπολογικοί χώροι και οι συνεχείς απεικονίσεις  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Y \rightarrow Z$ . Τότε η σύνθεση  $g \circ f : X \rightarrow Z$  είναι επίσης συνεχής.

**Απόδειξη.** Έστω  $A \in \mathcal{T}_Z$ . Θα δείξουμε ότι  $(g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$ . Πράγματι,

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

Το  $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_Y$  διότι η  $g$  είναι συνεχής. Επιπλέον, η  $f$  είναι συνεχής και  $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_Y$  οπότε  $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_X$ . Ξεκινήσαμε με  $A \in \mathcal{T}_Z$  και δείξαμε ότι  $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$   $\square$

**Πρόταση 1.0.4.** Έστω  $X, \mathcal{T}_X$  και  $Y, \mathcal{T}_Y$  τοπολογικοί χώροι και  $f : X \rightarrow Y$  απεικόνιση. Η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε  $V \in \mathcal{T}_Y$  η αντίστροφη εικόνα είναι  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$

**Λήμμα 1.0.1 (Λήμμα συγκόλλησης).** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$  και  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικοί χώροι όπου ο  $X$  γράφεται ως πεπερασμένη ένωση κλειστών υποσυνόλων του, δηλαδή  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$  όπου  $X_i \in \mathcal{T}^c$ . Αν υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις  $f_i : X_i \rightarrow Y$  και  $f_i(X_i \cap X_j) = f_j(X_i \cap X_j)$ , για κάθε  $i, j$  τότε υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  τέτοια ώστε  $f|_{X_i} = f_i$ .

**Απόδειξη.** Η απεικόνιση  $f(x) = f_i(x)$ ,  $x \in X_i$  είναι αυτό που χρειαζόμαστε. Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη. Έστω  $x \in X$ , τότε  $x \in \bigcup_{i=1}^n X_i$  οπότε το  $x$  θα είναι στοιχείο κάποιων από τα  $X_i$  έστω ότι είναι των  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  τότε  $x \in \bigcap_{j=1}^k X_{i_j}$  οπότε από την υπόθεση μας έχουμε ότι:

$$f(x) = f_{i_1}(x) = \dots = f_{i_k}(x)$$

καθώς οι απεικονίσεις  $f_i$  συμφωνούν στις τομές των  $X_i$  οπότε και στις τομές των  $X_{i_j}$ .

Το γεγονός ότι είναι μοναδική είναι προφανές.

Τέλος, θα δείξουμε ότι είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου είναι κλειστό σύνολο για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.0.4. Έστω  $V \in \mathcal{T}_Y^c$ .

$$f^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = \left( \bigcup_{i=1}^n X_i \right) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n X_i \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n X_i \cap f_i^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(V)$$

Από την Πρόταση 1.0.4 έχουμε ότι  $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{X_i}^c$  και  $X_i$  κλειστό στον  $X$  οπότε  $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X^c$ . Δηλαδή έχουμε πεπερασμένη ένωση κλειστών στον  $(X, \mathcal{T}_X)$ , δηλαδή κλειστό σύνολο. Συνεπώς, το  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X^c$  για κάθε  $V \in \mathcal{T}_Y^c$  οπότε λόγω της Πρότασης 1.0.4 η  $f$  είναι συνεχής.  $\square$

**Παρατήρηση 1.0.2.** Το παραπάνω λήμμα ισχύει και αν τα σύνολα  $X_i$  είναι ανοικτά.

**Ορισμός 1.0.6.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος,  $A \subset X$  και  $\{U_i : i \in I\}$  μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του τέτοια ώστε  $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Τότε η  $\{U_i : i \in I\}$  καλείται **ανοικτό κάλυμμα** του  $A$ . Αν επιπλέον  $I_1 \subset I$  και ισχύει  $A \subset \bigcup_{i \in I_1} U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  τότε η οικογένεια  $\{U_i : i \in I_1\}$  καλείται **υποκάλυμμα**.

**Ορισμός 1.0.7.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος,  $A \subset X$ . Αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του  $A$  έχει την ιδιότητα να έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα τότε το σύνολο  $A \subset X$  καλείται **συμπαγές**. Στην περίπτωση που  $A = X$  λέμε ότι ο  $X$  είναι **συμπαγής τοπολογικός χώρος**.

**Θεώρημα 1.0.2 (Heini-Borel).** Έστω  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Το  $S$  είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

**Παράδειγμα 1.0.1.** Με βάση το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι η σφαίρα  $S^n$  για κάθε  $n \geq 1$ , ο κλειστός δίσκος  $D^n[x_0, r]$  κέντρου  $x_0$  και ακτίνας  $r$  στον  $\mathbb{R}^n$ , το κλειστό  $[0, 1]$  είναι συμπαγή σύνολα.

**Ορισμός 1.0.8.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος και  $U, V \in \mathcal{T}$  τέτοια ώστε  $X = U \cup V$  και  $U \cap V = \emptyset$ . Αν υπάρχουν τέτοια σύνολα λέμε ότι είναι **διαχωρισμός** του  $Q$  και γράφουμε  $X = U|V$ . Αν υπάρχει διαχωρισμός του  $X$  τότε θα λέμε ότι  $X$  δεν είναι συνεκτικός, αλλιώς ο  $X$  θα καλείται **συνεκτικός**.

**Παρατήρηση 1.0.3.** Η συμπαγία και η συνεκτικότητα διατηρούνται μέσω συνεχών απεικονίσεων.

**Παράδειγμα 1.0.2.** Τα μόνα συνεκτικά σύνολα στον  $\mathbb{R}$  είναι τα διαστήματα. Ο μοναδιαίος κύκλος είναι συνεκτικό σύνολο.

**Ορισμός 1.0.9.** Έστω  $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ ,  $i \in I$  τοπολογικοί χώροι. Έστω  $X = \prod_{i \in I} X_i$  να είναι το καρτεσιανό γινόμενο των  $X_i$ . Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i : \text{όπου } U_i \in \mathcal{T}_{X_i} \text{ για κάθε } i \text{ και } U_i \neq X_i \text{ για πεπερασμένα (το πολύ) } i \right\}$$

Ενώσεις στοιχείων του  $\mathcal{B}$  ορίζουν τοπολογία στο σύνολο  $X$  η οποία καλείται **Box-τοπολογία**.

**Παρατήρηση 1.0.4.** Υπάρχει και άλλη μία γνωστή τοπολογία με την οποία μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο  $\prod_{i \in I} X_i$  η οποία αφορά τη συνέχεια των κανονικών προβολών  $pr_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ . Στη μελέτη που θα κάνουμε μας ενδιαφέρουν πεπερασμένα γινόμενα χώρων στα οποία οι δύο τοπολογίες που αναφέραμε ταυτίζονται. Επιπλέον, σε πεπερασμένα γινόμενα ισχύει ότι αν έχουμε μία απεικόνιση  $f : Z \rightarrow X \times Y$  τότε η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν οι  $pr_1 \circ f$  και  $pr_2 \circ f$  είναι συνεχής στους  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα.

Τέλος, θα παραθέσουμε ένα λήμμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί αρκετά μετά στη μελέτη μας (βλ. 4.0.4)

**Λήμμα 1.0.2.** Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος και  $U_a$  ένα ανοικτό κάλυμμα του. Τότε υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολο  $V$  του  $X$  με διάμετρο μικρότερη του  $\delta$  να εμπεριέχεται σε κάποιο από τα  $U_a$ . Ο  $\delta$  καλείται αριθμός Lebesgue του καλύμματος.

## Κεφάλαιο 2

# Ομοτοπία δρόμων και η Θεμελιώδης Ομάδα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε δρόμους σε τοπολογικούς χώρους, δηλαδή συνεχείς απεικονίσεις από το  $I = [0, 1]$ . Η μελέτη που θα κάνουμε και οι αποδείξεις που θα δώσουμε πάνε με βάση την παράγραφο 1.1 του [1].

**Παρατήρηση 2.0.1.** Η ύπαρξη συνεχούς απεικόνισης (μη σταθερής) από το  $I$  σε τυχαίο τοπολογικό χώρο δεν είναι πάντα εφικτή. Για παράδειγμα, αν πάρουμε έναν διακριτό χώρο.

**Ορισμός 2.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος. Ένας δρόμος καλείται μία συνεχής απεικόνιση  $f : [0, 1] \rightarrow X$ . Τα σημεία  $f(0) = x_0 \in X$  και  $f(1) = x_1 \in X$  καλούνται αρχή και τέλος του δρόμου αντίστοιχα (ή άκρα του).

**Ορισμός 2.0.2.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος. Αν για κάθε  $x_1, x_2 \in X$  υπάρχει δρόμος με άκρα τα  $x_1, x_2$  τότε ο  $X$  καλείται **δρομοσυνεκτικός**.

**Παρατήρηση 2.0.2.** Αποδεικνύεται ότι τα διαστήματα, η σφαίρα  $S^n$ , ο  $\mathbb{R}^n$ , ο  $\mathbb{R}^n - \{0_n\}$  για κάθε  $n \geq 2$  είναι δρομοσυνεκτικά σύνολα. Επιπλέον, αν  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  είναι δρομοσυνεκτικοί τοπολογικοί χώροι τότε το γινόμενο  $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$  είναι επίσης δρομοσυνεκτικός χώρος.

Τώρα θα δούμε την κεντρική ιδέα παραμόρφωσης δρόμων μέσω της οποίας θεωρούνται ισοδύναμοι.

**Ορισμός 2.0.3.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος και δύο σημεία του  $x_0, x_1 \in X$ . Μία **ομοτοπία δρόμων (path homotopy)** (ή ομοτοπία) με άκρα τα  $x_0, x_1$  καλείται μία οικογένεια δρόμων  $f_t(x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  τέτοια ώστε:

- $f_t(0) = x_0$  και  $f_t(1) = x_1$  για κάθε  $t \in I$
- Η επαγόμενη απεικόνιση  $H : I \times I \rightarrow X$  με τύπο  $H(s, t) = f_t(s)$  να είναι συνεχής

Αν υπάρχει ομοτοπία μεταξύ δύο δρόμων τότε οι δρόμοι καλούνται **ομοτοπικοί** και συμβολίζουμε  $f_0 \sim f_1$ .

**Παρατήρηση 2.0.3.** Στον παραπάνω ορισμό ομοτοπία ορίστηκε να είναι η οικογένεια δρόμων  $f_t$  με συνθήκη τη συνέχεια της επαγόμενης απεικόνισης  $H$ . Αν υπάρχει τέτοια συνεχής απεικόνιση οι εικόνες  $H(s, t) = f_t(s)$  μας ορίζουν την οικογένεια  $f_t$  οπότε πολλές φορές ομοτοπία καλείται η απεικόνιση  $H$ . Γενικά σε αποδεικτικό πλαίσιο αρκεί να αποδεικνύουμε την ύπαρξη και συνέχεια της επαγόμενης απεικόνισης  $H$ . Σε πρώτο στάδιο θα δείχνουμε την ομοτοπία ως οικογένεια δρόμων αλλά στην πορεία, για να έχουμε πιο απλούς υπολογισμούς, θα δείχνουμε την ύπαρξη και συνέχεια της απεικόνισης  $H$ .

Διαισθητικά η ομοτοπία είναι μία συνεχής παραμόρφωση κατά την οποία απαγορεύεται η αποκοπή ή συγχόληση

**Παράδειγμα 2.0.1.** Έστω  $S$  κυρτό  $S \subset \mathbb{R}^n$  και δύο δρόμοι  $f_0, f_1 : I \rightarrow S$ , δηλαδή  $f_1(0) = f_0(0) = x_0$  και  $f_1(1) = f_0(1) = x_1$ , τότε η απεικόνιση  $H : I \times I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  με τύπο  $H(s, t) = (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$  είναι ομοτοπία. Πράγματι,

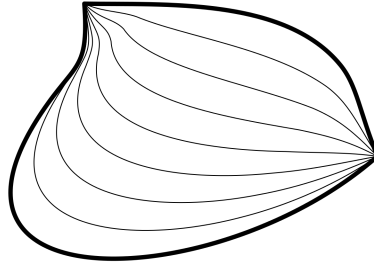
$$H(s, 0) = f_0(s)$$

$$H(s, 1) = f_1(s)$$

$$f_t(0) = H(0, t) = (1-t)f_0(0) + tf_1(0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0$$

$$f_t(1) = H(1, t) = (1-t)f_0(1) + tf_1(1) = (1-t)x_1 + tx_1 = x_1$$

Στον  $\mathbb{R}^n$  οι πράξεις πολλαπλασιασμού με αριθμό και η πρόσθεση διανυσμάτων είναι συνεχείς απεικονίσεις, επιπλέον οι  $f_0, f_1$  είναι συνεχείς οπότε η απεικόνιση  $H$  είναι συνεχής. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω ομοτοπία σχηματικά απεικονίζει δύο δρόμους σε όλους τους ενδιάμεσους.



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση της ομοτοπίας

Όπως είναι σύνηθες στα μαθηματικά, οι σχέσεις ομοιότητας αντικειμένων είναι σχέσεις ισοδυναμίας οι οποίες ορίζουν κλάσεις ισοδυναμίας κάτι το οποίο θα αποδείξουμε για την ομοτοπία. Επιπλέον, οι κλάσεις που ορίζονται από την ομοτοπία δρόμων αν εφοδιαστεί με μία πράξη σύνθεσης δρόμων (στην πραγματικότητα παράθεση) είναι ομάδα η οποία καλείται θεμελιώδης ομάδα τοπολογικού χώρου όπως θα δούμε παρακάτω.

**Πρόταση 2.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος και συμβολίζουμε με  $C_{x_0}^{x_1}$  το σύνολο των δρόμων με άκρα τα  $x_0, x_1$ . Η σχέση  $\sim$ :

$$f_1 \sim f_0 \iff \text{οι δρόμοι } f_0, f_1 \text{ είναι ομοτοπικοί}$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο  $C_{x_0}^{x_1}$ .

Απόδειξη.

1.) Ανακλαστικότητα:

Έστω  $f \in C_{x_0}^{x_1}$ . Τότε τα στοιχεία της οικογένειας  $f_t = \{f : \text{για κάθε } t \in I\}$  έχουν σταθερά άκρα και η απεικόνιση  $H(s, t) = f(s)$  είναι συνεχής (διότι η  $f$  είναι συνεχής) οπότε  $f \sim f$

2.) Συμμετρία:

Έστω  $f_0 \sim f_1$  τότε υπάρχει ομοτοπία μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχει οικογένεια δρόμων  $f_t, t \in [0, 1]$  και συνεχής απεικόνιση  $H$  που να ικανοποιούν τις συνθήκες του Ορισμού 2.0.3. Θεωρούμε την οικογένεια  $f_{1-t}$  και την απεικόνιση  $G(s, t) = H(s, 1-t)$  η οποία είναι ομοτοπία των  $f_0$  και  $f_1$ . Πράγματι,  $f_{1-t}(0) = x_0$  και  $f_{1-t}(1) = x_1$  για κάθε  $t \in I$  και η απεικόνιση  $G(s, t)$  είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων. Επιπλέον, έχουμε ότι  $G(s, 0) = H(s, 1) = f_1(s)$  και  $G(s, 1) = H(s, 0) = f_0$  οπότε  $f_1 \sim f_0$

3.) Μεταβατικότητα:

Έστω  $f_0 \sim f_1$  και  $f_1 \sim f_2$ . Έστω  $f_t$  ομοτοπία μεταξύ των  $f_0$  και  $f_1$  και  $g_t$  ομοτοπία μεταξύ των  $f_1$  και  $f_2$ . Άμεσα έχουμε ότι  $x_0 = f_t(0) = f_0(0) = f_1(0) = f_2(0) = g_t(0)$  και  $x_1 = f_t(1) = f_0(1) = f_1(1) = f_2(1) = g_t(1)$ , για κάθε  $t \in I$ . Επιπλέον, θεωρούμε την οικογένεια:

$$h_t = \begin{cases} f_{2t}, & t \in [0, 1/2] \\ g_{2t-1}, & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Η οικογένεια  $h_t$ ,  $t \in I$  ικανοποιεί τη συνθήκη που θέλουμε για τα άκρα αλλά η απόδειξη δεν έχει ολοκληρωθεί καθώς χρειαζόμαστε τη συνέχεια της επαγόμενης απεικόνισης  $H : I \times I \rightarrow X$  με τύπο:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t), & (s, t) \in I \times [0, 1/2] \\ G(s, 2t - 1), & (s, t) \in I \times [1/2, 1] \end{cases}$$

όπου  $F, G$  είναι οι επαγόμενες συνεχείς απεικονίσεις των ομοτοπιών  $f_t$  και  $g_t$ . Αρκεί να δείξουμε ότι η  $H$  είναι συνεχής. Οι περιορισμοί της  $H$  στα  $A = I \times [0, 1/2]$  και  $B = I \times [1/2, 1]$  είναι συνεχείς. Πράγματι,

$$H|_A = F(s, 2t) \quad t \in [0, 1/2]$$

$$H|_B = G(s, 2t - 1) \quad t \in [1/2, 1]$$

οι οποίες είναι συνεχείς απεικονίσεις. Επιπλέον, στο  $A \cap B = I \times \{1/2\}$  έχουμε  $F(s, 2 \cdot 1/2) = f_1(s) = G(s, 0) = G(s, 2 \cdot 1/2 - 1)$  και  $A \cup B = I \times I$ . Λόγω του Λήμματος 1.0.1 έχουμε ότι η απεικόνιση  $H$  είναι συνεχής στο  $I \times I$   $\square$

**Παρατήρηση 2.0.4.** Με βάση την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας για κάθε δρόμο  $f$  ορίζεται μία κλάση ισοδυναμίας ως προς την  $\sim$  η οποία θα συμβολίζεται με  $[f]$

**Ορισμός 2.0.4.** Έστω  $f, g$  δρόμοι τέτοιοι ώστε  $f(1) = g(0)$ . Τότε ορίζεται η πράξη:

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Η παραπάνω πράξη καλείται σύνθεση δρόμων και είναι καλά ορισμένη.

**Παρατήρηση 2.0.5.** Το αποτέλεσμα της παραπάνω πράξης είναι δρόμος καθώς  $f * g|_{[0, 1/2]} = f$  και  $f * g|_{[1/2, 1]} = g$  που είναι συνεχείς. Επιπλέον,  $[0, 1/2] \cup [1/2, 1] = I$  και  $f(1) = g(0)$  οπότε από το Λήμμα 1.0.1 η απεικόνιση  $f * g$  είναι δρόμος ως συνεχής εικόνα του  $I$

**Παράδειγμα 2.0.2.** Έστω δρόμοι  $f, g, h$  τέτοιοι ώστε  $f(1) = g(0)$  και  $g(1) = h(0)$ . Θα υπολογίσουμε τις συνθέσεις  $(f * g) * h$  και  $f * (g * h)$ . Έχουμε  $f * g : I \rightarrow X$ :

$$f * g = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

οπότε

$$(f * g) * h = \begin{cases} (f * g)(2s), & s \in [0, 1/2] \\ h(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(4s), & s \in [0, 1/4] \\ g(4s - 1), & s \in [1/4, 1/2] \\ h(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Για τη σύνθεση  $g * h : I \rightarrow X$  έχουμε:

$$g * h = \begin{cases} g(2s), & s \in [0, 1/2] \\ h(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

οπότε:

$$f * (g * h) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ (g * h)(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ g(4s - 2), & s \in [1/2, 3/4] \\ h(4s - 3), & s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Για διευκρίνιση σημειώνουμε ότι οι ποσότητες  $4s - 2, 4s - 3$  προέκυψαν διότι  $2(2s - 1)$  και  $2(2s - 1) - 1$  καθώς συνθέτουμε τα ορίσματα. Παρακάτω θα δούμε ότι οι δρόμοι  $(f * g) * h$  και  $f * (g * h)$  είναι ομοτοπικοί οπότε η πράξη  $*$  είναι προσηταιριστική.

**Πρόταση 2.0.2.** Η πράξη  $*$  διατηρεί την ομοτοπία. Δηλαδή αν  $f_0 \sim f_1$  και  $g_0 \sim g_1$  τότε  $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ .

Απόδειξη. Έστω οι ομοτοπίες  $F$  και  $G$  μεταξύ των δρόμων  $f_0, f_1$  και  $g_0, g_1$  αντίστοιχα τότε η απεικόνιση  $H : I \times I \rightarrow X$  με τύπο:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & (s, t) \in [0, 1/2] \times I \\ G(2s - 1, t), & (s, t) \in [1/2, 1] \times I \end{cases}$$

είναι συνεχής λόγω του Λήμματος 1.0.1 καθώς  $([0, 1/2] \times I) \cup ([1/2, 1] \times I) = I \times I$  και  $([0, 1/2] \times I) \cap ([1/2, 1] \times I) = \{1/2\} \times I$  όπου  $F(1, t) = f_t(1) = g_t(0) = G(0, t) = H(1/2, t)$ . Η  $H$  είναι ομοτοπία μεταξύ των  $f_0 * g_0$  και  $f_1 * g_1$ . Πράγματι, εφόσον ορίζεται η πράξη  $*$  μεταξύ των  $f_0, g_0$  και  $f_1, g_1$  και από τις ομοτοπίες  $f_0 \sim f_1$  και  $g_0 \sim g_1$  έχουμε τις παρακάτω ισότητες:

$$f_t(0) = x_0 \text{ για κάθε } t \in I$$

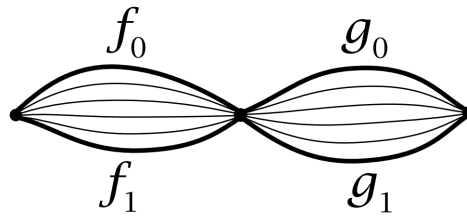
$$f_t(1) = x_1 \text{ για κάθε } t \in I$$

$$g_t(0) = y_0 \text{ για κάθε } t \in I$$

$$g_t(1) = y_1 \text{ για κάθε } t \in I$$

$$x_1 = f_0(1) = g_0(0) = y_0 \text{ και } H(s, 0) = f_0 * g_0 \text{ και } H(s, 1) = f_1 * g_1$$

Από τις παραπάνω ισότητες, τη συνέχεια της  $H$  και τον ορισμό της σύνθεσης δρόμων έχουμε ότι η  $H$  είναι ομοτοπία μεταξύ των  $f_0 * g_0$  και  $f_1 * g_1$ , δηλαδή  $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση της ομοτοπίας σύνθεσης δρόμων (πηγή:[1])

□

**Παρατήρηση 2.0.6.** Στην παραπάνω πρόταση δείξαμε την εξής σημαντική ιδιότητα της ομοτοπίας. Αν  $[f]$  και  $[g]$  οι κλάσεις των δρόμων  $f$  και  $g$  αντίστοιχα τότε η πράξη  $*$  ορίζεται καλώς, δηλαδή αν:

$$f \sim f_1 \text{ και } g \sim g_1 \text{ τότε } f * g \sim f_1 * g_1$$

ή ισοδύναμα

$$[f] = [f_1] \text{ και } [g] = [g_1] \text{ τότε } [f * g] = [f_1 * g_1]$$

Τώρα που είδαμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της ομοτοπίας δρόμων θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε κλειστούς δρόμους και θα ορίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα.

**Ορισμός 2.0.5.** Έστω  $f$  δρόμος. Ο  $f$  θα καλείται κλειστός αν  $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ , και το  $x_0$  θα καλείται βασικό σημείο. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας, των κλειστών δρόμων με κοινό βασικό σημείο  $x_0$  θα το συμβολίζουμε με  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Παρατήρηση 2.0.7.** Με βάση τον συμβολισμό που είχαμε στην Πρόταση 2.0.1 θα γράφαμε  $\pi_1(X, x_0) = C_{x_0}^{x_0} / \sim$ . Το παραπάνω σύνολο έχει μεγάλο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, αν έχει πάνω από δύο στοιχεία τότε υπάρχουν μη ομοτοπικοί κλειστοί δρόμοι, κάτι το οποίο μας δίνει αρκετές πληροφορίες για την τοπολογία του χώρου μας. Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του είναι ότι με την πράξη  $*$ , που όπως είδαμε είναι καλά ορισμένη σε κλάσεις ομοτοπίας, έχει δομή ομάδας η οποία καλείται θεμελιώδης ομάδα του τοπολογικού χώρου με βάση το  $x_0$  και όπως θα δούμε είναι τοπολογική αναλλοίωτη σε πλαίσιο ισομορφισμού. Για να αποδείξουμε ότι έχει δομή ομάδας θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.0.3.** Έστω  $f : I \rightarrow X$  κλειστός δρόμος και συνεχής απεικόνιση  $a : I \rightarrow I$  τέτοια ώστε  $a(0) = 0$  και  $a(1) = 1$ . Η σύνθεση  $f \circ a : I \rightarrow X$  είναι επίσης κλειστός δρόμος και είναι ομοτοπικός με την  $f$

Απόδειξη. Το ότι είναι κλειστός είναι προφανές καθώς  $f \circ a(0) = f(0) = x_0$  και  $f \circ a(1) = f(1) = x_0$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $H : I \times I \rightarrow I$  όπου  $H(s, t) = (1 - t)a(s) + ts$  η οποία είναι συνεχής και  $H(s, 0) = a_0(s) = a(s)$ ,  $H(s, 1) = a_1(s) = s = id_I$ . Σημειώνουμε ότι  $s \in I$  και  $a(s) \in I$  οπότε η κυρτότητα του  $I$  μας εξασφαλίζει ότι το πεδίο τιμών,  $I$ , της  $H$  είναι καλά ορισμένο και ορίζεται η σύνθεση  $f(H(s, t))$  καθώς είναι  $f : I \rightarrow X$  και  $H : I \times I \rightarrow I$ . Οπότε, θεωρούμε την απεικόνιση  $G : I \times I \rightarrow X$  όπου  $G(s, t) = f(H(s, t))$  η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων. Επιπλέον, έχουμε ότι  $G(0, t) = f(H(0, t)) = f(x_0) = G(1, t)$  και  $G(s, 0) = f(H(s, 0)) = f(a(s))$  και  $G(s, 1) = f(H(s, 1)) = f(s)$ . Δηλαδή η  $G$  είναι ομοτοπία οπότε  $f \circ a \sim f$   $\square$

**Θεώρημα 2.0.1.** Το σύνολο  $\pi_1(X, x_0)$  με γινόμενο  $[f] \cdot [g] = [f * g]$  έχει δομή ομάδας.

Απόδειξη. Για να δείξουμε την δομή ομάδας αρκεί να δείξουμε τις τρεις παρακάτω ιδιότητες:

1. Υπάρχει  $[e] \in \pi_1(X, x_0)$  τέτοιο ώστε  $[e] \cdot [f] = [f] \cdot [e] = [f]$  ή ισοδύναμα ότι υπάρχει κλειστός δρόμος  $e : I \rightarrow X$  όπου για την κλάση  $[e]$  ισχύει ότι  $[f] \cdot [e] = [f * e] = [f]$
2. Για κάθε  $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$  ισχύει ότι  $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = f \cdot ([g] \cdot [h])$
3. Για κάθε  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  υπάρχει  $[\bar{f}] \in \pi_1(X, x_0)$  τέτοιο ώστε  $[f] \cdot [\bar{f}] = [e]$

Για το 1.) έχουμε:

Έστω ο δρόμος  $e : I \rightarrow X$  όπου  $e(s) = x_0$ , για κάθε  $s \in I$ . Προφανώς,  $e(1) = e(0) = x_0$  οπότε  $[e] \in \pi_1(X, x_0)$  και αν έχουμε  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  τότε συνθέσεις  $e * f$  και  $f * e$  ορίζονται καλά και έχουμε:

$$(f * e)(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ e(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ x_0, & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $a : I \rightarrow I$ :

$$a(s) = \begin{cases} 2t, & s \in [0, 1/2] \\ 1, & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής και επιπλέον  $a(0) = 0$  και  $a(1) = 1$  οπότε η σύνθεση  $f \circ a$  είναι ομοτοπική με τη  $f$  λόγω της Πρότασης 2.0.3. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$f \sim (f \circ a)(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ x_0, & s \in [1/2, 1] \end{cases} = f * e$$

Συνεπώς έχουμε την ομοτοπία  $f \sim (f * e)$  συνεπώς  $[f] = [f * e] = [f] \cdot [e]$ .

Για τον πολλαπλασιασμό από αριστερά η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια μόνο που θα χρησιμοποιήσουμε την συνεχή απεικόνιση  $a : I \rightarrow I$  με τύπο:

$$a = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1/2] \\ 2t - 1, & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.0.3 και με εφαρμογή της έχουμε ότι  $e * f = f \circ a \sim f$  οπότε τελικά έχουμε,  $[e][f] = [f]$

Για το 2. έχουμε:

Οι δρόμοι  $f, g, h$  είναι κλειστοί με βασικό σημείο το  $x_0$  οπότε  $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = h(0) = h(1) = x_0$ . Από το παράδειγμα 3.2 έχουμε

$$(f * g) * h = \begin{cases} f(4s), & s \in [0, 1/4] \\ g(4s - 1), & s \in [1/4, 1/2] \\ h(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

και

$$f * (g * h) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ g(4s - 2), & s \in [1/2, 3/4] \\ h(4s - 3), & s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Τώρα που έχουμε τους τύπους με μορφή παραμέτρησης εύκολα θα βρούμε αναπαραμέτρηση τέτοια ώστε  $f * (g * h) \sim (f * (g * h)) \circ a = (f * g) * h$ . Πράγματι, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση  $a : I \rightarrow I$  με τύπο:

$$a(s) = \begin{cases} s/2, & s \in [0, 1/2] \\ s - 1/4, & s \in [1/2, 3/4] \\ 2s - 1, & s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

θα πάρουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Πρωτού το αποδείξουμε θα αναφέρουμε πως βρίσκουμε τέτοιες αναπαραμετρήσεις. Το σκεπτικό έχει ως εξής: Ψάχνουμε αναπαραμέτρηση των ορισμάτων των κλάδων της  $(f * g) * h$  τέτοια ώστε η σύνθεση των ορισμάτων με την αναπαραμέτρηση να μας δίνει τα αντίστοιχα ορίσματα στους κλάδους του  $f * (g * h)$ . Για παράδειγμα, ψάχνουμε αναπαραμέτρηση  $\phi$  τέτοια ώστε:

$4s \xrightarrow{\phi} 2s$  και  $\phi([0, 1/2]) = [0, 1/4]$ . Προφανώς, ψάχνω την  $\phi(s) = s/2$  ως πρώτο κλάδο της  $a$ . Με όμοιο τρόπο βρίσκω και τους άλλους κλάδους υπό συνθήκη να συμφωνούν στα άκρα για να έχουμε την συνέχεια. Τώρα συνεχίζουμε με την απόδειξη. Θα υπολογίσουμε αναλυτικά τη σύνθεση  $((f * g) * h) \circ a$ .

Αν  $s \in [0, 1/2]$  τότε  $2s \in [0, 1]$  και  $((f * g) * h) \circ a = f(4(s/2)) = f(2s)$ .

Αν  $s \in [1/2, 3/4]$  τότε  $4s - 2 \in [0, 1]$  και  $((f * g) * h) \circ a = g(4(s - 1/4) - 1) = g(4s - 2)$ .

Αν  $s \in [3/4, 1]$  τότε  $4s - 3 \in [0, 1]$  και  $((f * g) * h) \circ a = h(2(2s - 1) - 1) = h(4s - 3)$ .

Συνολικά έχουμε:

$$((f * g) * h) \circ a(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ g(4s - 2), & s \in [1/2, 3/4] \\ h(4s - 3), & s \in [3/4, 1] \end{cases} = (f * (g * h))(s)$$

Επιπλέον η απεικόνιση  $a : I \rightarrow I$  είναι συνεχής και  $a(0) = 0$  και  $a(1) = 1$  οπότε με εφαρμογή της Πρότασης 2.0.3 έχουμε ότι:

$$(f * g) * h \sim f * (g * h) \circ a = f * (g * h)$$

Από την παραπάνω ομοτοπία έχουμε ότι:

$$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$$

Για το 3. έχουμε:

Έστω  $[f]$  ένα στοιχείο του  $\pi_1(X, x_0)$  και  $f$  ένας αντιπρόσωπος του. Η  $f : I \rightarrow X$  είναι συνεχής και επιπλέον ισχύει ότι  $f(0) = f(1) = x_0$ . Θεωρούμε τη σύνθετη απεικόνιση  $\bar{f} : I \rightarrow X$  με τύπο  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ . Η  $\bar{f}$  είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων και  $\bar{f}(0) = f(1) = x_0 = f(1) = \bar{f}(1)$ . Οπότε η  $\bar{f}$  είναι κλειστός δρόμος με βασικό σημείο το  $x_0$  οπότε  $[\bar{f}] \in \pi_1(X, x_0)$ . Τώρα θα δείξουμε ότι  $f * \bar{f} \sim e$  όπου  $e$  ο σταθερός δρόμος στο  $x_0$ , δηλαδή θα δείξουμε ότι  $[f] \cdot [\bar{f}] = [e]$ . Πράγματι, έχουμε ότι:

$$f * \bar{f} = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ \bar{f}(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ f(1 - (2s - 1)), & s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$

$$\begin{cases} f(2s), & s \in [0, 1/2] \\ f(2 - 2s), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Τώρα αντί να βρούμε αναπαραμέτρηση θα βρούμε ομοτοπία μεταξύ των  $f * \bar{f}$  και  $e$  καθώς είναι λίγο πιο βολικό. Θεωρούμε την απεικόνιση  $H : I \times I \rightarrow X$  με τύπο:

$$H(s, t) = \begin{cases} f(2s), & (s, t) \in [0, t/2] \times I \\ f(t), & (s, t) \in [t/2, (2 - t)/2] \times I \\ f(2 - 2s), & (s, t) \in [(2 - t)/2, 1] \times I \end{cases}$$

$H(0, t) = H(1, t) = x_0$ , για κάθε  $t \in I$  και ότι  $0 \leq t/2 \leq (2 - t)/2$  καθώς  $t \in I$ . Η συνέχεια της  $H$  στα εσωτερικά των διαστημάτων που ορίζεται είναι προφανής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων. Αρκεί να

ελέγχουμε ότι οι κλάδοι της συμφωνούν στα άκρα τους. Έχουμε:

Για  $s = t/2 \rightarrow f(2(t/2)) = f(t)$

Για  $s = (2 - t)/2 \rightarrow f(2 - 2s) = f(2 - 2((2 - t)/2)) = f(t)$

Οπότε η  $H$  είναι συνεχής. Τώρα παρατηρούμε ότι  $H(s, 0) = f(0) = x_0 = e(s)$  και  $H(s, 1) = f * \bar{f}$  οπότε  $[e] = [f * \bar{f}] = [f] \cdot [\bar{f}]$ . Για την αντίστροφη περίπτωση, δηλαδή  $\bar{f} * f$  η απόδειξη είναι ανάλογη και γίνεται μέσω μιας παρόμοιας ομοτοπίας την οποία απλά θα σημειώσουμε.

$$\bar{f} * f = \begin{cases} \bar{f}(2s), & s \in [0, 1/2] \\ f(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(1 - 2s), & s \in [0, 1/2] \\ f(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$

και η ομοτοπία

$$H(s, t) = \begin{cases} f(1 - 2s), & (s, t) \in [0, t/2] \times I \\ f(1 - t), & (s, t) \in [t/2, (2 - t)/2] \times I \\ f(2s - 1), & (s, t) \in [(2 - t)/2, 1] \times I \end{cases}$$

□

**Ορισμός 2.0.6.** Η ομάδα  $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$  καλείται θεμελιώδης ομάδα (fundamental group) του τοπολογικού χώρου  $X$  με βάση το  $x_0$

**Παρατήρηση 2.0.8.** Αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια του αντίστροφου δρόμου  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$  ορίζεται γενικά σε δρόμους (όχι αναγκαστικά κλειστούς) και ισχύει ότι  $f * \bar{f} \sim e_{f(0)}$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ίδια ομοτοπία με την απόδειξη της προσεταιριστικότητας μπορούμε να δείξουμε ότι η σύνθεση δρόμων είναι προσεταιριστική. Οπότε τίθεται το ερώτημα, αν το σύνολο κλάσεων δρόμων έχει δομή ομάδας αν αυτοί δεν ήταν κλειστοί. Η απάντηση είναι αρνητική και η εξήγηση είναι απλή. Δε θα είχαμε καλά ορισμένο ουδέτερο στοιχείο  $[e_{x_0}]$ . Αν είχαμε έναν δρόμο  $f$  με άκρα  $f(0) = x_0$  και  $f(1) = x_1$  η σύνθεση  $e_{x_0} * f$  είναι ομοτοπική με τη  $f$  (όπου  $e_{x_0}$  ο σταθερός δρόμος στο  $x_0$ ) όμως η σύνθεση  $f * e_{x_0}$  δεν ορίζεται καν. Θα χρειαζόμασταν ένα δεύτερο σταθερό δρόμο  $e_{x_1}$  για τη σύνθεση από δεξιά.

Γενικά αν  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος και  $x_0 \in X$  με  $e_{x_0}$  θα συμβολίζουμε τον σταθερό δρόμο στο  $x_0$ , δηλαδή  $e_{x_0} : I \rightarrow X$  με  $e_{x_0}(s) = x_0$  για κάθε  $s \in I$

**Παρατήρηση 2.0.9.** Τώρα που αποδείξαμε ότι το  $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$  είναι πράγματι ομάδα και έχουμε προσδιορίσει καλά τα αντίστροφα στοιχεία πρέπει να την υπολογίσουμε για κάποιους τοπολογικούς χώρους, κάτι το οποίο είναι αρκετά δύσκολο. Η στρατηγική μας έχει ως εξής.

1. Υπολογίζουμε τη θεμελιώδη ομάδα (σε πλαίσιο ισομορφισμού προφανώς) απλών τοπολογικών χώρων
2. Αποδεικνύουμε ότι είναι αναλλοίωτη μέσω απεικονίσεων όπως ο ομοιομορφισμός η παραμορφωτική συρρίκνωση (βλ. 4.0.2)
3. Επεκτείνουμε τους υπολογισμούς μας σε περισσότερους τοπολογικούς χώρους.

**Παράδειγμα 2.0.3.** Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.0.1 σε κάθε κυρτό υποσύνολο του  $S \subset \mathbb{R}^n$  όλοι οι δρόμοι είναι ομοτοπικοί μεταξύ τους. Οπότε το ίδιο θα ισχύει και για τους κλειστούς δρόμους. Έτσι είμαστε σε θέση να βρούμε τη θεμελιώδη ομάδα του τοπολογικού χώρου  $S$  η οποία προφανώς θα είναι τετριμμένη, δηλαδή  $\pi_1(S, x_0) = \{e_{x_0}\}$  καθώς έχουμε μία κλάση ομοτοπίας κλειστών δρόμων.

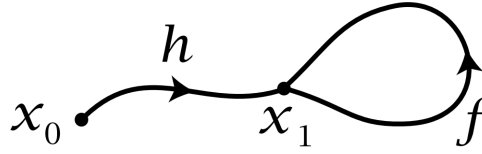
**Πρόταση 2.0.4.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος και  $x_0, x_1 \in X$  όπου υπάρχει δρόμος μεταξύ των  $x_0, x_1$ . Τότε οι ομάδες  $\pi_1(X, x_0)$  και  $\pi_1(X, x_1)$  είναι ισόμορφες.

**Απόδειξη.** Εφόσον υπάρχει δρόμος μεταξύ των  $x_0$  και  $x_1$  έχουμε ότι υπάρχει συνεχής  $h : I \rightarrow X$  όπου  $h(0) = x_0$  και  $h(1) = x_1$ . Θεωρώ την απεικόνιση  $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  με τύπο  $\beta_h([f]) = [h * f * \bar{h}]$ . Θα δείξουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός ομάδων. Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι η

παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν  $[f] = [g] \in \pi_1(X, x_1)$  δηλαδή  $f \sim g$  τότε αρκεί να δείξω ότι  $[h * f * \bar{h}] = [h * g * \bar{h}]$  ή ισοδύναμα  $h * f * \bar{h} \sim h * g * \bar{h}$ . Η παραπάνω ομοτοπία είναι Προφανής λόγω της πρότασης 2.0.2 και επιπλέον:

$$(h * g * \bar{h})(0) = (h * f * \bar{h})(0) = h(0) = x_0$$

$$(h * g * \bar{h})(1) = (h * f * \bar{h})(1) = \bar{h}(1) = h(0) = x_0$$



Σχήμα 2.3: Αλλαγή βασικό σημείου (πηγή:[1])

Δηλαδή οι τιμές της  $\beta_h$  είναι κλάσεις κλειστών δρόμων με βάση το  $x_0$  όπως θέλουμε. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός ομάδων.

Να σημειωθεί ότι εφόσον μιλάμε για διαφορετικές ομάδες θα συμβολίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού στη  $\pi_1(X, x_0)$  με  $\cdot_{x_0}$  και στη  $\pi_1(X, x_1)$  με  $\cdot_{x_1}$

$$\begin{aligned} \beta_h([f] \cdot_{x_1} [g]) &= \beta_h([f * g]) = [h * (f * g) * \bar{h}] = [(h * f) * (g * \bar{h})] = \\ &= [(h * f) * e_{x_1} * (g * \bar{h})] = [(h * f) * (\bar{h} * h) * (g * \bar{h})] = [(h * f * \bar{h}) * (h * g * \bar{h})] = \\ &= [h * f * \bar{h}] \cdot_{x_0} [h * g * \bar{h}] = \beta_h([f]) \cdot_{x_0} \beta_h([g]) \end{aligned}$$

Η  $\beta_h$  είναι 1-1. Πράγματι, αν  $\beta_h([f]) = \beta_h([g])$  έχουμε:

$$\beta_h([f]) = \beta_h([g]) \Rightarrow [h * f * \bar{h}] = [h * g * \bar{h}] \Rightarrow h * f * \bar{h} \sim h * g * \bar{h}$$

Επιπλέον  $\bar{h} \sim \bar{h}$  και  $h \sim h$  οπότε λόγω της πρότασης 2.0.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{h} * (h * f * \bar{h}) * h &\sim \bar{h} * (h * g * \bar{h}) * h \Rightarrow \\ (\bar{h} * h) * f * (\bar{h} * h) &\sim (\bar{h} * h) * g * (\bar{h} * h) \Rightarrow \\ e_{x_1} * f * e_{x_1} &\sim e_{x_1} * g * e_{x_1} \Rightarrow \\ f &\sim g \Rightarrow [f] = [g] \in \pi_1(X, x_1) \end{aligned}$$

Η  $b_h$  είναι επί. Πράγματι, αν  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  τότε η σύνθεση  $\bar{h} * f * h$  είναι κλειστός δρόμος με βασικό σημείο το  $x_1$  οπότε  $\bar{h} * f * h \in \pi_1(X, x_1)$  και επιπλέον:

$$\beta_h([\bar{h} * f * h]) = [h * (\bar{h} * f * h) * \bar{h}] = [(h * \bar{h}) * f * (h * \bar{h})] = [e_{x_0} * f * e_{x_0}] = [f]$$

Οπότε η  $\beta_h$  είναι πράγματι ισομορφισμός. Συνεπώς, η  $\beta_h$  είναι ισομορφισμός ομάδων,  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$   $\square$

Η παραπάνω πρόταση είναι το πρώτο παράδειγμα της έννοιας του επαγόμενου ισομορφισμού. Όπως θα δούμε πιο αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4 κάθε συνεχής απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  επάγει έναν ομομορφισμό  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

**Παρατήρηση 2.0.10.** Η μόνη προϋπόθεση για την παραπάνω πρόταση ήταν η ύπαρξη δρόμου με άκρα δύο σημεία του τοπολογικού χώρου οπότε αν ο χώρος μας είναι δρομοσυνεκτικός η θεμελιώδης ομάδα του είναι μοναδική ως προς τον ισομορφισμό καθώς έχουμε ανεξαρτησία από το βασικό σημείο. Σε αυτή τη περίπτωση θα γράφουμε  $\pi_1(X)$ . Το παραπάνω είναι μία σημαντική διαπίστωση καθώς σε κάθε τοπολογικό χώρο υπάρχει διαχωρισμός ως προς τις δρομοσυνεκτικές του συνιστώσες αλλά αυτό δε θα μας απασχολήσει. Να σημειωθεί ότι στη βιβλιογραφία υπάρχει και η έννοια του χώρου με βασικό σημείο (pointed space).

**Ορισμός 2.0.7.** Έστω  $(X, \mathcal{T})$  τοπολογικός χώρος. Ο  $X$  θα καλείται απλά συνεκτικός (simply-connected) αν είναι δρομοσυνεκτικός και έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα.

## Κεφάλαιο 3

### Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου $S^1$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε τον πρώτο υπολογισμό μη τετριμμένης θεμελιώδους ομάδας. Θα υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου  $S^1$ . Η τεχνική που θα ακολουθήσουμε είναι να βρούμε έναν καλό τρόπο να καλύψουμε τον κύκλο και να δούμε που μπορούν να καταλήξουν εικόνες κλειστών δρόμων με στόχο να τις ομαδοποιήσουμε και να πάρουμε το διαισθητικά λογικό αποτέλεσμα ότι η  $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ .

**Ορισμός 3.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$  τοπολογικός χώρος. Ένας χώρος κάλυψης (covering space) του  $X$  αποτελείται από έναν τοπολογικό χώρο  $(\tilde{X}, \mathcal{T}_{\tilde{X}})$  και μία συνεχή και επί απεικόνιση  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  τέτοια ώστε:

- Για κάθε  $x \in X$  υπάρχει  $U \in \mathcal{T}_X$  τέτοια ώστε το  $p^{-1}(U)$  να είναι ξένη ένωση ανοικτών του  $\tilde{X}$ , όπου το καθένα από αυτά είναι ομοιομορφικά με το  $U$  μέσω της  $p$ .

Κάθε τέτοιο  $U$  θα το λέμε ομοιόμορφα καλυμμένο (evenly covered).

**Παράδειγμα 3.0.1.** Ο  $\mathbb{R}$  με την απεικόνιση  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$  είναι χώρος κάλυψης του  $S^1$  και κάθε ανοικτό τόξο του  $S^1$  είναι ομοιόμορφα καλυμμένο. Το παραπάνω παράδειγμα είναι εξαιρετικά σημαντικό στη μελέτη που θα κάνουμε και είναι κεντρικής σημασίας κάποιος να κατανοήσει γεωμετρικά την κατασκευή. Έστω  $(x, y) \in S^1$  οπότε για κάποιο  $t \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = (x, y)$ . Για  $\epsilon = 1/20$ , θεωρούμε την ανοικτή περιοχή του  $(x, y)$   $U = \{(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) : s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)\}$ . Θα δείξουμε ότι το  $U$  είναι ομοιόμορφα καλυμμένο. Εύκολα κάποιος διαπιστώνει τα παρακάτω τέσσερα αποτελέσματα.

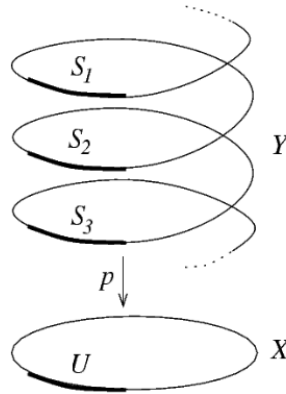
1.  $p^{-1}(x, y) = \{t + n : n \in \mathbb{Z}\}$
2.  $U = p((t - \epsilon, t + \epsilon))$
3.  $p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  όπου  $V_n = \{(t - \epsilon + n, t + \epsilon + n)\}$
4.  $p(s + n) = p(s)$  για κάθε  $s \in V_0 = U$  και  $n \in \mathbb{N}$

Είναι τετριμμένο το γεγονός ότι τα σύνολα  $V_n$  είναι ξένα μεταξύ τους (το ίδιο θα ίσχυε και για μικρότερο  $\epsilon$ ). Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η  $p|_{V_n}$  είναι ομοιομορφισμός. Λόγω της σχέσης 4 είναι επαρκές να δείξουμε ότι η  $p|_{V_0}$  είναι ομοιομορφισμός.

Είναι πιο εύκολο, και επαρκές, να δείξουμε ότι η  $p|_{Cl(V_0)} : Cl(V_0) \rightarrow Cl(U)$  είναι ομοιομορφισμός το μας δίνει το αποτέλεσμα. Η  $p|_{Cl(V_0)}$  είναι συνεχής  $1-1$  και επί. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή. Έστω κλειστό  $Y \subset Cl(V_0)$ . Το  $Y$  είναι υποσύνολο του  $R$  που είναι κλειστό (εξ υποθέσεως) και φραγμένο (διότι είναι υποσύνολο φραγμένου συνόλου) συνεπώς είναι συμπαγές. Οπότε η εικόνα  $p|_{Cl(V_0)}(Y)$  είναι συμπαγές στο  $Cl(U)$  οπότε και κλειστό καθώς ο  $Cl(U) \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$  είναι Hausdorff. Οπότε και η  $p|_{V_0}$  είναι ομοιομορφισμός ή ισοδύναμα το  $V_0$  απεικονίζεται ομοιομορφικά στο  $U$  μέσω της  $p$ .

Ένας γεωμετρικός τρόπος να δούμε το παραπάνω αποτέλεσμα είναι να δούμε τον  $\mathbb{R}$  εμφυτευμένο στον  $\mathbb{R}^3$  ως μία έλικα μέσα από την απεικόνιση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  με τύπο  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$  η οποία

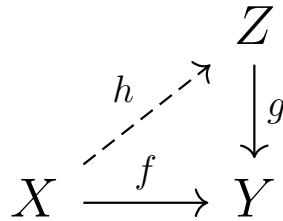
είναι ομοιομορφισμός. Μπορούμε να φανταστούμε τα ανοικτά τόξα του κύκλου ως ανοικτά της έλικας αν φέρναμε δύο κάθετες, στο επίπεδο, ευθείες στα άκρα του τόξου και βλέπαμε τα τμήματα που ορίζουν στην έλικα. Αυτά τα τμήματα είναι ανοικτά του  $\mathbb{R}^3$  ξένα μεταξύ τους και όλα ομοιομορφικά με ανοικτά διαστήματα, που είναι ομοιομορφικά με ανοικτά τόξα.



Σχήμα 3.1: Ο  $\mathbb{R}$  ως έλικα καλύπτει ομοιόμορφα τον  $\mathbb{S}^1$

Τώρα αρχίζει να γίνεται ξεκάθαρο ότι η μελέτη μονοπατιών στον κύκλο μπορεί διαισθητικά να αναχθεί στη μελέτη μονοπατιών στην έλικα που οι  $n$  περιστροφές του κύκλου θα απεικονίζονται σε  $n$  ξένα ανοικτά. Σημειώνουμε ότι σε αυτό το κεφάλαιο με  $p$  θα συμβολίζουμε την απεικόνιση που ορίστηκε παραπάνω.

**Ορισμός 3.0.2.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  και  $(Z, \mathcal{T}_Z)$  τοπολογικοί χώροι. Έστω, οι απεικονίσεις  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Z \rightarrow Y$ . Μία **ανύψωση** (lift) της  $f$ , είναι μία απεικόνιση  $h : X \rightarrow Z$  τέτοια ώστε  $f = g \circ h$ . Ισοδύναμα μία ανύψωση της  $f$ , είναι μία απεικόνιση  $h$  τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό.



Αν η  $h$  είναι ανύψωση της  $f$ , θα λέμε ότι η  $h$  ανυψώνει (lifts) τη  $f$ .

Η κεντρική ιδέα για την απόδειξη που θα παραθέσουμε είναι να βρούμε ανυψώσεις για δρόμους σε χώρους κάλυψης του  $\mathbb{S}^1$ . Ένας χώρος κάλυψης του  $\mathbb{S}^1$  όπως είδαμε το  $\mathbb{R}$ . Η τεχνική που θα ακολουθήσουμε γενικεύεται σε τοπολογικούς χώρους όμως η γενική τεχνική υπολογισμού θεμελιώδους ομάδας με χρήση χώρων κάλυψης χρειάζεται και άλλα εργαλεία. Θα συνεχίσουμε αποδεικνύοντας μία πρόταση η οποία θα μας εξασφαλίσει τις ανυψώσεις μονοπατιών και ομοτοπιών. Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης ακολουθεί την απόδειξη στην παράγραφο 1.1 του [1].

**Πρόταση 3.0.1.** Έστω  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικός χώρος. Έστω μία συνεχής απεικόνιση  $F : Y \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ , και μία συνεχής απεικόνιση  $\tilde{F} : Y \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ανυψώνει την  $F|_{Y \times \{0\}}$ . Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση  $G : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ανυψώνει την  $F$  και είναι επέκταση της  $\tilde{F}$ . Όταν λέμε ανυψώματα εννοούμε ως προς την απεικόνιση κάλυψης  $p$ .

**Απόδειξη.** Θεωρούμε ένα ανοικτό κάλυμμα του κύκλου  $U_a$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $a$  το  $p^{-1}(U_a)$  να είναι ξένη ένωση ανοικτών που το καθένα να είναι ομοιομορφικό με το  $U_a$ .

Έστω μία τυχαία συνεχής απεικόνιση  $F : Y \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  και  $\tilde{F} : Y \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  μία ανύψωση της  $F \upharpoonright_{Y \times \{0\}}$ .

Έστω τώρα  $(y_0, t) \in Y \times I$ . Λόγω συνέχειας της  $F$  υπάρχει ανοικτή περιοχή  $N_t \times (a_t, b_t)$  του  $(y_0, t)$  τέτοια ώστε  $F(y_0, t) \in F(N_t \times (a_t, b_t)) \subset U_a$  για κάποια  $a$ .

Η επιλογή του  $t$  ήταν αυθαίρετη οπότε για κάθε  $t \in I$  μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή  $N_t \times (a_t, b_t)$ . Συνεπώς, έχουμε  $\{y_0\} \times I \subset \bigcup_{t \in I} N_t \times (a_t, b_t)$ . Οπότε έχουμε ένα ανοικτό κάλυμμα του  $\{y_0\} \times I$

Το  $\{y_0\} \times I$  είναι ομοιομορφικό με το  $I$  οπότε συμπαγές οπότε το ανοικτό κάλυμμα του  $\{y_0\} \times I$  που ορίστηκε παραπάνω θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή μπορούμε να επιλέξουμε μία ανοικτή περιοχή  $N \subset Y$  και μία διαμέριση  $t_1 = 0 < t_2, \dots < t_m = 1$  του  $I$  τέτοια ώστε  $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_a$  για κάποια  $a$  που εξαρτώνται από το  $i$  που είναι πεπερασμένα. Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε τα παραπάνω  $U_a$  με  $U_i$ . Δηλαδή  $U_i = U_a$  αν και μόνο αν  $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_a$ . Θα δείξουμε με επαγωγικά ότι η ανύψωση που ψάχνουμε υπάρχει. Δηλαδή θα δείξουμε πως κατασκευάζουμε την  $\tilde{F}$  από το  $N \times [0, t_i]$  στο  $N \times [0, t_{i+1}]$  και επειδή τα  $t_i$  είναι πεπερασμένα εφαρμόζοντας την κατασκευή πεπερασμένες φορές θα βρούμε την  $\tilde{F}$ .

**Επαγωγική υπόθεση-κατασκευή:** Για κάθε  $i = 1, \dots, m$  υπάρχει ανύψωση  $G$  της  $F$  στο  $M \times [0, t_i]$  τέτοια ώστε  $G$  να επεκτείνει την  $\tilde{F}$  όπου  $M$  κάποια ανοικτή περιοχή του  $y_0$  στον  $Y$ .

- Για  $i = 1$  έχουμε  $t_i = t_1 = 0$  οπότε ψάχνουμε ανύψωση της  $F$  στο  $M \times \{0\}$  κάτι που έχουμε από την υπόθεση της πρότασης, την  $G = \tilde{F} \upharpoonright_{M \times \{0\}}$  καθώς  $M \times \{0\} \subset Y \times \{0\}$  για οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή του  $y_0$

- Έστω τώρα ότι υπόθεση ισχύει για  $i$ . Θα κατασκευάσουμε τη  $G$  στο σύνολο  $M \times [0, t_{i+1}]$  όπου  $M$  κάποια ανοικτή περιοχή του  $y_0$ . Έχουμε δείξει ότι  $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  όπου  $p^{-1}(U_i)$  είναι ξένη ένωση ανοικτών του  $\mathbb{R}$  όπου το καθένα από αυτά είναι ομοιομορφικό με το  $U_i$  μέσω της  $p$ , δηλαδή η  $p^{-1} : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$  είναι ομοιομορφισμός. Οπότε υπάρχει κάποιο  $\tilde{U}_i \subset p^{-1}(U_i)$  το οποίο περιέχει το σημείο  $G(y_0, t_i)$  καθώς  $(y_0, t_i) \in M \times [0, t_i]$ . Στόχος μας είναι να βάλουμε το σύνολο  $G(M \times \{t_i\})$  εξ' ολοκλήρου σε κάποιο από τα  $\tilde{U}_i$ . Αν αυτό δε συμβαίνει μπορούμε να θεωρήσουμε μικρότερη ανοικτή περιοχή  $M_1$  τέτοια ώστε

$$M_1 \times \{t_i\} = (M \times \{t_i\}) \cap (G \upharpoonright_{M \times \{t_i\}})^{-1}(\tilde{U}_i) \neq \emptyset$$

Η  $M_1$  είναι η ανοικτή περιοχή του  $(y_0, t_i)$  που ψάχνουμε καθώς από τον ορισμό της, έχουμε  $G(M_1 \times \{t_i\}) \subset \tilde{U}_i$ . Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την  $G : M_1 \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  ως εξής:

$$G = (p^{-1} \upharpoonright_{U_i}) \circ F \upharpoonright_{M_1 \times [t_i, t_{i+1}]}$$

**Σημαντικό σχόλιο:** Είναι ξεκάθαρο ότι η  $G$  είναι ανύψωση της  $F$  καθώς  $p \circ G = F$  στο  $M_1 \times [t_i, t_{i+1}]$ . Σημειώνουμε ότι αν δεν είχαμε κάνει την παραπάνω έρευνα στην εύρεση της κατάλληλης ανοικτής περιοχής του  $(y_0, t_i)$  η  $G$  δε θα είχε οριστεί καλά καθώς η  $p^{-1}$  δε θα ήταν καλά ορισμένη συνάρτηση.

Τώρα που ξέρουμε πως κατασκευάζουμε τη  $G$  στο  $M_1 \times [t_i, t_{i+1}]$  δοσμένης  $G : M \times [0, t_i]$  και έχουμε την  $\tilde{F} = G : M \times [0, t_1 = 0]$ , μπορούμε επαγωγικά να ορίσουμε-επεκτείνουμε τη  $G : M_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$  (όπου  $M_{y_0}$  θα είναι η τελική ανοικτή περιοχή του  $y_0$  που θα προκύψει) καθώς τα  $t_i$  είναι πεπερασμένα.

Για διευκρίνιση τα καταφέραμε να δείξουμε ότι: Για τυχαίο  $y_0 \in Y$  υπάρχει ανοικτή περιοχή του  $M$  τέτοια ώστε να υπάρχει ανύψωση της  $F$ , έστω  $G : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  και  $G \upharpoonright_{M \times \{0\}} = \tilde{F}$ .

Θα συνεχίσουμε με τη **μοναδικότητα**. Θα τη δείξουμε κατά σημείο ως προς  $Y$ , δηλαδή αν  $y_0 \in Y$  και  $G, G'$  δύο συνεχείς απεικονίσεις που είναι ανυψώσεις της  $F$  στο  $\{y_0\} \times I$  όπου  $G(y_0, 0) = G'(y_0, 0) = \tilde{F}(y_0, 0)$  τότε  $G = G'$  στο  $\{y_0\} \times I$ . Η τεχνική είναι ίδια. Θεωρούμε μία διαμέριση του  $I$ , έστω  $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_n = 1$  τέτοια ώστε το  $F(y_0 \times [t_i, t_{i+1}])$  να ανήκει σε κάποιο από τα ομοιόμορφα καλυμμένα  $U_i$ . Θα δείξουμε την επαγωγική κατασκευή και θα την εφαρμόσουμε πεπερασμένες φορές με αρχή το  $t_1$ .

**Επαγωγική υπόθεση-κατασκευή:** Έστω ότι  $G = G'$  στο  $\{y_0\} \times [0, t_i]$ , για κάθε  $i$ .

- Για  $i = 1$  έχουμε το ζητούμενο εξ' υποθέσεως.

- Έστω ότι ισχύει για τυχαίο  $i$ . Για το επόμενο διάστημα της διαμέρισης έχουμε ότι το σύνολο  $\{y_0\} \times [t_i, t_{i+1}]$  είναι συνεκτικό οπότε και η εικόνα  $G(\{y_0\} \times [t_i, t_{i+1}])$  θα είναι συνεκτικό σύνολο διότι η  $G$  είναι συνεχής. Επιπλέον, είναι υποσύνολο, ξένης ένωσης των ανοικτών συνεκτικών  $\tilde{U}_i$ . Οπότε θα πρέπει να ανήκει εξ' ολοκλήρου σε ένα από αυτά, έστω  $\tilde{U}_{i_1}$  (αλλιώς θα είχαμε διαχωρισμό). Ομοίως, έχουμε ότι  $G'(\{y_0\} \times [t_i, t_{i+1}]) \in \tilde{U}_{i_2}$ . Οπότε, έχουμε ότι:

$G(y_0, t_i) = G'(y_0, t_i) \in \tilde{U}_{i_2}$  και ομοίως  $G'(y_0, t_i) = G(y_0, t_i) \in \tilde{U}_{i_1}$  οπότε  $i_1 = i_2$  (διότι τα  $\tilde{U}_i$  είναι ξένα μεταξύ τους) δηλαδή οι εικόνες ανήκουν εξ' ολοκλήρου σε ένα από τα  $\tilde{U}_i$ . Ο περιορισμός  $p|_{\tilde{U}_i}$  είναι ομοιομορφισμός οπότε και  $1 - 1$ , οπότε έχουμε:

$$F = F \Rightarrow p \circ G = p \circ G' \xrightarrow{G, G \in \tilde{U}_{i_1}} p|_{\tilde{U}_{i_1}} \circ G = p|_{\tilde{U}_{i_1}} \circ G' \Rightarrow G = G'$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για  $(y, t) \in \{y_0\} \times [t_i, t_{i+1}]$  οπότε εφαρμόζοντας επαγωγικά την κατασκευή πεπερασμένες φορές έχουμε τη μοναδικότητα της ανύψωσης  $G$  στο σύνολο  $\{y_0\} \times I$  για τυχαίο  $y_0$ .

Το μόνο που μένει είναι να **επεκτείνουμε** την κατασκευή σε όλο το  $Y \times I$ . Αυτό είναι εύκολο καθώς η κατασκευή μας έχει οριστεί καλά σε σύνολα του τύπου  $N_y \times I$  για κάθε  $y$ . Επιπλέον, σε κάθε σύνολο του τύπου  $\{y\} \times I$  είναι μοναδική οπότε όλες τις τομές συνόλων  $N_y \times I$  θα έχει οριστεί καλά και είναι μοναδική (αφού είναι μοναδική σε κάθε  $y$ ). Από τα παραπάνω έχουμε μία καλώς ορισμένη, μοναδική ανύψωση  $G$  της  $F$  σε όλο το  $Y \times I$  που επιπλέον είναι συνεχής απεικόνιση λόγω της Παρατήρησης 1.0.2  $\square$

Με άμεση εφαρμογή της Πρότασης 3.0.1 για  $Y = \{y_0\}$  και  $Y = I$  παίρνουμε τα δύο παρακάτω πορίσματα.

**Πόρισμα 3.0.1 (Ανύψωση δρόμων).** Για κάθε δρόμο  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ , όπου  $f(0) = x_0$  και για κάθε  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  υπάρχει μοναδική ανύψωση  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$

**Πόρισμα 3.0.2 (Ανύψωση Ομοτοπιών).** Για κάθε ομοτοπία δρόμων  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  με αρχή  $H(0, t) = f_t(0) = x_0$  και για κάθε  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  υπάρχει μοναδική ανύψωση (ομοτοπία)  $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\tilde{H}(0, t) = \tilde{f}_t(0) = \tilde{x}_0$

Σημειώνουμε ότι για κάθε  $x_0 \in \mathbb{S}^1$  υπάρχουν πολλά  $\tilde{x}_0$  στο σύνολο  $p^{-1}(x_0)$ . Αυτό το είδαμε να συμβαίνει στο Παράδειγμα 3.0.1 όπου  $p^{-1}(x, y) = \{t + n : n \in \mathbb{Z}\}$ .

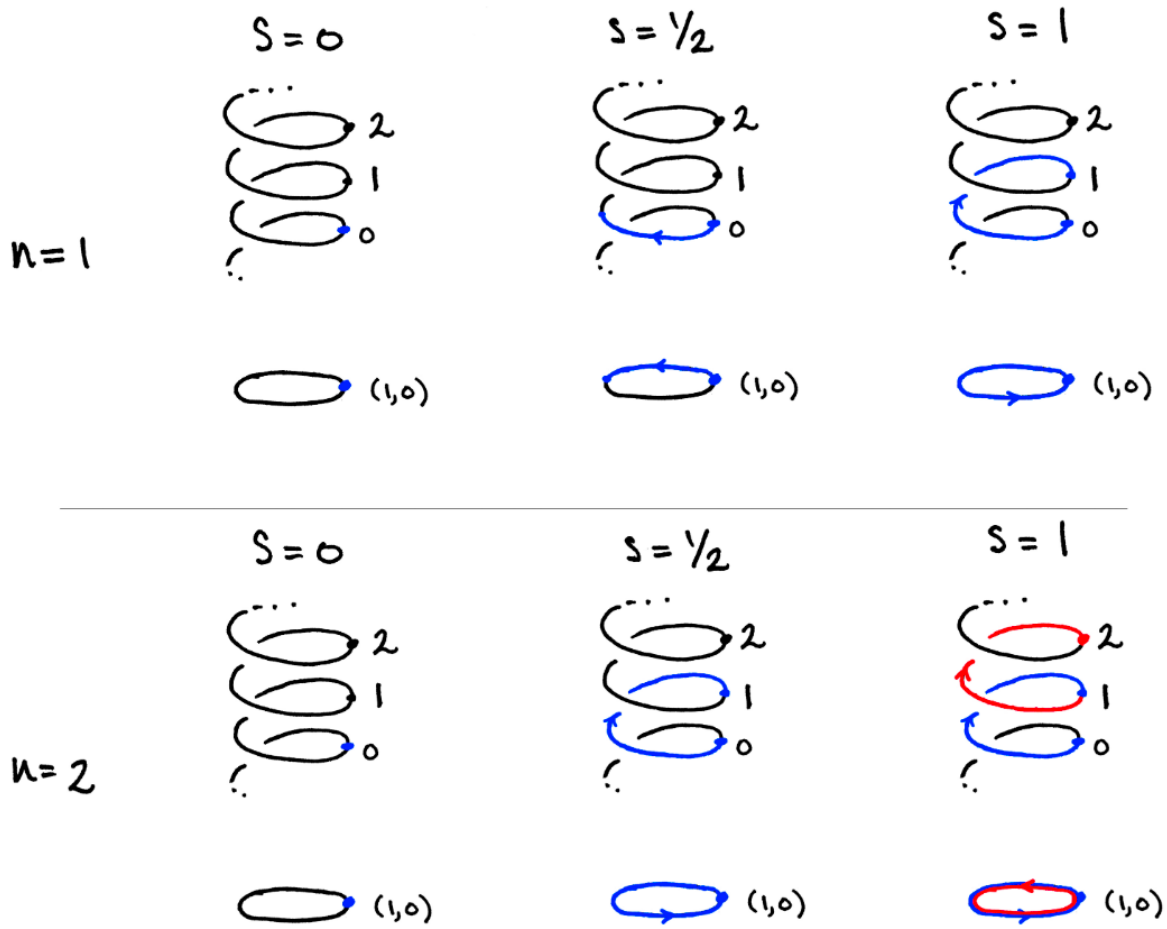
Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε (σε πλαίσιο ισομορφισμού προφανώς) τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου.

**Θεώρημα 3.0.1.** Η συνάρτηση  $\Phi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\pi_1(\mathbb{S}^1), \cdot)$  όπου  $n \xrightarrow{\Phi} [\omega_n]$  με  $\omega_n : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\omega_n(s) = (\cos(2n\pi s), \sin(2n\pi s)) \in \mathbb{S}^1$  είναι ισομορφισμός ομάδων.

**Απόδειξη.** Ξεκινάμε με μία σημαντική παρατήρηση. Έστω  $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  όπου  $\tilde{\omega}_n(s) = ns$ . Τότε έχουμε:

$$p \circ \tilde{\omega}_n = p(\tilde{\omega}_n) = (\cos(2n\pi s), \sin(2n\pi s)) = \omega_n$$

Δηλαδή το  $\tilde{\omega}_n$  ανυψώνει το  $\omega_n$ . Μπορούμε να φανταστούμε ότι για  $n$  περιστροφές του κύκλου αναλογούν  $n$  περιστροφές της έλικας. Σχηματικά έχουμε την παρακάτω κατασκευή.



Σχήμα 3.2: Οι δρόμοι  $\omega_n$  και  $\tilde{\omega}_n$  στον  $S^1$  και  $\mathbb{R}$  για  $n = 1, 2$

- Είναι προφανές ότι η  $\Phi$  είναι **καλά ορισμένη**, καθώς αν  $n_1 = n_2 = n$  τότε  $[\omega_n] = [\omega_n]$ .

• Θα συνεχίσουμε δείχνοντας ότι η  $\Phi$  είναι **ομομορφισμός** ομάδων. Για να το πετύχουμε αυτό θα θεωρήσουμε έναν δρόμο μετατόπισης ο οποίος δεν επηρεάζει την ομοτοπία. Έστω  $n, m \in \mathbb{N}$  και η συνάρτηση  $\tau_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau_m(x) = x + m$ . Αρχικά θα δείξουμε ότι  $\tilde{\omega}_m * \tau_m \circ \tilde{\omega}_n \sim \tilde{\omega}_{m+n}$ . Έχουμε ότι η  $\tau_m \circ \tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών οπότε είναι δρόμος όπου  $\tau_m(\tilde{\omega}_n) = \tau_m(ns) = m + ns$ ,  $s \in I$  οπότε τα άκρα του είναι  $\tau_m(\tilde{\omega}_n(0)) = m$  και  $\tau_m(\tilde{\omega}_n(1)) = m + n$ . Οπότε ορίζεται καλά η σύνθεση των δρόμων  $\tilde{\omega}_m$  και  $\tau_m(\tilde{\omega}_n)$  και το αποτέλεσμα είναι

$$\tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n(s) = \begin{cases} \tilde{\omega}_m(2s), & s \in [0, 1/2] \\ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} 2ms, & s \in [0, 1/2] \\ m + n(2s - 1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Επιπλέον  $\tilde{\omega}_{m+n}(s) = ns + ms$  για  $s \in I$ . Οπότε τα άκρα του είναι:

$$\tilde{\omega}_{m+n}(0) = 0 \text{ και } \tilde{\omega}_{m+n}(1) = m + n$$

$$\tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n(0) = 0 \text{ και } \tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n(1) = m + n$$

Οι δρόμοι  $\tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n$  και  $\tilde{\omega}_{m+n}$  είναι στο  $\mathbb{R}$  και έχουν κοινά άκρα οπότε λόγω του Παραδείγματος 2.0.1 είναι ομοτοπικοί, έστω  $F$  η ομοτοπία μεταξύ τους. Η σύνθεση  $p \circ F$  θα μας δώσει ομοτοπία των δρόμων  $p \circ (\tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n)$  και  $p \circ \tilde{\omega}_{m+n}$ . Επιπλέον, έχουμε ότι  $p \circ \tau_m \tilde{\omega}_n \sim p \circ \tilde{\omega}_n$ . Αυτό το αποτέλεσμα διαισθητικά είναι προφανές καθώς οι μετατοπίσεις στην έλικα ισοδυναμούν με ίδιες διαδρομές στον κύκλο. Στην πράξη έχουμε:

$$(p \circ \tilde{\omega}_n)(s) = (\cos(2n\pi s), \sin(2n\pi s)) = (\cos(2n\pi s + 2m\pi), \sin(2n\pi s + 2m\pi)) = (\cos(2\pi(sn + m)), \sin(2\pi(sn + m))) = (p \circ \tau_m \tilde{\omega}_n)(s) \in S^1$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$p \circ (\tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n) \sim (p \circ \tilde{\omega}_m) * (p \circ \tau_m \tilde{\omega}_n)$$

(Το παραπάνω ισχύει γενικότερα για συνεχείς απεικονίσεις και θα αποδειχθεί αργότερα στην Πρόταση 4.0.1) Τώρα χρησιμοποιώντας τα παραπάνω το αποτέλεσμα είναι εύκολο ναδειχθεί. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\Phi(m+n) &= [\omega_{m+n}] = [p \circ \tilde{\omega}_{m+n}] = [p \circ (\tilde{\omega}_m * \tau_m \tilde{\omega}_n)] = [(p \circ \tilde{\omega}_m) * (p \circ \tau_m \tilde{\omega}_n)] \\ &= [p \circ \tilde{\omega}_m] \cdot [p \circ \tau_m \tilde{\omega}_n] = [p \circ \tilde{\omega}_m] \cdot [p \circ \tilde{\omega}_n] = [\omega_m] * [\omega_n] = \Phi(m) * \Phi(n)\end{aligned}$$

• Θα συνεχίσουμε δείχνοντας ότι η  $\Phi$  είναι **επί**. Αρχικά έχουμε ότι  $\pi_1 \mathbb{S}^1 \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$  για κάθε  $x_0 \in \mathbb{S}^1$ , λόγω της Πρότασης 2.0.4. Επιλέγουμε  $x_0 = (1, 0)$ . Για να δείξουμε ότι η  $\Phi$  είναι επί θα πάρουμε την κλάση ενός τυχαίου κλειστού δρόμου στον κύκλο, θα εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.0.1 και θα δείξουμε ότι ο δρόμος που θα προκύψει (μετά από εφαρμογή της  $p$ ) είναι στην κλάση  $\Phi(n)$ , για κάποιο  $n$ . Αρχικά παρατηρούμε ότι  $p^{-1}(1, 0) = \{0 + n : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ . Έστω τώρα  $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  οπότε  $f(0) = f(1) = (1, 0)$ . Για  $x_0 = (1, 0)$  και  $0 = \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$  λόγω του Πορίσματος 3.0.1 υπάρχει μοναδική απεικόνιση (που να είναι ανύψωση της  $f$ )  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\tilde{f}(0) = 0$ . Τώρα έχουμε ότι:

$$(1, 0) = f(1) = (p \circ \tilde{f})(1) = (\cos(2\pi \tilde{f}(1)), \sin(2\pi \tilde{f}(1)))$$

Οπότε η μοναδική ανύψωση  $\tilde{f}$  που έχουμε πρέπει να έχει ακέραια τιμή στο 1 έστω  $\tilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z}$ . Συνολικά έχουμε ότι  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής με  $\tilde{f}(0) = 0$ ,  $\tilde{f}(1) = n$  οπότε είναι δρόμος με άκρα 0, n οπότε είναι ομοτοπικός με τον  $\tilde{\omega}_n$  από το Παράδειγμα 2.0.1. Έστω  $F$  η ομοτοπία μεταξύ τους. Οπότε η σύνθεση  $G = p \circ F$  είναι ομοτοπία μεταξύ των δρόμων  $p \circ \tilde{f}$  και  $p \circ \tilde{\omega}_n$ . Συνολικά βρήκαμε  $n \in \mathbb{Z}$  τέτοιο ώστε:

$$p \circ \tilde{f} \sim p \circ \tilde{\omega}_n \Rightarrow [f] = [p \circ \tilde{f}] = [p \circ \tilde{\omega}_n] = [\omega_n] = \Phi(n)$$

• Τέλος πρέπει να δείξουμε ότι η  $\Phi$  είναι **1-1**. Έστω  $\Phi(m) = \Phi(n) \Rightarrow [\omega_m] = [\omega_n] \Rightarrow \omega_m \sim \omega_n$  οπότε υπάρχει ομοτοπία δρόμων μεταξύ τους,  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $F(s, t) = f_t(s)$  και  $f_0(s) = \omega_m(s)$ ,  $f_1(s) = \omega_n(s)$ . Παρατηρούμε ότι  $\omega_n(0) = \omega_m(0) = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$  ή  $H(0, t) = (1, 0)$  για κάθε  $t \in \{0\} \times I$  και  $0 \in p^{-1}(1, 0) = \mathbb{Z}$ . Η παραπάνω γραφή μας παραπέμπει να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.0.2 (για την ομοτοπία  $F$ ,  $x_0 = (1, 0)$  και  $\tilde{x}_0 = 0 \in p^{-1}(x_0)$ ). Οπότε υπάρχει μοναδική ομοτοπία δρόμων  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\tilde{F}(s, t) = \tilde{f}_t(s)$  και  $\tilde{f}_t(0) = 0$  που είναι ανύψωση της  $F$  δηλαδή,  $F = p \circ \tilde{F}$ . Οπότε υπάρχουν μοναδικές ανυψώσεις των  $f_0 = \omega_m$  και  $f_1 = \omega_n$ , έστω  $\tilde{f}_0$  και  $\tilde{f}_1$ . Όπως έχουμε δει οι δρόμοι  $\tilde{\omega}_n$  είναι ανυψώσεις των δρόμων  $\omega_n$  διότι έχουμε ότι:

$$\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n$$

Οπότε λόγω μοναδικότητας έχουμε ότι  $\tilde{f}_0 = \tilde{\omega}_m$  και  $\tilde{f}_1 = \tilde{\omega}_n$ . Όμως η ομοτοπία  $\tilde{F}$  είναι ομοτοπία δρόμων οπότε το τελικό σημείο πρέπει να είναι σταθερό. Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(1, t) &= \tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) \\ \tilde{f}_0(1) &= \tilde{\omega}_m(1) = 1m = m \\ \tilde{f}_1(1) &= \tilde{\omega}_n(1) = 1n = n\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε  $m = n \in \mathbb{Z}$ .

Οπότε η  $\Phi$  είναι ισομορφισμός ομάδων. □

Τώρα που αποδείξαμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι ισόμορφη με την  $(\mathbb{Z}, +)$  θα συνεχίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο δείχνοντας ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι αναλλοίωτη υπό κάποιες συνθήκες και έτσι θα υπολογίσουμε τις θεμελιώδεις ομάδες αρκετών ακόμα χώρων. Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [5].

# Κεφάλαιο 4

## Ιδιότητες της θεμελιώδους ομάδας

Θα ξεκινήσουμε ψάχνοντας συνθήκες για να διατηρήται η θεμελιώδης ομάδα ενός τοπολογικού χώρου μέσω απεικονίσεων και θα δούμε τι γίνεται στις σε τοπολογικές κατασκευές όπως το γινόμενο τοπολογικών χώρων. Θα ξεκινήσουμε με μία απλή παρατήρηση. Ας θεωρήσουμε μία συνεχή απεικόνιση  $h : X \rightarrow Y$ . Τότε για κάθε κλειστό δρόμο  $f : I \rightarrow X$  η σύνθεση  $h \circ f$  θα είναι κλειστός δρόμος στον  $Y$  ως συνεχής απεικόνιση όπου  $h \circ f(0) = h \circ f(1)$ . Οπότε είναι φυσικό να μελετήσουμε τις θεμελιώδεις ομάδες των χώρων  $X, Y$  στα  $x_0, f(x_0)$  μέσω της  $h$ . Οι ορισμοί και οι αποδείξεις σε αυτό το κεφάλαιο ακολουθούν το [2], κεφάλαιο 4 αλλά υπάρχουν αρκετές διαφοροποιήσεις.

**Πρόταση 4.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικοί χώροι,  $h : X \rightarrow Y$  μία συνεχής απεικόνιση και  $x_0 \in X, y_0 = h(x_0) \in Y$  σημεία τους. Η απεικόνιση  $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  όπου

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

είναι ομομορφισμός ομάδων.

*Απόδειξη.* Αρχικά θα δείξουμε ότι η  $h_*$  είναι καλά ορισμένη. Έστω  $[f] = [g] \Rightarrow f \sim g$  τότε υπάρχει  $F : \times I \rightarrow X$  ομοτοπία τέτοια ώστε  $F(s, 0) = f(s)$  και  $F(s, 1) = g(s)$ . Η σύνθεση  $h \circ F$  είναι συνεχής και επιπλέον ισχύει  $H(0, t) = h \circ F(0, t) = h \circ F(1, t) = h(x_0) = y_0$  οπότε είναι ομοτοπία κλειστών δρόμων και  $H(s, 0) = (h \circ f)(s)$  και  $H(s, 1) = (h \circ g)(s)$  οπότε  $h \circ f \sim h \circ g \Rightarrow [h \circ f] = [h \circ g] \Rightarrow h_*([f]) = h_*([g])$ . Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι η  $h_*$  είναι ομομορφισμός ομάδων. Για να μην υπάρχει σύγχυση θα συμβολίζουμε το γινόμενο στη  $\pi_1(X, x_0)$  με  $\cdot_{x_0}$  και με  $\cdot_{y_0}$  στη  $\pi_1(Y, y_0)$ . Έστω  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ . Τότε:

$$h \circ (f * g) = \begin{cases} h \circ (f(2s)), & s \in [0, 1/2] \\ h \circ (g(2s - 1)), & s \in [1/2, 1] \end{cases} = (h \circ f) * (h \circ g)$$

Οπότε  $[h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)]$ . Συνολικά έχουμε:

$$h_*([f] \cdot_{x_0} [g]) = h_*([f * g]) = [h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)] = [h \circ f] \cdot_{y_0} [h \circ g] = h_*([f]) \cdot_{y_0} h_*([g])$$

□

**Παρατήρηση 4.0.1.** Επιπλέον στην περίπτωση σύνθεσης δύο συνεχών απεικονίσεων έχουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα. Έστω  $h : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  και  $x_0 \in X, g(h(x_0)) \in Z$ . Τότε οι επαγόμενοι ομομορφισμοί ορίζονται και είναι  $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$  και  $g_* : \pi_1(Y, h(x_0)) \rightarrow \pi_1(Z, g(h(x_0)))$ . Επιπλέον, αν  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  ισχύει:

$$g_* \circ h_*([f]) = g_*([h \circ f]) = [g \circ (h \circ f)] = [(g \circ h) \circ f] = (g \circ h)_*([f])$$

Δηλαδή έχουμε ότι  $g_* \circ h_* = (g \circ h)_*$ . Ένα τελευταίο σχόλιο που θα χρειαστεί είναι ότι η ταυτοτική απεικόνιση  $id : X \rightarrow X$  ως επαγόμενη απεικόνιση έχει τη  $id : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  για κάθε  $x_0 \in X$ , που είναι ο ταυτοτικός ισομορφισμός. Αυτό είναι προφανές καθώς αν  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  τότε  $id_*([f]) = [id \circ f] = [f] \in \pi_1(X, x_0)$

**Ορισμός 4.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικοί χώροι,  $h : X \rightarrow Y$  μία συνεχής απεικόνιση και  $x_0 \in X, y_0 = h(x_0) \in Y$  σημεία τους. Τότε η επαγόμενη απεικόνιση  $h_*$  όπως ορίστηκε στην Πρόταση 4.0.1 καλείται **επαγόμενος ομομορφισμός** (induced homomorphism) στο  $x_0$ .

**Θεώρημα 4.0.1.** Η θεμελιώδης ομάδα είναι τοπολογική αναλλοίωτη ως προς τον ισομορφισμό. Δηλαδή αν  $h : X \rightarrow Y$  είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων τότε οι ομάδες  $\pi_1(X, x_0)$  και  $\pi_1(Y, h(x_0))$  είναι ισόμορφες.

*Απόδειξη.* Η  $h$  είναι ομοιομορφισμός οπότε υπάρχει συνεχής αντίστροφη απεικόνιση  $g : Y \rightarrow X$  τέτοια ώστε  $g \circ h = id_X$  και  $h \circ g = id_Y$ . Έστω  $x_0 \in X$  (ισχύει  $g \circ h(x_0) = x_0$ ) τότε η επαγόμενη απεικόνιση  $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$  είναι ομομορφισμός λόγω της Πρότασης 4.0.1. Για να δείξουμε ότι η  $h$  είναι ισομορφισμός αρκεί να δείξουμε ότι είναι αντιστρέψιμη. Αρκεί να βρούμε την αντίστροφη της (που είναι η  $g_*$ ). Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της Παρατήρησης 4.0.1 έχουμε:

$$h \circ g = id_Y \Rightarrow h_* \circ g_* = id_{\pi_1(Y, h(x_0))}$$

$$h \circ g = id_X \Rightarrow g_* \circ h_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

Συνεπώς, υπάρχουν ομομορφισμοί  $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$  και  $g_* : \pi_1(Y, h(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  τέτοιοι ώστε  $h_* \circ g_* = id_{\pi_1(Y, h(x_0))}$  και  $g_* \circ h_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$ . Οπότε η  $h_*$  είναι ισομορφισμός ομάδων με αντίστροφη  $g_*$ .  $\square$

**Πόρισμα 4.0.1.** Αν οι θεμελιώδεις ομάδες δύο τοπολογικών χώρων δεν είναι ισόμορφες τότε οι χώροι δεν είναι ομοιόμορφοι.

**Παρατήρηση 4.0.2.** Τώρα που έχουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα θέλουμε να αποδείξουμε μία ακόμα ικανή συνθήκη (ασθενέστερη του ομοιομορφισμού) για να διατηρείται η θεμελιώδης ομάδα σε πλαίσιο ισομορφισμού. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κάποια στοιχεία από τη γενική έννοια της ομοτοπίας χώρων. Στην ουσία το μόνο που θα αλλάξει είναι το πεδίο ορισμού.

**Ορισμός 4.0.2.** Έστω  $f, g : X \rightarrow Y$  συνεχείς απεικονίσεις. Θα λέμε ότι οι  $f, g$  είναι ομοτοπικές αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση  $H : X \times I \rightarrow Y$  τέτοια ώστε  $H(x, 0) = f(x)$  και  $H(x, 1) = g(x)$  για κάθε  $x \in X$ . Επιπλέον, θα λέμε ότι η  $H$  είναι ομοτοπία μεταξύ των  $f$  και  $g$ .

**Ορισμός 4.0.3.** Έστω σύνολο  $B$  και  $A \subset B$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $\iota : A \rightarrow B$  με τύπο  $\iota(x) = x$  για κάθε  $x \in A$ . Η απεικόνιση  $\iota$  καλείται **απεικόνιση εγκλεισμού** (inclusion map) του  $A$  ή εγκλεισμός του  $A$  και την συμβολίζουμε ως:

$$\iota_A : A \hookrightarrow B$$

**Παρατήρηση 4.0.3.** Στην περίπτωση που το σύνολο  $B$  είναι εφοδιασμένο με τοπολογία και εφοδιάσουμε το σύνολο  $A$  με την τοπολογία υποχώρου τότε η απεικόνιση εγκλεισμού  $\iota_A$  είναι συνεχής.

**Ορισμός 4.0.4 (Παραμορφωτική συρρίκνωση (deformation retraction)).** Ένας  $A \subset X$  υπόχωρος (εφοδιασμένος με την τοπολογία υποχώρου) καλείται **συρρίκνωμα** (retract) του  $X$  αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση  $r : X \rightarrow A$ , η οποία λέγεται **συρρίκνωση**, τέτοια ώστε  $r(x) = x$  για κάθε  $x \in A \subset X$ . Ένα υποσύνολο  $A \subset X$  καλείται **παραμορφωτικό συρρίκνωμα** (deformation retract) του  $X$  αν είναι συρρίκνωμα και επιπλέον η σύνθεση  $\iota_A \circ r : X \rightarrow A \xrightarrow{\iota_A} X$  είναι ομοτοπική (ως απεικόνιση) με την ταυτοτική απεικόνιση του  $X$ , μέσω μίας ομοτοπίας η οποία διατηρεί σταθερά τα στοιχεία του  $A$ . Δηλαδή υπάρχει ομοτοπία  $H : X \times I \rightarrow X$  τέτοια ώστε:

$$H(x, 0) = x, H(x, 1) = r(x) \text{ και } H(a, t) = a \text{ για κάθε } a \in A \text{ και } t \in I$$

**Πρόταση 4.0.2.** Έστω  $A$  συρρίκνωμα του  $X$  (και  $a \in A$ ) με συρρίκνωση  $r : X \rightarrow A$  τότε η απεικόνιση εγκλεισμού  $\iota_A : A \hookrightarrow X$  επάγει έναν  $1 - 1$  ομομορφισμό και η συρρίκνωση  $r : X \rightarrow A$  έναν επί ομομορφισμό. Δηλαδή η απεικόνιση  $\iota_{A*}$  είναι  $1 - 1$  και η απεικόνιση  $r_*$  είναι επί.

**Απόδειξη.** Η σύνθεση  $r \circ \iota_A$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον  $A$ . Οπότε  $r \circ \iota_A = id_A$ . Από την Παρατήρηση 4.0.1 έχουμε ότι η σύνθεση  $r_* \circ \iota_{A*} : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$  είναι ταυτοτική στην  $\pi_1(A, a)$  ή ισοδύναμα  $r_* \circ \iota_{A*} = id_{\pi_1(A, a)}$  για κάθε  $a \in A$ . Έστω  $i_{A*}([f]) = i_{A*}([g]) \in \pi_1(X, a)$  τότε:

$$r_* \circ \iota_{A*}([f]) = r_* \circ \iota_{A*}([g]) \Rightarrow id_{\pi_1(A, a)}([f]) = id_{\pi_1(A, a)}([g]) \Rightarrow [f] = [g]$$

Οπότε η  $\iota_{A*}$  είναι 1-1. Επιπλέον, αν  $[f] \in \pi_1(A, a)$  τότε  $r_* \circ \iota_{A*}([f]) = r_*(\iota_{A*}([f])) = [f]$  οπότε η  $r_*$  είναι επί.  $\square$

Είναι ξεκάθαρο ότι το μόνο που μας μένει είναι να βρούμε συνθήκες αντιστρεψιμότητας των ομομορφισμών  $r_*$  και  $\iota_{A*}$ . Προφανώς, οι συνθήκες που ψάχνουμε είναι αυτές της παραμορφωτικής συρρίκνωσης. Συνεχίζουμε με την απόδειξη ενός λήμματος.

**Λήμμα 4.0.1.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικοί χώροι και  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  σημεία τους. Αν  $f, g : X \rightarrow Y$  συνεχής ομοτοπικές απεικονίσεις, όπου υπάρχει ομοτοπία μεταξύ τους τέτοια ώστε  $H(x_0, t) = y_0$  για κάθε  $t \in I$ , τότε για τις επαγόμενες απεικονίσεις  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  και  $g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  ισχύει ότι  $f_* = g_*$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $H : X \times I \rightarrow Y$  ομοτοπία μεταξύ των  $f, g$ , δηλαδή  $H(s, 0) = f(s)$  και  $H(s, 1) = g(s)$ , τέτοια ώστε  $H(x_0, t) = y_0$  για κάθε  $t \in I$ . Έστω  $a : I \rightarrow X$  κλειστός δρόμος με βάση το  $x_0 \in X$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $G : I \times I \rightarrow Y$  με τύπο  $G = H \circ (a \times id_I)$ . Η  $G$  είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων και ισχύει ότι:

$$G(s, 0) = H(a(s), id_I(0)) = H(a(s), 0) = f(a(s)) = f \circ a(s)$$

$$G(s, 1) = H(a(s), id_I(1)) = H(a(s), 1) = g(a(s)) = g \circ a(s)$$

$$G(0, t) = H(a(0), t) = H(x_0, t) = y_0 \text{ για κάθε } t \in I$$

$$G(1, t) = H(a(1), t) = H(x_0, t) = y_0 \text{ για κάθε } t \in I$$

Οπότε η  $G$  είναι ομοτοπία κλειστών δρόμων. Συνεπώς,  $f \circ a \sim g \circ a \Rightarrow [f \circ a] = [g \circ a]$  μέσω της  $G$ . Οπότε:

$$f_*([a]) = [f \circ a] = [g \circ a] = g_*([a])$$

για τυχαίο κλειστό δρόμο  $a$  και ισοδύναμα για τυχαίο στοιχείο  $[a] \in \pi_1(X, x_0)$ . Επιπλέον,  $f \circ a, g \circ a \in \pi_1(Y, y_0)$ . Οπότε  $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$   $\square$

**Θεώρημα 4.0.2.** Έστω  $A \subset X$  παραμορφωτικό συρρίκνωμα του  $X$ . Τότε η απεικόνιση εγκλεισμού  $\iota_A : A \hookrightarrow X$  επάγει ισομορφισμό ομάδων  $\iota_{A*} : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$

**Απόδειξη.** Από την Πρόταση 4.0.2 έχουμε ότι ο ομομορφισμός  $\iota_{A*}$  είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι με την επιπλέον συνθήκη του παραμορφωτικού συρρίκνωματος είναι επί ώστε να είναι ισομορφισμός. Από τον ορισμό του παραμορφωτικού συρρίκνωματος έχουμε ότι η σύνθεση  $\iota_A \circ r : X \rightarrow A \hookrightarrow X$  (όπου  $r$  η συρρίκνωση) είναι ομοτοπική με τη  $id_X$  μέσω μιας ομοτοπίας  $H : X \times I \rightarrow X$  τέτοια ώστε  $H(x, 0) = \iota_A \circ r$ ,  $H(x, 1) = x$  και  $H(a, t) = a$  για κάθε  $a \in A$  και  $t \in I$ . Μας αρκεί ότι η  $H$  διατηρεί σταθερό ένα από τα σημεία του  $A$  για να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.0.1 και έχουμε ότι:

$$id_{X*} = (\iota_A \circ r)_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a) \text{ ή } id_{\pi_1(X, a)} = \iota_{A*} \circ r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

Έστω  $[f] \in \pi_1(X, a)$  τότε  $[f] = \iota_{A*}(r_*([f]))$  όπου  $r_*([f]) \in \pi_1(A, a)$ . Οπότε ο ομομορφισμός  $\iota_{A*}$  είναι 1-1 και επί. Συνεπώς, είναι ισομορφισμός ομάδων.  $\square$

Θα συνεχίσουμε μελετώντας τη θεμελιώδη ομάδα στην τοπολογική κατασκευή γινόμενο.

**Θεώρημα 4.0.3.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  τοπολογικοί χώροι και  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  σημεία τους. Τότε η θεμελιώδης ομάδα του χώρου  $X \times Y$  με βασικό σημείο  $(x_0, y_0)$  είναι ισόμορφη με ευθύ γινόμενο των ομάδων  $\pi_1(X, x_0)$  και  $\pi_1(Y, y_0)$ . Δηλαδή:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Απόδειξη. Έστω  $f : I \rightarrow X \times Y$  κλειστός δρόμος οπότε συνεχής απεικόνιση. Τότε απο τη συνέχεια της τοπολογίας γινομένου έχουμε ότι οι συνθέσεις  $p_x \circ f$  και  $p_y \circ f$  είναι συνεχείς ( $p_x \equiv pr_1$  και  $p_y \equiv pr_2$ ). Παρατηρούμε ότι  $p_x \circ f(0) = p_x \circ f(1) = x_0$  και  $p_y \circ f(0) = p_y \circ f(1) = y_0$  οπότε οι συνεχείς απεικονίσεις  $p_x \circ f : I \rightarrow X$  και  $p_y \circ f : I \rightarrow Y$  είναι κλειστοί δρόμοι με βασικά σημεία  $x_0$  και  $y_0$  αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$p_{x*} \times p_{y*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \text{ όπου } p_{x*} \times p_{y*}([f]) = ([p_x \circ f], [p_y \circ f])$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. Αρχικά έχουμε ότι αν  $[f] = [g] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  τότε  $f \sim g$  μέσω μιας ομοτοπίας  $F$  τότε  $p_x \circ f \sim p_x \circ g \Rightarrow [p_x \circ f] = [p_x \circ g]$  μέσω της ομοτοπίας  $p_x \circ F : I \times I \rightarrow X$  και ομοίως έχουμε  $[p_y \circ f] = [p_y \circ g]$ . Οπότε η  $p_{x*} \times p_{y*}$  είναι καλά ορισμένη. Έστω τώρα  $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  τότε ισχύει ότι

$$p_{x*} \times p_{y*}([f] \cdot_{(x_0, y_0)} [g]) = p_{x*} \times p_{y*}([f * g]) = ([p_x \circ (f * g)], [p_y \circ (f * g)])$$

Επιπλέον, έχουμε ότι  $p_x \circ (f * g) \sim (p_x \circ f) * (p_x \circ g)$  και  $p_y \circ (f * g) \sim (p_y \circ f) * (p_y \circ g)$ . Οπότε:

$$([p_x \circ (f * g)], [p_y \circ (f * g)]) = ([p_x \circ f] * [p_x \circ g], [p_y \circ f] * [p_y \circ g]) = ([p_x \circ f] \cdot_{x_0} [p_x \circ g], [p_y \circ f] \cdot_{y_0} [p_y \circ g]) = ([p_x \circ f], [p_y \circ f]) \cdot_{(x_0, y_0)} ([p_x \circ g], [p_y \circ g]) = p_{x*} \times p_{y*}([f]) \cdot_{\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)} p_{x*} \times p_{y*}([g])$$

Όπου στις δύο τελευταίες ισότητες με  $\cdot_{\times}$  εννοούμε την πράξη γινομένου στο ευθύ γινόμενο ομάδων. Έστω τώρα  $([f], [g]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ . Θέτουμε  $a : I \rightarrow X \times Y$   $a(s) = (f(s), g(s))$  και έχουμε ότι:

1. Η  $a(s)$  είναι συνεχής στον  $X \times Y$  διότι  $f, g$  συνεχείς στους  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα.
2.  $a(0) = a(1) = (x_0, y_0)$
3. Από τα 1,2 έχουμε ότι  $[a] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$
4.  $p_{x*} \times p_{y*}([a]) = ([p_x \circ a], [p_y \circ a]) = ([f], [g])$

Οπότε ο ομομορφισμός  $p_{x*} \times p_{y*}$  είναι επί. Έστω τώρα  $[a_1], [a_2] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  τέτοιες ώστε  $p_{x*} \times p_{y*}([a_1]) = p_{x*} \times p_{y*}([a_2])$ . Από τον ορισμό της τοπολογίας γινομένου έχουμε ότι  $a_1(s) = (f_1(s), g_1(s))$  και  $a_2(s) = (f_2(s), g_2(s))$  όπου οι  $f_1, f_2$  είναι κλειστοί δρόμοι στον  $X$  και  $g_1, g_2$  κλειστοί δρόμοι στον  $Y$ . Η κλειστότητα των  $f_1, f_2$  και  $g_1, g_2$  προκύπτει άμεσα από την κλειστότητα των  $a_1$  και  $a_2$ .

$$p_{x*} \times p_{y*}([a]) = p_{x*} \times p_{y*}([b]) \Rightarrow ([f_1], [g_1]) = ([f_2], [g_2]) \Rightarrow f_1 \sim f_2 \text{ και } g_1 \sim g_2$$

Έστω  $H_1 : I \times I \rightarrow X$  και  $H_2 : I \times I \rightarrow Y$  ομοτοπίες των κλειστών δρόμων  $f_1, f_2$  και  $g_1, g_2$ . Τότε η απεικόνιση  $G : I \times I \rightarrow X \times Y$  με τύπο  $G(s, t) = (H_1(s, t), H_2(s, t))$  είναι συνεχής και επιπλέον ισχύουν τα παρακάτω

1.  $G(0, t) = (H_1(0, t), H_2(0, t)) = (x_0, y_0)$  και  $G(1, t) = (H_1(1, t), H_2(1, t)) = (x_0, y_0)$
2.  $G(s, 0) = (H_1(s, 0), H_2(s, 0)) = (f_1(s), g_1(s)) = a_1(s)$  και  
 $G(s, 1) = (H_1(s, 1), H_2(s, 1)) = (f_2(s), g_2(s)) = a_2(s)$

Από το 1 έχουμε ότι η συνεχής απεικόνιση  $G$  είναι ομοτοπία δρόμων (πιο συγκεκριμένα κλειστών δρόμων) και από το 2 έχουμε ότι  $a_1 \sim a_2$  οπότε  $[a_1] = [a_2]$  □

Θα αποδείξουμε ένα ακόμα θεώρημα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα της σφαίρας  $S^n$ ,  $n \geq 2$ . Η απόδειξη θα είναι περιγραφική καθώς αυτό που θα αποδείξουμε στην πραγματικότητα είναι περίπτωση του θεωρήματος Seifert-Van Kampen το οποίο δεν είμαστε ακόμα, καν σε θέση να διατυπώσουμε.

**Θεώρημα 4.0.4.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$  τοπολογικός και  $U, V \in \mathcal{T}_X$ . Αν  $X = U \cup V$  και  $U, V$  απλά συνεκτικοί (ως χώροι με την τοπολογία υποχώρου) και η τομή  $U \cap V \neq \emptyset$  είναιδρομοσυνεκτικός χώρος τότε ο  $X$  είναι απλά συνεκτικός.

Απόδειξη. Εφόσον  $U \cap V \neq \emptyset$ ,  $U, V$  δρομοσυνεκτικοί και  $X = U \cup V$  έχουμε ότι ο  $X$  είναι δρομοσυνεκτικός οπότε η θεμελιώδης ομάδα είναι ανεξάρτητη από το βασικό σημείο λόγω της Πρότασης 2.0.4. Οπότε επιλέγουμε  $x_0 \in U \cap V$  και υπολογίζουμε την  $\pi_1(X, x_0)$ . Έστω  $f : I \rightarrow X$  δρόμος με βάση το  $x_0$ . Έχουμε ότι  $f : I \rightarrow X = U \cup V$  οπότε  $I = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  και λόγω συνέχειας της  $f$  έχουμε ότι  $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  είναι ανοικτά στο  $I$ . Οπότε είναι ανοικτό κάλλυμα του  $I$ . Το  $I$  είναι συμπαγής μετρικός χώρος οπότε εφαρμόζοντας το λήμμα 1.0.2 θα βρούμε μία διαμέριση του  $I$ , έστω  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , τέτοια ώστε  $[t_{i-1}, t_i] \subset f^{-1}(U)$  ή  $[t_{i-1}, t_i] \subset f^{-1}(V)$  συνεπώς  $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U$  ή  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset V$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Ένα σημαντικό σχόλιο που πρέπει να σημειωθεί εδώ είναι ότι μπορούμε πάντα να επιλέξουμε μία μικρότερη (δηλαδή ένα υποσύνολο του  $t_0, t_1, \dots, t_n$ ) διαμέριση τέτοια ώστε:

- $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U$  ή  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset V$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$
- Αν  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U$  τότε  $f([t_i, t_{i+1}]) \subset V$

Η ιδέα είναι ότι αν δύο διαδοχικά  $t_i, t_{i+1}$  απεικονίζονται μόνο σε ένα από τα  $U$  ή  $V$  τότε απλά αφαιρούμε το  $t_{i+1}$  από τη διαμέριση και συνεχίζουμε με το  $t_{i+2}$  (βέβαια πρέπει να σιγουρευτούμε ότι ο δρόμος δεν καταλήξει εξ ολοκλήρου στο  $V$ , κάτι που μπορεί να αποδειχθεί). Όπως και να έχει μπορούμε να καταλήξουμε με μία διαμέριση με τις συνθήκες που θέλουμε. Οπότε όλα τα σημεία  $x_0 = f(0 = t_0), f(t_1), \dots, f(1 = t_n) = x_0$  θα ανήκουν στο σύνολο  $U \cap V$ , που είναι δρομοσυνεκτικό οπότε για κάθε  $i$  υπάρχει δρόμος  $g_i$  που να συνδέει το  $x_0$  με το  $f(t_i)$ .

Για  $1 \leq i \leq n$  ορίζουμε τους δρόμους

$$f_i : I \rightarrow X \text{ όπου } f_i(s) = f((t_i - t_{i-1})s + t_{i-1})$$

Σημειώνουμε ότι για κάθε  $i$  η  $f_i$  είναι συνεχής απεικόνιση ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,  $f_i(1) = f(t_i)$  και  $f_{i+1}(0) = f(t_i)$  οπότε μπορούμε να συνθέσουμε τους δρόμους  $f_i$  (διαδοχικά) και επιπλέον ισχύει ότι: (χωρίς απόδειξη)

$$f \sim f_1 * f_2 * \dots * f_n$$

Επιπλέον έχουμε:

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} &\sim \\ f_1 * e_{f(t_1)} * f_2 \dots * e_{f(t_{n-1})} * f_n &\sim \\ f_1 * (\bar{g}_1 * g_1) * f_2 \dots * (\bar{g}_{n-1} * g_{n-1}) * f_n &\sim \\ (f_1 * \bar{g}_1) * (g_1 * f_2 * \bar{g}_2) \dots * \bar{g}_{n-1} * (g_{n-1} * f_n) &\end{aligned}$$

Εφόσον τα  $g_i, \bar{g}_i$  είναι δρόμοι στην  $U \cap V$  και οι δρόμοι  $f_i$  είναι εξ ολοκλήρου στο  $U$  ή  $V$  τότε οι δρόμοι  $g_i * f_i * \bar{g}_{i+1}$  ανήκουν εξ ολοκλήρου σε κάποιο από τα  $U$  ή  $V$ . Επιπλέον, έχουμε:

$$(g_i * f_i * \bar{g}_{i+1})(0) = g_i(0) = x_0 \text{ και } (g_i * f_i * \bar{g}_{i+1})(1) = \bar{g}_{i+1}(1) = x_0$$

Οπότε όλοι οι ενδιάμεσοι όροι στις παραπάνω παρενθέσεις είναι κλειστοί δρόμοι με βασικό σημείο  $x_0$  και ανήκουν εξ ολοκλήρου στο  $U$  ή στο  $V$ , τα οποία είναι απλά συνεκτικά συνεπώς  $g_i * f_i * \bar{g}_{i+1} \sim e_{x_0}$ . Τέλος, για τους όρους στα άκρα  $f_1 * \bar{g}_1$  και  $g_{n-1} * f_n$  έχουμε:

$$f_1 * \bar{g}_1(0) = f_1(0) = f(t_0) = f(0) = x_0 \text{ και } f_1 * \bar{g}_1(1) = \bar{g}_1(1) = g_1(0) = x_0$$

$$g_{n-1} * f_n(0) = g_{n-1}(0) = x_0 \text{ και } g_{n-1} * f_n(1) = f_n(1) = f(t_n) = f(1) = x_0$$

Οπότε και οι δρόμοι  $f_1 * \bar{g}_1, g_{n-1} * f_n$  είναι ομοτοπικοί με τον  $e_{x_0}$ . Συνεπώς,:

$$f \sim e_{x_0} * e_{x_0} * \dots * e_{x_0} \sim e_{x_0}$$

Άρα  $[f] = [e_{x_0}]$  και άμεσα έχουμε  $\pi_1 X \cong \pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$  □

# Κεφάλαιο 5

## Εφαρμογές

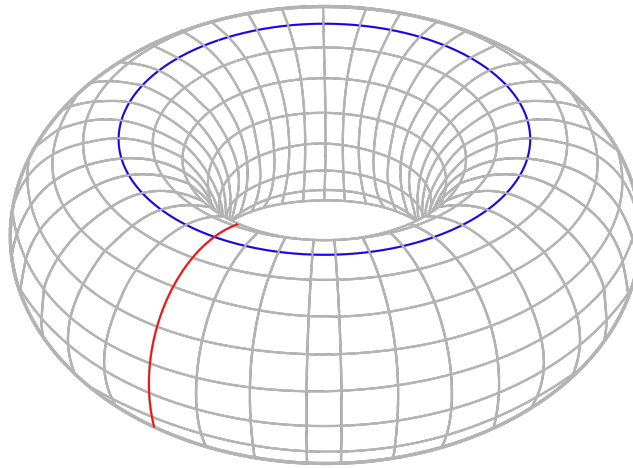
Σε αυτό το κεφάλαιο θα συνδυάσουμε τα θεωρήματα 4.0.1 4.0.2 4.0.3 4.0.4 και τον υπολογισμό που κάναμε για τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου για βρούμε τις θεμελιώδης ομάδες και άλλων πιο σύνθετων χώρων αλλά και για να δούμε μερικά ακόμα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μελέτη μας, όπως το θεμελιώδες θεώρημα της αλγεβρας.

**Πρόταση 5.0.1.** Η θεμελιώδης ομάδα του τόρου  $T_2$  είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

*Απόδειξη.* Ο τόρος  $T^2$  ορίζεται ως το τοπολογικό γινόμενο δύο κύκλων και επιπλέον είναι δρομοσυνεχτικό σύνολο, οπότε λόγω του Θεωρήματος 4.0.3 έχουμε:

$$T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \Rightarrow \pi_1 T^2 \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Επιπλέον άμεσα έχουμε ότι ο τόρος  $T^2$  δεν είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο  $\mathbb{S}^1$  καθώς η ομάδα  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  δεν είναι κυκλική ενώ η ομάδα  $(\mathbb{Z}, +)$  είναι οπότε οι θεμελιώδης ομάδες τους δεν είναι ισόμορφες.  $\square$



Σχήμα 5.1: Ο τόρος  $\mathbb{T}^2$

**Πρόταση 5.0.2.** Η θεμελιώδης ομάδα του κυλίνδρου  $C$  είναι ισόμορφη με την ομάδα  $(\mathbb{Z}, +)$ .

*Απόδειξη.* Τοπολογικά ο κύλινδρος είναι το τοπολογικό γινόμενο  $\mathbb{S}^1 \times I$  οπότε είναι δρομοσυνεχτικός τοπολογικός χώρος (διότι  $\mathbb{S}^1$  και  $I$  είναι δρομοσυνεχτικοί). Οπότε:

$$C = \mathbb{S}^1 \times I \Rightarrow \pi_1(C) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times I) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(I) = \mathbb{Z} \times \{e\} \cong \mathbb{Z}$$

Θα δείξουμε τώρα το ίδιο αποτέλεσμα μέσω του παραμορφωτικού συρρίκνώματος. Θα δείξουμε ότι το σύνολο  $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset C$  είναι παραμορφωτικό συρρίκνωμα του  $C$ . Θεωρούμε τις απεικονίσεις:

$$f : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \quad f(s, x) = (s, 0)$$

$$g : \mathbb{S}^1 \times \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I \quad g(s, 0) = (s, 0)$$

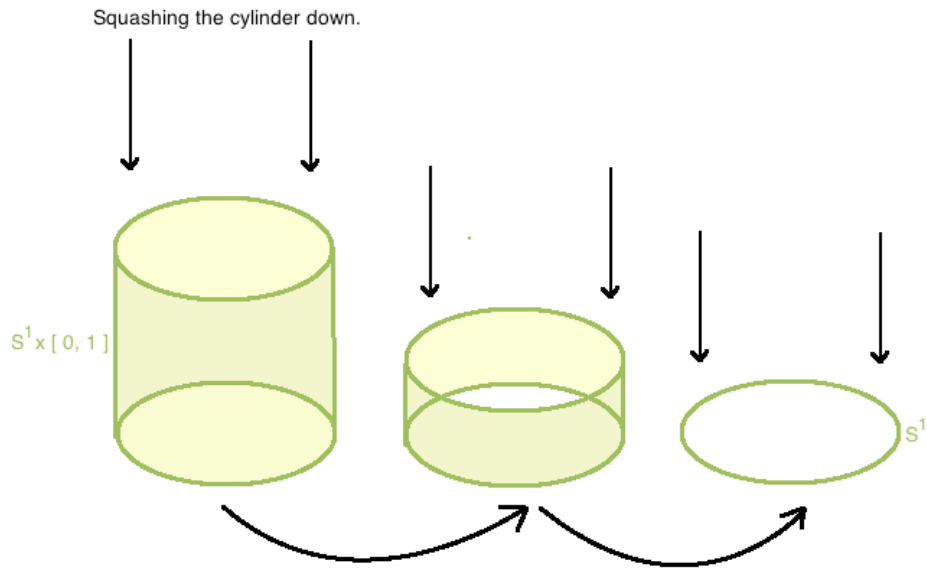
Έχουμε επιπλέον ότι  $f \circ g(s, 0) = (s, 0) = id_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}(s, 0)$  και  $g \circ f(s, x) = (s, 0)$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $H : C \times I \rightarrow C$  με τύπο:

$$H((s, x), t) = (s, (1 - t)x)$$

η οποία είναι συνεχής. Αν  $c \in \mathbb{S}^1 \subset C$  τότε  $c = (s, 0)$  όπου  $s \in \mathbb{S}^1$  και έχουμε ότι  $H(c, t) = (s, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$  για κάθε  $t \in I$ . Άρα η συνεχής απεικόνιση που βρήκαμε αφήνει αναλλοίωτο το σύνολο  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ . Επιπλέον, έχουμε  $H((s, x), 0) = (s, x) = id_{\mathbb{S}^1 \times I}$  και  $H((s, x), 1) = (s, 0) = id_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ . Οπότε η  $H$  είναι παραμορφωτική συρρίκνωση του  $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset C$ . Επιπλέον, με τετριμμένο τρόπο έχουμε ότι  $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ . Οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.0.2 έχουμε:

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1 \mathbb{S}^1 \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \cong \pi_1 C$$

Σχηματικά αυτό που κάναμε είναι να συμπίεσουμε τον κύλινδρο σε ένα κύκλο με συνεχή τρόπο, που δεν είναι ομοιομορφισμός!



Σχήμα 5.2: Παραμορφωτική συρρίκνωση του κυλίνδρου

□

Τώρα θα υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου  $\mathbb{R}^2 - \{0_2\}$  και μετά θα παραθέσουμε μία πιο γενική κατασκευή για τον υπολογισμό της θεμελιώδης ομάδας του χώρου  $\mathbb{R}^n - \{0_n\}$  μέσω της σφαίρας  $S^n$ ,  $n \geq 2$  με χρήση παραμορφωτικού συρρίκνώματος.

**Πρόταση 5.0.3.** Η θεμελιώδης ομάδα του χώρου  $\mathbb{R}^2 - \{0_2\}$  είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα  $(\mathbb{Z}, +)$

*Απόδειξη.* Αρχικά μπορεί να αποδειχθεί ότι ο χώρος  $\mathbb{R}^2 - \{0_2\}$  είναι δρομοσυνεκτικός. Θα δείξουμε ότι ο κύκλος  $\mathbb{S}^1$  είναι παραμορφωτικό συρρίκνωμα του  $\mathbb{R}^2 - \{0_2\}$ . Θεωρούμε τις απεικονίσεις:

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0_2\} \text{ όπου } f(x) = x \in \mathbb{S}^1 \quad (\text{o εγκλεισμός})$$

και

$$g : \mathbb{R}^2 - \{0_2\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ όπου } g(x) = \frac{x}{\|x\|} \text{ (η συρρίκνωση)}$$

Έχουμε ότι η σύνθεση  $f \circ g : \mathbb{R}^2 - \{0_2\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0_2\}$  είναι:

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{x}{\|x\|}$$

και η σύνθεση  $g \circ f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0_2\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  είναι

$$g(f(s)) = g(s) = \frac{s}{\|s\|} = \frac{s}{1} = s = id_{\mathbb{S}^1}$$

Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση  $H : \mathbb{R}^2 - \{0_2\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0_2\}$  με τύπο:

$$H(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

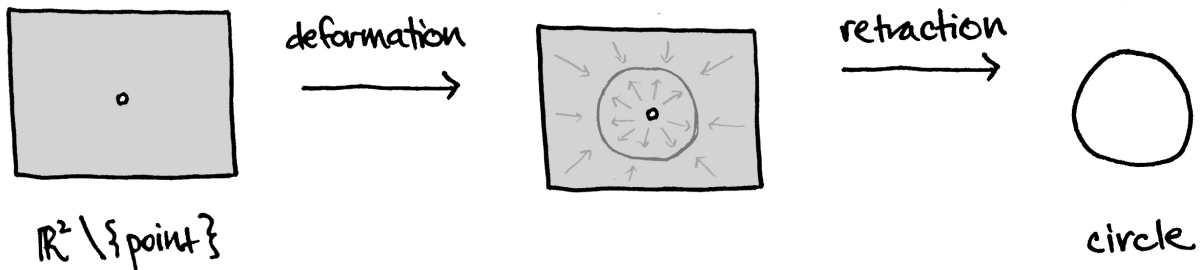
Αν  $x \in \mathbb{S}^1$  τότε  $\|x\| = 1$  οπότε  $H(x, t) = (1 - t)x + t(x/1) = x$  για κάθε  $t \in I$  οπότε ο κύκλος  $\mathbb{S}^1$  διατηρείται σταθερός μέσω της  $H$ . Επιπλέον, έχουμε:

$$H(x, 0) = x = id_{\mathbb{R}^2 - \{0_2\}} \text{ και } H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = f \circ g$$

Συνεπώς η  $H$  είναι παραμορφωτική συρρίκνωση και λόγω του Θεωρήματος 4.0.2 έχουμε:

$$(\mathbb{Z}, +) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0_2\})$$

Σχηματικά συμπιέζουμε το τρύπιο επίπεδο προς τον κύκλο κατά μήκος των ευθειών που διέρχονται από το  $0_2$  □



Σχήμα 5.3: Παραμορφωτική συρρίκνωση του τρύπιου επιπέδου

**Παρατήρηση 5.0.1.** Ένα αξιοσημείωτο σχόλιο εδώ είναι ότι ο χώρος  $\mathbb{R}^2$  έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα ενώ αν του αφαιρέσουμε ένα σημείο η θεμελιώδης ομάδα του γίνεται ισόμορφη με το  $\mathbb{Z}$  ενώ αν κάναμε το ίδιο στον  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  η θεμελιώδης ομάδα του παραμένει τετριμμένη. Σε αποδεικτικό πλαίσιο η ουσία είναι ότι αν αφαιρέσουμε το  $0_2$  επιτρέπεται να ορίσουμε καλά την απεικόνιση  $x/\|x\|$ .

**Θεώρημα 5.0.1.** Για κάθε  $n \geq 2$  η θεμελιώδης ομάδα της  $n$ -σφαίρας  $\mathbb{S}^n$  είναι τετριμμένη.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε τα σύνολα  $U = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} < 1/4\}$  και  $V = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > -1/4\}$ . Στον  $\mathbb{R}^3$ , μπορούμε να φανταστούμε δύο τμήματα της σφαίρας  $\mathbb{S}^n$  όπου το ένα είναι τα σημεία της σφαίρας πάνω από το  $z = -1/4$  και το άλλο τμήμα κάτω από το  $z = 1/4$ . Έχουμε ότι  $\mathbb{S}^n = U \cup V$ . Θα δείξουμε ότι τα  $U, V$  είναι ομοιομορφικά με ανοικτούς δίσκους στον  $\mathbb{R}^n$  μέσω της στερεογραφικής προβολής. Έχουμε ότι η απεικόνιση  $f : \mathbb{S}^n - \{0, \dots, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  με τύπο

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων, και η αντίστροφη είναι

$$f^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 1 - \lambda) \text{ όπου } \lambda = \frac{2}{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Έχουμε  $U \subset S^n - \{0, \dots, 0, 1\}$ . Οπότε θα έχουμε ότι  $U \cong f(U)$ . Στόχος μας είναι να βρούμε το  $f(U)$ . Θα αποδείξουμε ότι είναι ανοικτός δίσκος στον  $\mathbb{R}^n$ . Πράγματι, αν  $D^n(0, r)$  είναι ο ανοικτός δίσκος κέντρου 0 και ακτίνας  $r$  στον  $\mathbb{R}^n$  τότε έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^n < r &\iff \\ \sum_{i=1}^n x_i^n + 1 < r + 1 &\iff \\ \frac{2}{\sum_{i=1}^n x_i^n + 1} > \frac{2}{r + 1} &\iff \\ \lambda > \frac{2}{1 + r} &\iff \\ 1 - \lambda < 1 - \frac{2}{1 + r} &\iff \\ x_{n+1} < 1 - \frac{2}{1 + r} \end{aligned}$$

Οπότε οι ανοικτές μπάλες με κέντρο το 0 απεικονίζονται σε σύνολα σαν το  $U$ . Για να προσδιορίσουμε το σύνολο που ψάχνουμε απλά θα λύσουμε, ως προς  $r$ , την εξίσωση:

$$1 - \frac{2}{1 + r} = 1/4 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$f^{-1}(D^n(0, \frac{5}{3})) = U \xrightarrow{f:1-1,\varepsilon\pi\acute{\iota}} f(U) = D^n(0, \frac{5}{3})$$

Οπότε έχουμε  $U \cong D^n(0, 5/3) \Rightarrow \pi_1(U) \cong \pi_1(D^n(0, 5/3))$ . Όμως ο δίσκος  $D^n(0, 5/3)$  είναι κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  οπότε σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.0.3 έχουμε ότι  $\pi_1(D^n(0, 5/3)) = \{e\}$  οπότε το  $U$  έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα. Με ίδιο ακριβώς τρόπο εργαζόμαστε για να δείξουμε ότι  $\pi_1(V) = \{e\}$ , μόνο που θα χρησιμοποιήσουμε τη στερεογραφική προβολή από τον νότιο πόλο διότι τότε θα έχουμε  $V \subset S^n - (0, \dots, 0, -1)$ . Επιπλέον, με στοιχειώδη τρόπο αποδεικνύεται ότι  $U \cap V \cong S^{n-1} \times (-1/4, 1/4)$  που είναι δρομοσυνεκτικός χώρος, ως γινόμενο δρομοσυνεκτικών χώρων. Συνολικά έχουμε ότι  $S^n = U \cup V$ ,  $\pi_1(U) = \pi_1(V) = \{e\}$  και  $U \cap V$  δρομοσυνεκτικός. Οπότε με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.0.4 έχουμε ότι  $\pi_1(S^n) = \{e\}$  για  $n \geq 2$ .  $\square$

**Πρόταση 5.0.4.** Η θεμελιώδης ομάδα του  $\mathbb{R}^n - \{0_n\}$  είναι τετριμμένη αν  $n \geq 3$

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι η σφαίρα  $S^{n-1}$  είναι παραμορφωτικό συρρίκνωμα του  $\mathbb{R}^n - \{0_n\}$  (η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 5.0.3). Έχουμε την απεικόνιση εγχλειςμού  $\iota_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0_n\}$  όπου  $\iota_{S^{n-1}}(x) = x$  για κάθε  $x \in S^{n-1}$  και η συρρίκνωση  $r : \mathbb{R}^n - \{0_n\} \rightarrow S^{n-1}$  όπου  $r(x) = x/\|x\|$ , δηλαδή:

$$r(x_1, \dots, x_n) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}}$$

Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση  $F : \mathbb{R}^n - \{0_n\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0_n\}$  όπου:

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

Έχουμε ότι

1.  $F(x, 0) = x = id(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n - \{0_n\}$
2. Αν  $x \in S^{n-1}$  τότε  $\|x\| = 1$  οπότε για  $x \in S^{n-1}$  έχουμε  $F(x, t) = (1 - t)x + tx = x$
3.  $F(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = r(x)$

Επιπλέον έχουμε ότι ο  $\mathbb{R}^n - \{0_n\}$  είναι δρομοσυνεκτικός χώρος οπότε η θεμελιώδης ομάδα του είναι ανεξάρτητη από το βασικό σημείο. Από τα 1, 2, 3 και το Θεώρημα 4.0.2 έχουμε ότι:

$$\text{Για } n \geq 3 \quad \pi_1(\mathbb{R}^n - \{0_n\}) \cong \pi_1 S^n = \{e\}$$

□

**Παρατήρηση 5.0.2.** Αν συνδυάσουμε τους υπολογισμούς που κάναμε έχουμε ότι:

$$\pi_1(S^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n - \{0_n\}) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}, +), & n = 2 \\ \{e\}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Αν  $n = 1$  τότε ο  $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  δεν είναι δρομοσυνεκτικός, όμως στις δρομοσυνεκτικές συνιστώσες  $(-\infty, 0)$  και  $(0, \infty)$  οι θεμελιώδεις ομάδες είναι τετριμμένες διότι είναι κυρτά σύνολα. Επιπλέον, άμεσα έχουμε ότι  $\mathbb{R}^2$  δεν είναι ομοιόμορφος με τον  $\mathbb{R}^n$  αν  $n \neq 2$ .

Θα συνεχίσουμε δίνοντας αποδείξεις δύο γνωστών θεωρημάτων μέσω αλγεβρικής τοπολογίας. Απλά να σημειωθεί ότι τοπολογικά το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}$  και ο  $S^1$  ως υποσύνολο του δεν έχει διαφορά από τον κύκλο  $S^1$  ως υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$

**Θεώρημα 5.0.2 (Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας).** Κάθε πολυωνυμική εξίσωση

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

βαθμού  $n > 0$  με συντελεστές στο  $\mathbb{C}$  έχει ρίζα στο  $\mathbb{C}$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο απαγωγή. Οπότε, έστω ότι υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση και συνεπώς πολυώνυμο  $p \in \mathbb{C}[x]$  που δεν έχει ρίζα στο  $\mathbb{C}$ , δηλαδή  $p(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{C}$ . Συνεπώς, η συνάρτηση  $h_r : I \rightarrow S^1$  με τύπο:

$$h_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})}{p(r)}$$

είναι καλά ορισμένη και συνεχής για κάθε  $r \geq 0$  (δηλαδή  $Im(r) = 0$  και  $Re(r) \geq 0$ ). Οπότε και συνάρτηση  $f_r : I \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  όπου:

$$f_r(s) = \frac{h_r(s)}{|h_r(s)|} = \frac{p(re^{2\pi is}/p(r))}{|p(re^{2\pi is}/p(r))|}$$

είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον,  $h_r(0) = p(re^0)/p(r) = p(r)/p(r) = 1 = 1 + 0i$  και  $h_r(1) = p(re^{2\pi i})/p(r) = p(r)/p(r) = 1 = 1 + 0i$ . Άρα  $h_r(0) = h_r(1)$ , οπότε  $f_r(0) = f_r(1)$ . Συνεπώς, για κάθε  $r \geq 0$  η  $f_r(s)$  είναι κλειστός δρόμος στον  $S^1$  με βάση το  $1 = 1 + 0i$  (δηλαδή το  $(1, 0)$  από τη σκοπιά του  $\mathbb{R}^2$ ). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι  $f_0(s) = p(0)/p(0) = 1$ . Δηλαδή ο  $f_0$  είναι ο σταθερός δρόμος στο  $x_0 = 1 + 0i$ .

Για κάθε  $r \geq 0$  μπορούμε να βρούμε ομοτοπία μεταξύ του  $f_r$  και  $f_0$ . Πράγματι, αν  $r = 0$  το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Αν τώρα  $r > 0$  η απεικόνιση  $H : \mathbb{C} \times [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο  $H(s, t) = f_r(s)$  θα είναι συνεχής. Έστω  $a : I \rightarrow [0, r]$  με  $a(t) = rt$  για κάθε  $t \in I$ . Η  $a$  είναι συνεχής και επί. Οπότε και η απεικόνιση  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$  όπου  $F(s, t) = G(s, a(t))$  είναι καλά ορισμένη και συνεχής και επιπλέον για κάθε  $t \in I$   $F(0, t) = G(0, a(t)) = f_{tr}(0) = 1$  και ομοίως  $F(1, t) = G(1, a(t)) = 1$ . Οπότε η  $F$  είναι ομοτοπία δρόμων και μάλιστα κλειστών. Επιπλέον, έχουμε  $F(s, 0) = f_0(s)$  και  $F(s, 1) = f_r(s)$ . Δηλαδή έχουμε  $f_0 \sim f_r$ . Άρα για κάθε  $r \geq 0$  ισχύει ότι  $f_r \sim f_0$

Τώρα θεωρούμε τον κλειστό δρόμο  $g_n(s) = e^{2\pi i n s}$ . Να σημειώσουμε ότι αν δούμε το  $\mathbb{C}$  τοπολογικά ως το  $\mathbb{R}^2$  τότε η  $g_n$  είναι η απεικόνιση  $g_n(s) = (\cos(2\pi n s), \sin(2\pi n s))$ , το οποίο το είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο ως  $\omega_n(s)$ . Η επιπλέον αλγεβρική δομή που έχουν οι μιγαδικοί αριθμοί δεν επηρεάζουν τα τοπολογικά μας αποτελέσματα οπότε μπορούμε να πούμε ότι  $\Phi([g_n]) = n \in \mathbb{Z}$  όπου  $\Phi$  είναι ο ισομορφισμός που ορίστηκε στο Θεώρημα 3.0.1. Θα συνεχίσουμε αποδεικνύοντας ότι για το  $n = \deg(p)$  υπάρχει  $r \geq 0$  τέτοιο ώστε  $g_n \sim f_r$ .

Θεωρούμε θετικό πραγματικό αριθμό  $r > \max\{1, |a_{n-1}| + \dots + |a_0|\}$ . Τότε για  $x \in \mathbb{C}$  τέτοια ώστε  $|x| = r$  έχουμε:

$$\begin{aligned} |x^n| &= r^n \\ &= r \cdot r^{n-1} \\ &> (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)r^{n-1} \\ &= (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)|x^{n-1}| \\ &= |a_{n-1}||x^{n-1}| + \dots + |a_0||x^{n-1}| \quad \left( |x| > 1 \rightarrow |x^{n-1}| > |x^k| \text{ για κάθε } k < n-1 \right) \\ &\geq |a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0| \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο  $p_t(x) = x^n + t(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)$ . Το  $p_t(x)$  δεν έχει ρίζες στον κύκλο  $|x| = r$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} |p_t(x)| &= |x^n + t(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)| \quad (|z| - |w| \leq |z + w|) \\ &\geq |x^n| - |t(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)| \\ &= |x^n| - t|a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0| \quad \text{Ελάχιστη τιμή για } t = 1 \\ &\geq |x^n| - 1|a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0| \quad (1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Επιπλέον βρίσκουμε ότι:

$$p_0(x) = x^n + 0(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)x^n = x^n \text{ και } p_1(x) = x^n + 1(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) = p(x)$$

Θεωρούμε την απεικόνιση  $G : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ , όπου

$$G(s, t) = \frac{p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)|}$$

Η  $G$  είναι καλά ορισμένη και συνεχής (διότι  $p_t(x) \neq 0$  για  $|x| = r$ ). Επιπλέον, έχουμε ότι  $G(0, t) = 1 = G(1, t)$  για κάθε  $t \in I$ . Οπότε η  $G$  είναι ομοτοπία κλειστών δρόμων. Παρατηρούμε ότι:

$$G(s, 1) = \frac{p_1(re^{2\pi i s})/p_1(r)}{|p_1(re^{2\pi i s})/p_1(r)|} = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|} = f_r(s)$$

και

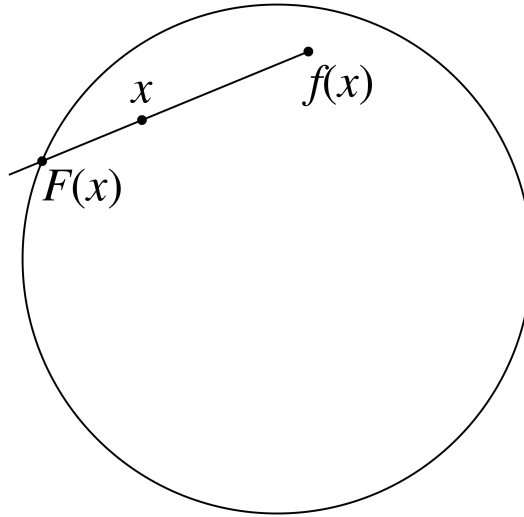
$$G(s, 0) = \frac{p_0(re^{2\pi i s})/p_0(r)}{|p_0(re^{2\pi i s})/p_0(r)|} = \frac{(re^{2\pi i s})^n/r^n}{|(re^{2\pi i s})^n/(r^n)|} = \frac{r^n e^{2\pi i n s}/r^n}{|r^n| |e^{2\pi i n s}|/|r^n|} = \frac{e^{2\pi i n s}}{1} = e^{2\pi i n s} = g_n(s)$$

Δηλαδή έχουμε  $f_r \sim g_n$ . Δηλαδή έχουμε ότι  $[e] = [f] = [g_n]$ . Συνεπώς, μέσω της  $\Phi$  έχουμε ότι  $0 = \Phi([f_r]) = n$ , λόγω του Θεωρήματος 3.0.1 το οποίο είναι προφανώς άτοπο.  $\square$

**Παρατήρηση 5.0.3.** Να σημειωθεί ότι δείξαμε ότι η υπόθεση μας μόνο αν  $n = 0$ , δηλαδή για σταθερά (μη μηδενικά) πολυώνυμα.

**Θεώρημα 5.0.3 (Θεώρημα σταθερού σημείου Brouwer για  $n = 2$ ).** Κάθε συνεχής απεικόνιση  $f : D^2[0, 1] \rightarrow D^2[0, 1]$  έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει  $x \in D^2[0, 1]$  τέτοιο ώστε  $h(x) = x$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $f$  με τις υποθέσεις του θεωρήματος όπου  $f(x) \neq x$  για κάθε  $x \in D^2[0, 1]$  για να καταλήξουμε σε άτοπο. Η ιδέα για την απόδειξη έχει ως εξής. Αν υπάρχει τέτοια  $f$  τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία καλά ορισμένη συνεχή απεικόνιση  $F$  από τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο στον μοναδιαίο κύκλο (που είναι το σύνορο του), ως εξής. Για κάθε ζεύγος  $(x, f(x))$  φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει (κάτι που είναι δυνατό μόνο διότι θεωρήσαμε ότι  $f(x) \neq x$ ) και το επεκτείνουμε από το  $f(x)$  προς το  $x$  μέχρι αυτό να τμήσει τον μοναδιαίο κύκλο. Σχηματικά έχουμε:



Σχήμα 5.4: Γεωμετρική κατασκευή της  $F$

Προφανώς, αν  $x \in S^1 \subset D^2[0, 1]$  τότε  $F(x) = x$  οπότε έχουμε μία συνεχή απεικόνιση  $F : D^2[0, 1] \rightarrow S^1$  τέτοια ώστε  $F(x) = x$ , αν  $x \in S^1$ . Δηλαδή ο κύκλος είναι συρρίκνωση του κλειστού μοναδιαίου δίσκου με τη  $F$  να είναι η συρρίκνωση. Άρα ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$F_* : \pi_1(D^2[0, 1]) \rightarrow \pi_1(S^1)$$

είναι επί σύμφωνα με την Πρόταση 4.0.2 συνεπώς υπάρχει επιμορφισμός  $F_*$ :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D^2[0, 1]) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(S^1) \\ \parallel & & \parallel \\ \{e\} & & (\mathbb{Z}, +) \end{array}$$

Το οποίο είναι προφανώς άτοπο. Το μόνο που μένει είναι να δείξουμε ότι η απεικόνιση  $F$  που κατασκευάσαμε είναι συνεχής, κάτι που αναγκαστικά θα γίνει αλγεβρικά. Έστω δύο σημεία  $x, y \in D^2[0, 1]$  όπου  $x \neq y$ . Η ευθεία μεταξύ τους είναι

$$r(x, y) = y + t(x - y) \text{ για } t \in \mathbb{R}$$

Η συνθήκη που απαιτούμε είναι το  $r(x, y)$  είναι σημείο του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή

$$\|r(x, y)\| = 1 \Rightarrow t^2\|x - y\|^2 + 2t\langle(x - y), y\rangle + \|y\|^2 - 1 = 0$$

Το παραπάνω πολυώνυμο ως προς  $t$  έχει δύο λύσεις

$$t_{\pm} = \frac{-2\langle(x - y), y\rangle \pm \sqrt{4\langle(x - y), y\rangle^2 - 4\|x - y\|^2(\|y\|^2 - 1)}}{2\|x - y\|^2}$$

Από αυτές επιλέγουμε την  $t_+$  καθώς αυτή αντιπροσωπεύει το σημείο τομής της ευθείας  $r(x, y)$  με τον  $\mathbb{S}^1$  με φορά από το  $y$  προς το  $x$ . Για να είμαστε τυπικά σωστοί έχουμε την απεικόνιση:

$$H : D^2[0, 1] \times D^2[0, 1] - \{(x, x) : x \in D^2[0, 1]\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ όπου } H(x, y) = y + t_+(x - y)$$

Από τη συνέχεια την τοπολογία γινομένου, τη νόρμας στον  $\mathbb{R}^2$ , του εσωτερικού γινομένου στον  $\mathbb{R}^2$  και των πολυωνυμικών συναρτήσεων έχουμε ότι η  $H$  είναι συνεχής συνάρτηση. Τέλος, έχουμε ότι  $f(x) \neq x$  για κάθε  $x \in D^2[0, 1]$  (εξ' υποθέσεως) άρα μπορούμε να συνθέσουμε τη  $H$  με την  $(x, f(x))$  και να πάρουμε τη  $F$ . Δηλαδή έχουμε ότι:

$$F : D^2[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ όπου } F(x) = H(x, f(x))$$

οπότε και η  $F$  θα είναι συνεχής το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Πρόταση 5.0.5.** Έστω  $n > m$  θετικοί φυσικοί αριθμοί. Έστω  $V$  διανυσματικός υπόχωρος, του  $\mathbb{R}^n$ , διάστασης  $m$  και  $W$  το ορθογώνιο συμπλήρωμα του δηλαδή έχουμε ότι  $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ . Τότε,

$$\mathbb{R}^n - V \cong V \times (W - \{0_n\})$$

Να σημειωθεί ότι ο  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{F} = \mathbb{R})$  είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Δηλαδή οι πράξεις πρόσθεσης διανυσμάτων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι συνεχείς με την τοπολογία του  $\mathbb{R}^n$  και την τοπολογία γινομένου, καθώς ορίζονται από τα γινόμενα  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  και  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Οπότε ο ομοιομορφισμός που θα δείξουμε αφορά την τοπολογική-διανυσματική δομή που περιγράψαμε.

**Απόδειξη.** Αρχικά είναι γνωστό αποτέλεσμα από τη γραμμική άλγεβρα ότι αν  $\mathbb{X} = V \oplus W$  τότε  $V \cap W = \{0_x\}$  και κάθε  $x \in X$  γράφεται  $x = v + w$  ( $v \in V$  και  $w \in W$ ) με μοναδικό τρόπο. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$F : \mathbb{R}^n - V \rightarrow V \times (W - \{0_n\}) \text{ όπου } x = v + w \mapsto F(x) = (x - w, x - v) = (v, w)$$

Η  $F$  είναι 1-1 διότι κάθε  $x \in X$  γράφεται με μοναδικό τρόπο ως  $x = v + w$  και είναι επί διότι κάθε ζεύγος  $v, w$  ορίζουν ένα  $x \in X$ . Επιπλέον, έχουμε ότι αν  $F(x) = (v, 0)$  τότε  $(x - w, x - v) = (v, 0)$  οπότε  $x - v = 0$  οπότε  $x = v \in V$  το οποίο είναι άτοπο διότι το πεδίο ορισμού της  $F$  είναι το  $X - V$ . Επιπλέον, η  $F$  είναι συνεχής διότι οι πράξη πρόσθεσης διανυσμάτων είναι συνεχής οπότε οι συνηστώσεις της  $F$  είναι συνεχείς απεικονίσεις. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$G : V \times (W - \{0_n\}) \rightarrow X - V \text{ όπου } (v, w) \mapsto v + w = x \in X - V$$

είναι συνεχής αντίστροφη της  $F$ . Η  $G$  είναι συνεχής διότι είναι περιορισμός της πρόσθεσης διανυσμάτων που είναι συνεχής απεικόνιση. Τέλος έχουμε ότι:

$$(G \circ F)(x) = G(x - w, x - v) = x - w + x - v = 2x - (v + w) = 2x - x = x$$

και

$$(F \circ G)(v, w) = F(v + w) = (v + w - w, v + w - v) = (v, w)$$

Οπότε ισχύει ότι  $G = F^{-1}$  και ότι οι  $F, G = F^{-1}$  είναι συνεχείς απεικονίσεις. Οπότε η  $F$  είναι ομοιομορφισμός. □

**Παρατήρηση 5.0.4.** Παρακάτω θα εφαρμόσουμε την παραπάνω πρόταση με στόχο να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα του  $\mathbb{R}^n$  πλην του υποχώρου του  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Για να είμαστε σωστοί πρέπει να πούμε ότι όταν γράφουμε  $\mathbb{R}^{n-2} \leq \mathbb{R}^n$  εννοούμε την εμφύτευση  $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\} \times \{0\} \leq \mathbb{R}^n$ . Είναι σαν να βλέπουμε μία ευθεία στον  $\mathbb{R}^3$  ως τους πραγματικούς αριθμούς. Με τη σύμβαση που κάναμε έχουμε ότι  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \oplus \mathbb{R}^2$  όπου  $\mathbb{R}^2 = \{0\} \times \{0\} \cdots \times \{0\} \times \mathbb{R}^2$  με  $n - 2$  το πλήθος μηδενικά. Προφανώς, οι εμφυτεύσεις που κάναμε είναι ομοιομορφικές με τα αρχικά σύνολα.

**Πρόταση 5.0.6.** Έστω  $n \geq 3$ . Τότε έχουμε ότι  $\pi_1(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}) \cong (\mathbb{Z}, +)$

Απόδειξη. Αρχικά από την Πρόταση 5.0.5 έχουμε ότι ο τοπολογικός χώρος  $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}$  είναι δρομοσυνεχτικός ως ομοιόμορφος με γινόμενο δρομοσυνεχτικών τοπολογικών χώρων οπότε από την Πρόταση 2.0.4 έχουμε ανεξαρτησία από το βασικό σημείο. Από την Παρατήρηση 5.0.4 και την Πρόταση 5.0.5 έχουμε ότι:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n-2} \times (\mathbb{R}^2 - \{0_n\}))$$

οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος 4.0.3 έχουμε:

$$\pi_1(\mathbb{R}^{n-2} \times (\mathbb{R}^2 - \{0_n\})) = \pi_1(\mathbb{R}^{n-2}) \times \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0_n\})$$

Επιπλέον είναι προφανές ότι  $\{0\} \times \{0\} \cdots \times \{0\} \times \mathbb{R}^2 - \{0_n\} \cong \mathbb{R}^2 - \{0_2\}$ . Από την Πρόταση 5.0.3 και το Παράδειγμα 2.0.3 έχουμε:

$$\pi_1(\mathbb{R}^{n-2}) \times \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0_2\}) \cong \{e\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Συνολικά έχουμε ότι:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}) \cong \mathbb{Z}$$

□

# Κεφάλαιο 6

## Το θεώρημα Seifert-Van Kampen

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το θεώρημα Seifert-Van Kampen. Όπως θα δούμε μόνο η διατύπωση του απαιτεί αρκετή προεργασία στις ελεύθερες ομάδες όμως το αποτέλεσμα πολύ σημαντικό στον υπολογισμό πιο σύνθετων θεμελιώδων ομάδων. Μία πολύ σημαντική ιδέα για αυτά που θα ακολουθήσουν είναι ότι η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι κυκλική και παράγεται από ένα στοιχείο, το 1 ή αντίστοιχα το  $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ . Όπως θα δούμε, θα κάνουμε μία πολύ ισχυρή γενίκευση του Θεωρήματος 4.0.4. Τέλος, μία παρατήρηση που μας οδηγεί στο να μελετήσουμε τη θεμελιώδη ομάδα από τη σκοπιά των ελεύθερων ομάδων είναι ότι η σύνθεση δρόμων είναι επί της ουσίας παράθεση στη διαγραφή τους. Η πορεία που θα ακολουθήσουμε είναι από τα [7],[8] και [10]. Θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη εισαγωγή στην έννοια της ελεύθερης ομάδας και του ελεύθερου γινομένου χωρίς να δώσουμε μεγάλη σημασία στις αποδείξεις και στις λεπτομέρειες.

**Ορισμός 6.0.1.** Έστω  $A$  ένα σύνολο. Μία **λέξη**  $w$  στο  $A$  είναι μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του. Δηλαδή,

$$w = (s_1, \dots, s_n) \text{ ή } w = s_1 s_2 \dots s_n$$

Με  $W(A)$  συμβολίζουμε το σύνολο των λέξεων στο  $A$ . Θεωρούμε το σύνολο  $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ . Μία **ανηγμένη λέξη** στο  $A \cup A^{-1} = \{a^{\pm 1} : a \in A\}$  είναι μία λέξη που δεν περιέχει υπολέξεις (δηλαδή διαδοχικά στοιχεία) της μορφής  $a_i a_i^{-1}$  και  $a_i^{-1} a_i$ .

**Παρατήρηση 6.0.1.** Να σημειωθεί ότι με βάση τον παραπάνω συμβολισμό ταυτίζουμε τα στοιχεία  $a$  και  $a^{+1}$ . Εφόσον αναφερόμαστε σε τυχαία σύνολα χωρίς κάποια αλγεβρική δομή το στοιχείο  $a^{+1}$  δεν έχει κάποια ουσία οπότε πρέπει να σημειωθεί ότι έχουμε θεωρήσει το σύνολο  $A^{+1} = \{a^{+1} : a \in A\}$  και το ταυτίζουμε με το  $A$ . Για παράδειγμα, η λέξη  $aa = w = (a, a) \equiv (a^{+1}, a^{+1}) = a^{+1}a^{+1}$  συμβολίζεται με  $a^2$ . Η παραπάνω διευκρίνιση είναι σημαντική όταν θα μιλήσουμε για ελεύθερη ομάδα πάνω σε σύνολο και για λέξεις πάνω σε ομάδες καθώς ο συμβολισμός είναι συμβατός με τον ορισμού του στοιχείου  $a^n = a \dots a$ .

Συνεχίζουμε με δύο σημαντικές κατασκευές.

**Ορισμός 6.0.2 (Ελεύθερη Ομάδα με δύο γεννήτορες).** Ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες είναι η ομάδα:

$$\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle = \{W : w \text{ ανηγμένη λέξη στα } a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$$

Όπου η πράξη ορίζεται ως εξής:

1. Αν  $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_2$ , τότε το γινόμενο  $w_1 \cdot w_2$  είναι η ανηγμένη λέξη που παίρνουμε  $w_1 w_2$  με διαδοχικές απλοποιήσεις. Δηλαδή αφαιρούμε τα στοιχεία που καθιστούν τη λέξη μη ανηγμένη. Για παράδειγμα  $w_1 = aba^{-1}b$ ,  $w_2 = b^{-1}a^2b^{-1}$  τότε η λέξη είναι  $w_1 w_2 = aba^{-1}bb^{-1}a^2b^{-1}$  οπότε μετά από απλοποίηση (δηλαδή αφού αφαιρέσουμε υπολέξεις του τύπου  $aa^{-1}$ ,  $a^{-1}a$ ,  $b^{-1}b$  και  $bb^{-1}$ ) θα πάρουμε τη λέξη  $w_1 \cdot w_2 = abab^{-1}$ .
2. Το ουδέτερο στοιχείο της  $\mathbb{F}_2$  είναι η κενή λέξη

3. Αντίστροφο στοιχείο μιας λέξης  $w$  είναι η λέξη  $u$  όπου έχει όλα τα στοιχεία της  $w$  με αντίθετο εκθέτη με αντίθετη σειρά. Για να είμαστε τυπικοί, αν  $w = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  όπου  $g_i \in \{a^{+1}, a^{-1}, b^{+1}, b^{-1}\}$  τότε η  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  όπου: Αν  $w_i = a$  τότε  $u_{n+1-i} = a^{-1}$ , αν  $w_i = a^{-1}$  τότε  $u_{n+1-i} = a$ , αν  $w_i = b$  τότε  $u_{n+1-i} = b^{-1}$  και αν  $w_i = b^{-1}$  τότε  $u_{n+1-i} = b$ . Για παράδειγμα, αν  $w = (a, b, b, a, b^{-1}) = ab^2ab^{-1}$  τότε η αντίστροφη είναι  $u = (b, a^{-1}, b^{-1}, b^{-1}, a^{-1}) = ba^{-1}b^{-2}a^{-1}$ . Όπως βλέπουμε αν ξεκινήσουμε τις απλοποιήσεις στις λέξεις  $wu$  και  $uw$  (για να υπολογίσουμε τα γινόμενα  $w \cdot u$  και  $u \cdot w$ ) θα καταλήξουμε στην κενή λέξη.

4. Η προσεταιριστικότητα θα αποδειχθεί στην Πρόταση 6.0.1.

Με παρόμοιο μπορούμε να ορίσουμε την ελεύθερη ομάδα με  $n$  γεννήτορες, η οποία συμβολίζεται με  $\mathbb{F}_n = \langle a_1, a_2 \dots a_n \rangle$

**Πρόταση 6.0.1.** Έστω  $(G_a)_{a \in I}$  μία οικογένεια ομάδων. Μία λέξη  $w = g_1 g_2 \dots g_n$  όπου  $g_i \in G_{a_i}$  λέγεται ανηγμένη αν τα στοιχεία  $g_i, g_{i+1}$  ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες και  $g_i \neq 1_{G_a}$  για κάθε  $i$ . Θεωρούμε το σύνολο:

$$\star_{a \in I} G_a = \{w : w \text{ ανηγμένη λέξη στο } \bigsqcup_{a \in I} G_a\}$$

Το σύνολο  $\star_{a \in I} G_a$  με πράξη το γινόμενο λέξεων είναι ομάδα.

Απόδειξη. .

### 1. Πολλαπλασιασμός

Αν  $w = g_1 g_2 \dots g_n, u = h_1 h_2 \dots h_n$  τότε το γινόμενο  $w \cdot u$  είναι ανηγμένη λέξη που προκύπτει από διαδοχικές απλοποιήσεις. Αν τα  $g_n$  και  $h_1$  ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες τότε η λέξη είναι ήδη ανηγμένη. Αν είναι στην ίδια ομάδα  $G_{a_1}$  τότε το στοιχείο  $g_n \cdot_{G_{a_1}} h_1 \in G_{a_1}$  διότι η πράξη της ομάδας  $G_{a_1}$  είναι κλειστή, δηλαδή ισχύει ότι  $g_n \cdot_{G_{a_1}} h_1 = y \in G_{a_1}$  και αντικαθιστούμε στη λέξη  $wu$  το  $g_n h_1$  με το  $y$ . Από εδώ και πέρα θα εννοείται η πράξη της ομάδας στην οποία αναφερόμαστε και θα γράφουμε  $ab$  αντί για  $a \cdot_{G_a} b$  για στοιχεία που ανήκουν στην ίδια ομάδα.

### 2. Ουδέτερο στοιχείο

Ουδέτερο στοιχείο είναι η κενή λέξη, την οποία συμβολίζουμε με 1

### 3. Αντίστροφο στοιχείο

Αν  $w = g_1 g_2 \dots g_n \in \star_{a \in I} G_a$  τότε το αντίστροφο του είναι το  $u = g_n^{-1} g_{n-1}^{-1} \dots g_1^{-1} \in \star_{a \in I} G_a$ . Πράγματι, εύκολα κάποιος βλέπει ότι θα έχουμε διαδοχικές αλληλοεξουδετερώσεις στοιχείων και από το γεγονός ότι  $g_i, g_{i+1}$  ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες προκύπτει ότι και τα αντίστροφα τους θα ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες.

### 4. Προσεταιριστικότητα

Έστω  $u, v, w \in \star_{a \in I} G_a$ . Έστω  $W$  το σύνολο το ανηγμένων λέξεων. Αν  $g \in G_a$  τότε ορίζουμε την απεικόνιση  $L_g : W \rightarrow W$  όπου αν  $w = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  τότε:

$$L_g(w) = \begin{cases} (g, g_1, g_2, \dots, g_n) & , \text{ αν } g \notin G_{a_1} \\ (gg_1, g_2, \dots, g_n) & , \text{ αν } g \in G_{a_1} \text{ και } gg_1 \neq 1 \\ (g_2, g_3, \dots, g_n) & , \text{ αν } g \in G_{a_1} \text{ και } gg_1 = 1 \end{cases}$$

Αν  $g, h \in G_a$  τότε  $L_g h = L_g \circ L_h$  διότι ο πολλαπλασιασμός στην  $G_a$  είναι επιμεριστικός και τα στοιχεία  $g, h$  ανήκουν στην ίδια ομάδα οπότε θα έχουμε έναν από τους κλάδους της  $L$ . Επομένως, η  $L_g$  είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφο:

$$L_g \circ L_{g^{-1}} = L_g g^{-1} = L_1 = id_W$$

Άρα θα είναι 1-1 και επί. Συνεπώς, για κάθε  $g$  ή  $L_g$  είναι μετάθεση των στοιχείων του  $W$  ή  $L_g \in Perm(W)$ . Αν τώρα  $w = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  λέξη μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό μας στη:

$$L : W \rightarrow Perm(W) \quad L_{(g_1, g_2, \dots, g_n)} = L_{g_1} \circ L_{g_2} \circ \dots \circ L_{g_n}$$

η οποία είναι επίσης  $1 - 1$  διότι  $L_w(1) = w$ . Από τη σχέση  $L_{gh} = L_g \circ L_h$  άμεσα παίρνουμε ότι  $L_w u = L_w \circ L_u$ . Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$w(uv) = L_w(1) \circ (L_u(1) \circ L_v(1)) = (L_w(1) \circ L_u(1)) \circ L_v(1) = (wu)v$$

Όπου το τελευταίο βήμα ισχύει διότι η προσεπεριστικότητα ισχύει στην ομάδα μεταθέσεων με πράξη τη σύνθεση.

□

**Παρατήρηση 6.0.2.** Στην απόδειξη του 2.) η γραφή  $g_n^{-1}$  έχει νόημα διότι τα στοιχεία ανήκουν σε ομάδα. Ιδανικά θα γράφαμε το ίδιο στην απόδειξη 6.0.2 αλλά σε εκείνη την περίπτωση δεν μπορούσαμε να ορίσουμε την έκφραση  $(a^{-1})^{-1}$  οπότε διακρίναμε περιπτώσεις.

**Ορισμός 6.0.3.** Το σύνολο  $\star_{a \in I} G_a$  με τον πολλαπλασιασμό που ορίσαμε στη 6.0.1 ονομάζεται **ελεύθερο γινόμενο** των  $G_a$ . Αν  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  τότε γράφουμε  $G_1 \star G_2 \cdots G_n$ .

**Ορισμός 6.0.4.** Έστω  $S$  σύνολο. Θεωρούμε τις κυκλικές ομάδες  $\langle s_i \rangle$  για κάθε  $s_i \in S$ . Ως **ελεύθερη ομάδα με βάση το  $S$**  ορίζεται το ελεύθερο γινόμενο:

$$\mathbb{F}(S) = \star_{s_i \in I} \langle s_i \rangle$$

Το σύνολο  $S$  ονομάζεται **βάση** της  $\mathbb{F}(S)$  και ο πληθικός αριθμός του  $S$  ονομάζεται **βαθμός** της  $\mathbb{F}(S)$ .

**Παρατήρηση 6.0.3.** Αν το  $S$  είναι πεπερασμένο (δηλ.  $|S| = n$ ) τότε από τον ορισμό προκύπτει ότι  $\mathbb{F}(S) \cong \mathbb{F}_n$ .

Παρακάτω παραθέτουμε μία σημαντική ιδιότητα του ελεύθερου γινομένου, χωρίς όμως να την αποδείξουμε ή οποία είναι γνωστή ως **καθολική ιδιότητα** του ελεύθερου γινομένου.

**Πρόταση 6.0.2.** Έστω  $(G_a)_{a \in I}$  οικογένεια ομάδων και ομομορφισμοί  $\phi_a : G_a \rightarrow G$  τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός  $\phi : \star_{a \in I} G_a \rightarrow G$  που κάνει τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά για κάθε  $a$ :

$$\begin{array}{ccc} G_a & \xrightarrow{i_a} & \star_{a \in I} G_a \\ & \searrow \phi_a & \swarrow \phi \\ & G & \end{array}$$

όπου  $i_a$  είναι οι εγκλεισμοί  $G_a \xrightarrow{i_a} \star_{a \in I} G_a$

**Πόρισμα 6.0.1.** Αν  $\phi : S \rightarrow G$  απεικόνιση τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\bar{\phi} : \mathbb{F}(S) \rightarrow G$$

όπου  $\bar{\phi}(s) = \phi(s)$ , για κάθε  $s \in S$ . Για να είμαστε ακριβείς εννοούμε την κανονική εμφύτευση του  $S$  στο  $\mathbb{F}(S)$

**Πρόταση 6.0.3.** Κάθε ομάδα είναι πηλίκο ελεύθερης ομάδας.

**Απόδειξη.** Έστω ομάδα  $G$ . Θεωρούμε την  $\mathbb{F}(G)$  και  $\phi : G \rightarrow G$  όπου  $\phi(g) = g$  για κάθε  $g \in G$ . Τότε από το Πόρισμα 6.0.1 έχουμε ότι υπάρχει επιμορφισμός  $\bar{\phi} : \mathbb{F}(G) \rightarrow G$ . Συνεπώς, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε:

$$G \cong \mathbb{F}(G) / \text{Ker}(\bar{\phi})$$

□

**Ορισμός 6.0.5.** Μία ομάδα  $G$  θα λέγεται πεπερασμένα παραγόμενη αν είναι ισόμορφη με πηλίκο της  $\mathbb{F}_n$  για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$

**Ορισμός 6.0.6.** Η παράσταση  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n | r_1, r_2, \dots, r_l, \dots \rangle$ , όπου τα  $r_i$  είναι λέξεις στα  $a_i^{\pm 1}$ , είναι μία **αναπαράσταση** της  $G$  αν  $G \cong \mathbb{F}_n/N$  όπου η  $N$  είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της  $\mathbb{F}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  που περιέχει τα στοιχεία  $\{r_1, \dots, r_l, \dots\}$ . Η  $N$  συμβολίζεται με  $N = \langle\langle r_1, \dots, r_l, \dots \rangle\rangle$  και τα  $r_i$  λέγονται **σχέσεις** της  $G$  και γράφουμε  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n | r_1, r_2, \dots, r_l, \dots \rangle$ . Αν επιπλέον οι σχέσεις είναι πεπερασμένες, δηλαδή  $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | r_1, r_2, \dots, r_l \rangle$  τότε η  $G$  λέγεται **πεπερασμένα παριστώμενη**.

**Παράδειγμα 6.0.1.** Θα βρούμε μία αναπαράσταση της  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Από τη θεωρία των αβελιανών ομάδων και την ταξινόμηση τους η χαρακτηριστική ιδιότητα της  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  είναι ότι είναι η αβελιανή ομάδα με δύο γεννήτορες. Οπότε κάποιος αναμένει μία αναπαράσταση του τύπου,  $\langle a_1, a_2 | r_1 \rangle$  όπου η σχέση  $r_1$  πρέπει να εκφράζει την αντιμεταθετικότητα. Ο κλασσικός τρόπος να την περιγράψουμε είναι  $xy = yx$  όμως η παραπάνω έκφραση δεν είναι λέξη (δηλ. σχέση). Αυτό το πρόβλημα λύνεται εύκολα διότι  $xy = yx \iff xyx^{-1}y^{-1} = 1$  οπότε μία καλή υποψήφια αναπαράσταση είναι  $\langle a_1, a_2 | a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1} \rangle$ . Πράγματι, ορίζουμε  $\phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  με  $\phi(a_1) = (1, 0)$  και  $\phi(a_2) = (0, 1)$ . Έστω  $N = \langle\langle a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1} \rangle\rangle$ . Παρατηρούμε ότι

$$\phi(a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}) = \underbrace{\phi(a_1)\phi(a_2)\phi(a_1^{-1})\phi(a_2^{-1})}_{\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = (0, 0) = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

Άρα άμεσα προκύπτει ότι  $\langle\langle a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1} \rangle\rangle \subset \text{Ker}(\phi)$ . Από την άλλη πλευρά έστω  $w \in \text{Ker}(\phi)$  Το  $w$  είναι της μορφής  $w = a_1^{k_1}a_2^{l_1}a_1^{k_2} \dots a_1^{k_n}a_2^{l_n}$  και  $w \in \text{Ker}(\phi)$  οπότε:

$$1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = (0, 0) = \phi(w) = \phi(a_1^{k_1})\phi(a_2^{l_1})\phi(a_1^{k_2}) \dots \phi(a_1^{k_n})\phi(a_2^{l_n}) = (k_1 + \dots + k_n, l_1 + \dots + l_n)$$

Άρα  $k_1 + \dots + k_n = 0$  και  $l_1 + \dots + l_n = 0$ . Επιπλέον, στην  $\mathbb{F}_2/N$  ισχύει ότι  $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1} = 1$  άρα  $a_1a_2 = a_2a_1$  άρα το  $w$  γίνεται  $w = a_1^{k_1+\dots+k_n}a_2^{l_1+\dots+l_n} = 1$ . δηλαδή  $w \in \text{κλάση}(1)$  στην  $\mathbb{F}_2/N$  άρα  $w \in N$ . Οπότε  $N = \text{Ker}(\phi)$ . Συνεπώς, η αναπαράσταση  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a_1, a_2 | a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1} \rangle$  είναι εύστοχη.

**Παρατήρηση 6.0.4.** Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται ότι η σχέση  $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}$  ως προς πηλίκο που παίρνουμε από τον ορισμό μπορεί να είναι ισοδύναμη με μία ισότητα οπότε πολλές φορές για να είναι πιο ξεκάθαρα τα πράγματα γράφουμε  $a_1a_2 = a_2a_1$  ως σχέση. Το παραπάνω είναι κατάχρηση του συμβολισμού αλλά δεν αποτελεί πρόβλημα.

**Παράδειγμα 6.0.2.** Παρακάτω παραθέτουμε μία λίστα από παραδείγματα αναπαραστάσεων κλασσικών ομάδων.

- Η ελεύθερη ομάδα με βάση το  $S$  δεν έχει περιορισμούς οπότε  $\langle S | \emptyset \rangle$
- Η κυκλική ομάδα τάξης  $n$  έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι  $a^n = 1$  οπότε μία αναπαράσταση της είναι  $\langle a | a^n = 1 \rangle$
- Μία αναπαράσταση της διεδρικής ομάδας  $D_{2n}$  τάξης  $2n$  είναι η  $\langle a_1, a_2 | a_1^2 = a_2^n = 1 \rangle$
- Μία αναπαράσταση της ομάδας  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  είναι η  $\langle a_1, a_2 | a_1a_2 = a_2a_1 \rangle$
- Μία αναπαράσταση της ομάδας  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  είναι  $\langle a_1, a_2 | a_1^n = 1, a_2^m = 1, a_1a_2 = a_2a_1 \rangle$
- Μία αναπαράσταση της modular ομάδας είναι  $\langle a_1, a_2 | a_1^2 = 1, (a_1a_2)^3 = 1 \rangle$

**Ορισμός 6.0.7.** Αν  $N \triangleleft G$  και  $A \subset N$  τέτοια ώστε κάθε στοιχείο να γράφεται σαν γινόμενο συζυγών στοιχείων του  $A$ , τότε λέμε ότι το  $A$  **παράγει κανονικά** την  $N$  και την ελάχιστη κανονική υποομάδα της  $G$  που περιέχει το  $A$  θα λέγεται **κανονική θήκη** (normal closure, συμβ.  $ncl_G(A)$ ).

Θυμίζουμε ότι δύο στοιχεία  $a, b$  μιας ομάδας  $G$  λέγονται συζυγή όταν **υπάρχει**  $g \in G$  τέτοιο ώστε  $a = gbg^{-1}$  και η σχέση  $\sim \iff a, b$  συζυγή είναι σχέση ισοδυναμίας σε μία ομάδα.

Πριν συνεχίσουμε με τη διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος Seifert-Van Kampen θα κάνουμε μερικές διευκρινήσεις που αφορούν τη σύνθεση δρόμων και θα αποδείξουμε ένα σημαντικό Λήμμα.

**Παρατήρηση 6.0.5.** Η σύνθεση δρόμων όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 δεν είναι πολύ εύχρηστη όταν αντιμετωπίζουμε γινόμενα παραπάνω από δύο δρόμων διότι το  $I$  υποδιαιρείται σε διαστήματα μήκους  $1/2, 1/4, \dots, 1/2^n, 1/2^n$ . Για παράδειγμα, στη σύνθεση τριών δρόμων είχαμε διαστήματα μήκους  $1/2, 1/4, 1/4$ . Θα ήταν πιο βολικό αν είχαμε γινόμενο  $n$  δρόμων να μπορούσαμε να το ορίσουμε σε διαστήματα μήκους  $1/n$ , πιο συγκεκριμένα να είχαμε μια έκφραση:

$$g = \begin{cases} f(ns) & s \in [0, 1/n] \\ f(ns - 1) & s \in [1/n, 2/n] \\ \vdots \\ f(ns - i) & s \in [i/n, (i+1)/n] \\ \vdots \\ f(ns - (n-2)) & s \in [(n-2)/n, (n-1)/n] \\ f(ns - (n-1)) & s \in [(n-1)/n, 1] \end{cases}$$

Με κατάλληλη ανακαταμέτρηση η οποία θα στέλνει κάθε διάστημα τύπου  $[1/2^{i+1}, 1/2^i] \xrightarrow{a} [i/n, (i+1)/n]$  μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$g \sim f_1 * f_2 \cdots f_{n-1} * f_n$$

**Λήμμα 6.0.1.** Έστω  $F : I \times I \rightarrow X$  μίας συνεχής απεικόνιση και  $f, g, h, k : I \rightarrow$  οι δρόμοι που ορίζονται ως:

$$f(s) = F(s, 0) \quad g(s) = F(1, s) \quad h(s) = F(0, s) \quad k(s) = F(s, 1)$$

Τότε ισχύει ότι  $f * g \sim h * k$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση  $G : I \times I \rightarrow X$  όπου

$$G(s, t) = \begin{cases} F(2s, \frac{st}{t-1}) & \text{αν } s \in [0, 1/2] \text{ και } t \in [0, 1) \\ F(0, 2s) & \text{αν } s \in [0, 1/2] \text{ και } t = 1 \\ F(2s - 1, \frac{s-1+t(2-s)}{t}) & \text{αν } s \in [1/2, 1] \text{ και } t \in (0, 1] \\ F(1, 2s - 1) & \text{αν } s \in [1/2, 1] \text{ και } t = 0 \end{cases}$$

Η  $G$  λόγω του Λήμματος 1.0.1 είναι συνεχής και  $G(s, 0) = f * g(s)$  και  $G(s, 1) = h * k(s)$ . □

Συνεχίζουμε με τη διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος Seifert-Van Kampen για την περίπτωση δύο ανοικτών συνόλων. Για αυτά που θα ακολουθήσουν ξεκινάμε με τις παρακάτω παρατηρήσεις.

Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $U, V$  ανοικτά δρομοσυνεχτικά σύνολα τέτοια ώστε  $X = U \cup V$  και  $U \cap V \neq \emptyset$  δρομοσυνεχτικό σύνολο. Οι εγχλισμοί  $U \xrightarrow{k} X$  και  $V \xrightarrow{l} X$  επάγουν ομομορφισμούς  $k_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$  και  $l_* : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$ . Άρα από την Πρόταση 6.0.2 υπάρχει ομομορφισμός  $\phi : \pi_1(U) * \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$  με  $\phi \upharpoonright_{\pi_1(U)} = k_*$  και  $\phi \upharpoonright_{\pi_1(V)} = l_*$ . Επιπλέον, θεωρούμε τους εγχλειςμούς  $U \cap V \xrightarrow{i} U$  και  $U \cap V \xrightarrow{j} V$  οι οποίοι επάγουν ομομορφισμούς  $i_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$  και  $j_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V)$ . Σε διαγραμματική μορφή έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \pi_1(U) \\ & \nearrow i & & \searrow k & \nearrow i_* \\ U \cap V & & & & \pi_1(U \cap V) \\ & \searrow j & & \nearrow l & \searrow j_* \\ & & V & & \pi_1(V) \end{array} \xrightarrow{(\cdot)_*} \begin{array}{ccc} & \pi_1(U) & \\ i_* \nearrow & & \searrow k_* \\ \pi_1(U \cap V) & & \pi_1(X) \\ j_* \searrow & & \nearrow l_* \\ & \pi_1(V) & \end{array}$$

και η  $\Phi$  λόγω της καθολικής ιδιότητας καθιστά το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U) & & \\ & \nearrow i_* & \downarrow & \searrow k_* & \\ \pi_1(U \cap V) & & \pi_1(V) * \pi_1(V) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X) \\ & \searrow j_* & \uparrow & \nearrow l_* & \\ & & \pi_1(V) & & \end{array}$$

**Θεώρημα 6.0.1 (Seifert-Van Kampen).** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι  $U, V \subset X$  είναι δύο ανοικτά υποσύνολα του  $X$  τέτοια ώστε  $X = U \cup V$  με τα  $U, V, U \cap V$  δρομοσυνεκτικά σύνολα. Έστω  $p \in U \cap V$ . Ορίζουμε το σύνολο:

$$C = \{(i_*(\gamma))(j_*(\gamma))^{-1} : \gamma \in \pi_1(U \cap V, p)\} \subset \pi_1(U, p) * \pi_1(V, p)$$

Τότε ο ομομορφισμός  $\Phi : \pi_1(U, p) * \pi_1(V, p) \rightarrow \pi_1(X, p)$  είναι επί και ο πυρήνας παράγεται κανονικά από τα στοιχεία του  $C$  (πιο συγκεκριμένα ο πυρήνας είναι η κανονική θήκη  $N = ncl(C)$ ).

Απόδειξη. Επειδή στην παρακάτω απόδειξη θα θεωρήσουμε δρόμους ή ομοτοπίες σε διαφορετικούς χώρους θα βελτιώσουμε τον συμβολισμό μας ώστε να είναι ξεκάθαρα τα πράγματα. Αν  $a, b$  ομοτοπικοί δρόμοι στους χώρους  $X, U, V, U \cap V$  θα συμβολίζουμε :

$$a \sim_X b \quad a \sim_U b \quad a \sim_V b \quad a \sim_{U \cap V} b$$

Ομοίως για τις κλάσεις ομοτοπίας σε διαφορετικές ομάδες θα γράφουμε  $[a]_U$  αν χρειάζεται. Για παράδειγμα,  $[a] \in \pi_1(U, p)$ . Ο επιπλέον συμβολισμός που πρέπει να σημειωθεί είναι στο ελεύθερο γινόμενο ομάδων που θα συμβολίζεται το αστέρι  $*$ . Η  $\Phi$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\Phi([a_1]_U * [a_2]_V * \cdots * [a_m]_V) = k_*[a_1]_U \cdot l_*[a_2]_V \cdots l_*[a_m]_V = [a_1]_X \cdots [a_m]_X = [a_1 \cdots a_m]_X$$

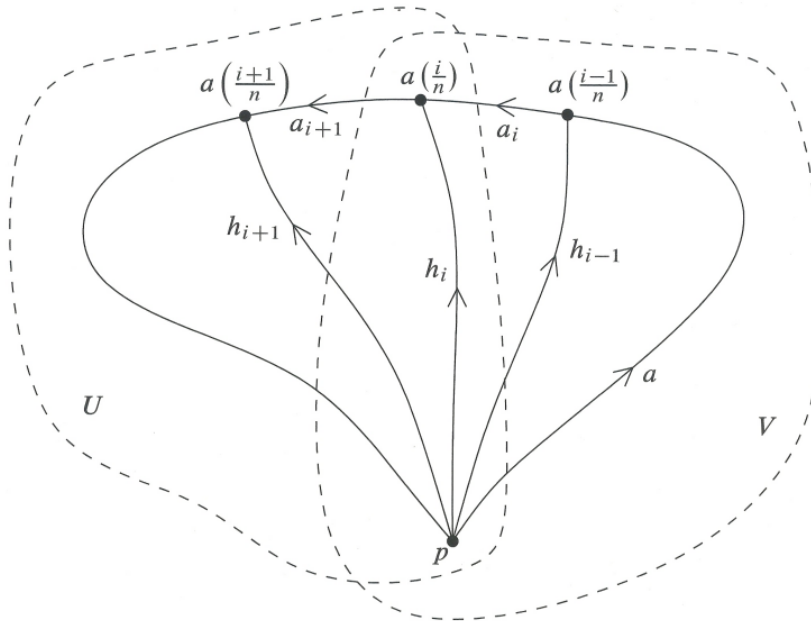
**Βήμα 1:** Η  $\Phi$  είναι επί. Έστω  $[f] \in \pi_1(X, p)$  τότε  $f : I \rightarrow X = U \cup V$  οπότε  $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$  είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου  $I$  (που είναι υπόχωρος μετρικού χώρου) συνεπώς από το Λήμμα 1.0.2 υπάρχει  $\delta > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $A \subset I$  με  $diam(A) \leq \delta$  να ισχύει  $f(A) \subset U$  ή  $f(A) \subset V$ . Αν επιλέξουμε  $n \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $1/n \leq \delta$  προκύπτει μία διαμέριση  $x_i = i/n$  για κάθε  $i = 0, 1, \dots, n$  τέτοια ώστε  $diam(x_i, x_{i+1}) = 1/n \leq \delta$  οπότε αν συμβολίσουμε με  $a_i$  τον περιορισμό  $a_i := f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ . Από την Παρατήρηση 6.0.5 έχουμε ότι:

$$[a]_X = [a_1 * a_2 \cdots a_n]_X$$

Αν τώρα  $a(i/n)$  ανήκει στο  $U, V$  ή  $U \cap V$  θεωρούμε δρόμο  $h_i$  από το  $p$  στο  $a(i/n)$  ο οποίος υπάρχει διότι τα σύνολα  $U, V, U \cap V$  είναι δρομοσυνεκτικά. Θέτουμε  $a'_i = h_{i-1} * a_i * \bar{h}_i$  θεωρώντας  $h_0 = h_n = e_{x_0}$  και έχουμε ότι:

$$[a]_X = [a'_1 * a'_2 \cdots a'_n]_X$$

Για παραπάνω λεπτομέρειες βλ.4.0.4. Αν τώρα έχουμε διαδοχικούς δρόμους  $a'_i$  μόνο σε ένα από δύο



Σχήμα 6.1: Σύνθεση σε κλειστούς δρόμους

σύνολα παίρνουμε τη σύνθεση τους μέχρι να βρεθεί κάποιος που να ανήκει στο άλλο σύνολο, τη συμβολίζουμε με  $h_i$  και συνεχίζουμε ομοίως. Μετά από αυτή την ομαδοποίηση καταλήγουμε με δρόμους  $h_i$

για  $i = 1, \dots, k \leq n$  τέτοιους ώστε διαδοχικοί δρόμοι να ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι  $h_1 \in \pi_1(U, p)$  και θεωρούμε το στοιχείο:

$$b = [h_1]_U \star [h_2]_V \star \dots \star [h_{k-1}]_U \star [h_k]_V \in \pi_1(U, p) \star \pi_1(V, p)$$

Επιπλέον ισχύει ότι  $a \sim_X a_1 * a_2 \dots a_n \sim_X h_1 * h_2 \dots h_k$ . Άρα

$$\begin{aligned} \Phi(b) &= \phi([h_1]_U \star [h_2]_V \star [h_{k-1}]_U \star [h_k]_V) = [h_1]_U \cdot [h_2]_V \dots [h_k]_V = [h_1 * h_2 \dots h_k]_X = \\ &= [a_1 * a_2 \dots a_n]_X = [a]_X \end{aligned}$$

Οπότε η  $\Phi$  είναι επί.

**Βήμα 2:** Θα δείξουμε ότι  $C \subset \text{Ker}(\Phi)$ . Από την κατασκευή της  $\Phi$  (μέσω των κανονικών επαγόμενων ομομορφισμών) έχουμε ότι αν  $\gamma = [a]_{U \cap V}$  τότε:

$$\Phi(i_*(\gamma)j_*(\gamma)^{-1}) = \Phi([a]_V \star [\bar{a}]_V) = [a * \bar{a}] = [e_p] = 1$$

Συνεπώς  $N \subset \text{Ker}(\Phi)$  **Βήμα 3:** Έστω

$$a = [a_1]_U \star [a_2]_V \dots \star [a_k]_V \in \pi_1(U, p) \star \pi_1(V, p)$$

Αν  $\Phi(a) = [e_p]$  θα δείξουμε ότι το  $a$  παράγεται κανονικά από το  $C$ . Έχουμε ότι  $\Phi(a) = [e_p]$  συνεπώς

$$a_1 * a_2 \dots a_k \sim_X e_p$$

Έστω  $H : I \times I \rightarrow X$  η ομοτοπία από τον  $a_1 * a_2 \dots a_k$  στον σταθερό δρόμο  $e_p$ . Η  $H : I \times I \rightarrow X = U \cup V$  είναι συνεχής, συνεπώς τα  $H^{-1}(U), H^{-1}(V)$  είναι ανοικτό κάλυμμα του  $I \times I$  που είναι συμπαγής χώρος (και υπόχωρος μετρικού χώρου) συνεπώς από το Λήμμα 1.0.2 υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $A \subset I \times I$  με  $\text{diam}(A) < \delta$  να έχουμε ότι  $H(A) \subset U$  ή  $H(A) \subset V$ . Οπότε για αρκετά μεγάλο  $n \in \mathbb{N}$  η  $H$  να απεικονίζει κάθε τετράγωνο  $S_{i,j} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$  είτε στο  $U$  είτε στο  $V$ . Επιπλέον, επιλέγοντας για  $n$  αρκετά μεγάλη δύναμη του 2 μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι τα τελικά σημεία των  $a_i$  θα είναι της μορφής  $i/n$  και συνεπώς πάνω στη διαμέριση (αυτό διότι στη σύνθεση δρόμων διχοτομούμε διαδοχικά το  $I$  και κάθε  $a_i$  είναι  $a_i : I \rightarrow X$ ). Θέτουμε  $u_{i,j} = H(i/n, j/n)$  (εικόνες των κορυφών),  $a_{i,j} = H|_{[(i-1)/n, i/n] \times \{j/n\}}$  (περιορισμός στο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα του  $S_{i,j}$ ) και  $b_{i,j} = H|_{\{i/n\} \times [(j-1)/n, j/n]}$  (περιορισμός στο κάθετο ευθύγραμμο τμήμα του  $S_{i,j}$ ). Άμεσα προκύπτει ότι ο περιορισμός της  $H$  στην κάτω ακμή του  $I \times I$  είναι ίσος με το γινόμενο  $a_1 * a_2 \dots a_k$ , αφού από τον ορισμό της ομοτοπίας έχουμε ότι  $H(s, t = 0) = a_1 * a_2 \dots a_k$ . Συνεπώς, έχουμε ότι

$$H_0 = a_1 * a_2 \dots a_k \sim (a_{1,0} * a_{2,0} \dots a_{q,0}) * \dots (a_{r,0} * \dots a_{n,0})$$

Στόχος μας είναι να αποσυνθέσουμε τον  $a$  σε ένα γινόμενο του τύπου  $a = [a_{1,0}]_{U \cap V} \star [a_{2,0}]_{U \cap V} \dots$ . Για να πετύχουμε αυτό θα πρέπει καταρχάς να κάνουμε τους παραπάνω δρόμους κλειστούς. Έστω ότι  $u_{i,j} \in U, V, U \cap V$  τότε επιλέγουμε δρόμο  $h_{i,j}$ , από το  $p$  στο  $u_{i,j}$ , ο οποίος θα είναι στο  $U, V, U \cap V$  αντίστοιχα (τέτοιος δρόμος υπάρχει διότι και τα τρία σύνολα είναι δρομοσυνεκτικά). Ορίζουμε τους παρακάτω κλειστούς δρόμους:

$$a'_{i,j} = h_{i-1,j} * a_{i,j} * \bar{h}_{i,j} \text{ και } b'_{i,j} = h_{i,j-1} * b_{i,j} * \bar{h}_{i,j}$$

όπου καθένας από αυτούς βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο  $U$  ή στο  $V$ , ανάλογα με το που βρίσκεται ο  $a_{i,j}$ .

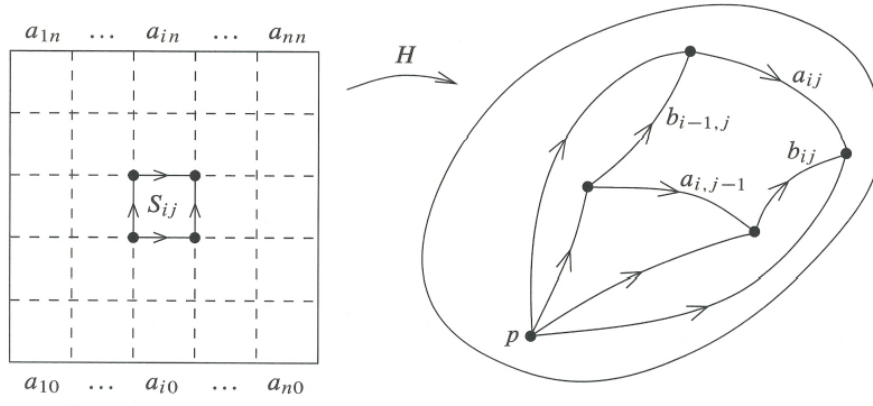
Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$a = [a'_{1,0}] \star [a'_{2,0}] \dots [a'_{n,0}] \quad (3)$$

Θα ήταν αρκετό για να αποδειχθεί ότι η έκφραση (3) του  $a$  μπορεί να αντικατασταθεί modulo(N) (δηλαδή στο πυλῆχο  $(\pi_1(U, p) \star \pi_1(V, p))/N$  όπου  $N$  το σύνολο που παράγεται κανονικά από τα στοιχεία του  $C$ ) με μία παρόμοια έκφραση λαμβανόμενη από τον περιορισμό της  $H$  στην πάνω ακμή του τετραγώνου,

(1)

$$a = [a'_{1,1}] \star \dots \star [a'_{n,1}](\text{mod } N)$$



Σχήμα 6.2: Απεικόνιση του  $S_{i,j}$  μέσω της  $H$

Με πιθανές εναλλαγές των  $U$  ή  $V$  διότι καθώς ανεβαίνουμε το τετράγωνο μπορεί να αλλάξουμε σύνολο. Επαγωγικά έχουμε ότι

$$a = [a'_{1,n}]_U * \cdots * [a'_{n,n}]_V (\text{mod } N)$$

Όμως ολόκληρη η πάνω ακμή του  $I \times I$  απεικονίζεται στο  $p$  (διότι  $H(s, t = 1) = p$ ) οπότε κάθε  $[a'_{i,n}]$  ισούται με τον σταθερό δρόμο. Συνεπώς, το τελευταίο γινόμενο είναι το ουδέτερο στοιχείο στη  $\pi_1(U, p) * \pi_1(V, p)/N$ , δηλαδή  $a \in N$ .

Το μόνο που μένει είναι να αποδείξουμε την (1). Η απόδειξη θα γίνει με την παρακάτω επαγωγική κατασκευή. Υποθέτοντας ότι

$$a = [a'_{1,j-1}]_U * \cdots * [a'_{n,j-1}]_V \text{mod } N$$

Θα δείξουμε ότι  $a$  είναι ισοδύναμο  $\text{mod } N$  με μία έκφραση όπου θα έχει στους δείκτες  $j$  αντί για  $j-1$  και ίσως μερικές εναλλαγές των  $U, V$  σε κάποιους παράγοντες. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν  $w$  είναι ένας κλειστός δρόμος στο  $U \cap V$  τότε:

$$[w]_V * N = ([w]_U * [\bar{w}]_U) * [w]_V * N = [w]_U * ([\bar{w}]_U * [\bar{w}]_V^{-1}) * N = [w]_U * N$$

Επιπλέον για οποιαδήποτε  $x, y$  στο ελεύθερο γινόμενο έχουμε ότι :

$$x * [w]_U * y * N = x * [w]_U * N * y = x * [w]_V * N * y = x * [w]_V * y * N$$

Δηλαδή στους υπολογισμούς  $\text{mod } N$  μπορούμε να εναλλάσσουμε τα στοιχεία της τομής. Θεωρούμε το τετράγωνο  $S_{i,j}$  και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι  $H(S_{i,j})$  απεικονίζεται στο  $V$ . Το σύνορο του  $S_{i,j}$  απεικονίζεται (αν το ακολουθήσουμε κατά την ωρολογιακή φορά) με σημείο εκκίνησης την κάτω αριστερή γωνία στον δρόμο  $(b_{i-1,j} * i_{i,j}) * (\bar{b}_{i,j} * \bar{a}_{i,j-1})$ . Με εφαρμογή του Λήμματος 6.0.1 προκύπτει ομοτοπία στον  $V$  όπου:

$$a_{i,j-1} \sim_V b_{i-1,j} * a_{i,j} * \bar{b}_{i,j}$$

Από τον ορισμό των  $a'_{i,j}$  και  $b'_{i,j}$  και την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$a'_{i,j} = h_{i-1,j-1} * a_{i,j-1} * \bar{h}_{i,j-1} \sim_V h_{i-1,j-1} * b_{i-1,j} * a_{i,j} * \bar{b}_{i,j} * \bar{h}_{i,j-1} \sim_V$$

$$b'_{i-1,j} * a'_{i,j} * \bar{b}'_{i,j}$$

Τώρα επιστρέφουμε στην έκφραση  $[a'_{1,j-1}] * \cdots * [a'_{n,j-1}] \text{mod } N$ . Για κάθε παράγοντα  $[a'_{i,j-1}]_U$  εξετάζουμε αν το τετράγωνο που βρίσκεται ακριβώς από πάνω απεικονίζεται στο  $U$  ή στο  $V$ . Αν απεικονίζεται στο  $V$  τότε το  $a'_{i,j-1}$  θα απεικονίζεται στο  $U \cap V$  άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε με τον παράγοντα  $a'_{i,j-1}$  στο ελεύθερο γινόμενο ( $\text{mod } N$ ). Την ίδια διαδικασία πραγματοποιούμε για κάθε παράγοντα, το τετράγωνο του οποίου απεικονίζεται στο  $U$ . Όμως στην τελευταία σχέση που αποδείξαμε μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε παράγοντα  $[a'_{i,j-1}]_V$  με  $[a'_{i,j-1}]_V = [b_{i-1,j}]_V * [a'_{i,j}]_V * [b'_{i,j}]_V^{-1}$  και ομοίως για  $U$  οπότε συνολικά έχουμε:

$$a = [b'_{0,j}]_U * [a'_{1,j}]_U * [b'_{1,j}]_U * \cdots * [b'_{n-1,j}]_V * [[a'_{n,j}]_V * [b'_{n,j}]_V (\text{mod } N) = [a'_{1,j}] * \cdots * [a'_{n,j}] (\text{mod } N)$$

Όπου παραπάνω κάναμε χρήση του ότι οι ενδιαμέσοι παράγοντες διαγράφονται μεταξύ τους (εναλλάσσοντας τα  $[b'_{i,j}]_V$  με  $[b'_{i,j}]_U$ ) αν χρειαστεί και ότι οι δρόμοι  $b_{0,j'}$  και  $b'_{n,j}$  είναι σταθεροί (διότι  $H(0,t) = H(1,t) = p$  για κάθε  $t \in I$ ). Καταλήξαμε στη μορφή που θέλαμε το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

### Παρατήρηση 6.0.6. .

1. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αν  $X = \bigcup_{a \in A} U_a$  αν τα  $U_a$  είναι ανοικτά και έχουμε μη κενή και δρομοσυνεκτική τομή ανά τρία όμως η απόδειξη είναι πιο περίπλοκη. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει το ελεύθερο γινόμενο  $\star_{a \in A} \pi_1(A_a)$  και ο πυρήνας θα παράγεται κανονικά από στοιχεία της μορφής  $i_{a_1 a_2 *}(w) i_{a_2 a_1 *}(w)$  όπου  $w \in \pi_1(A_{a_1} \cap A_{a_2})$ .
2. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία ο πυρήνας  $\text{Ker} \Phi$  καλείται αγαλμάτωση (amalgamation). Η έννοια της αγαλμάτωσης είναι πιο γενική στα ελεύθερα γινόμενα, και μπορεί να οριστεί γενικά για μία κανονική υποομάδα του ελεύθερου γινομένου αν πάρουμε το πηλίκο όπως στην Πρόταση 6.0.3. Όμως αυτή η προσέγγιση απαιτεί μερικές ακόμα λεπτομέρειες στα ελεύθερα γινόμενα.
3. Όπως είδαμε η απόδειξη στηρίζεται στην καθολική ιδιότητα του ελεύθερου γινομένου που εν γένει είναι μια έννοια της θεωρίας κατηγοριών. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί σε αυτό το πλαίσιο χρησιμοποιώντας την έννοια της ευθείας εικόνας (direct image ή push forward) στο αντιμεταθετικό διάγραμμα που είδαμε πριν αρχίσουμε την απόδειξη.
4. Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα του θεωρήματος Seifert-Van Kampen είναι ότι σε γενικές γραμμές η θεμελιώδης ομάδα μπορεί να μην είναι αβελιανή. Γενικά ορίζονται υψηλότερες ομάδες ομοτοπίας  $\pi_n(X)$  όπου είναι κλάσεις ομοτοπίας απεικονίσεων από τη  $S^n$  στον  $X$ . Για  $n \geq 2$  η  $\pi_n(X)$  είναι πάντα αβελιανή. Η μόνη ομάδα ομοτοπίας που ενδέχεται να μην είναι αβελιανή είναι η  $\pi_1$

**Πόρισμα 6.0.2.** Αν  $X = U \cap V$  όπου  $U, V$  ανοικτά, δρομοσυνεκτικά και  $U \cap V$  απλά συνεκτικό τότε:

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) \star \pi_1(V)$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο πυρήνας είναι τετριμμένος. Αυτό προκύπτει άμεσα διότι αν το  $U \cap V$  είναι απλά συνεκτικό τότε για κάθε  $w \in \pi_1(U \cap V)$  έχουμε  $i_*(w) = 1 = j_*(w)$  οπότε το σύνολο που παράγεται κανονικά από το  $N = \{(i_*(w)(j_*(w))) : w \in \pi_1(U \cap V)\} = \{1\}$  είναι ακριβώς  $\{1\}$ . Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο που παράγεται κανονικά από  $N$  θα έχει στοιχεία της μορφής:

$$\{ghg^{-1} : g \in \pi_1(U) \star \pi_1(V), h \in N\}$$

Όμως  $h = 1$  διότι  $N = \{1\}$  και άρα  $ghg^{-1} = gg^{-1} = 1$   $\square$

Συνεχίζουμε με τρεις τοπολογικές κατασκευές.

**Ορισμός 6.0.8.** Έστω  $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$  μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Έστω:

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

είναι η ξένη ένωση των  $X_i$  και η κανονική  $1 - 1$  απεικόνιση

$$g_i : X_i \rightarrow X$$

όπου  $g_i(x) = (x, i)$ . Το σύνολο  $X$  μπορεί να εφοδιαστεί με την παρακάτω τοπολογία:

$$\mathcal{T}_X = \{U : g_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{X_i} \text{ για κάθε } i \in I\}$$

Ο  $X$  καλείται **ξένη ένωση** (disjoint union) των τοπολογικών χώρων  $X_i$ .

Η παραπάνω κατασκευή μας βοηθάει στο να διαχωρίζουμε τοπολογικούς χώρους που έχουν κοινή τομή. Να σημειωθεί ότι η ξένη ένωση συνόλων ορίζεται γενικά (όπως είδαμε στο ελεύθερο γινόμενο). Στον παραπάνω ορισμό απλώς την εφοδιάσαμε με μία τοπολογία.

**Ορισμός 6.0.9.** Έστω  $(X, \mathcal{T}_X)$  τοπολογικός χώρος και  $\sim$  μία σχέση ισοδυναμίας στο  $X$ . Το σύνολο πηλίκο  $Y = X/\sim$ . Θεωρούμε την κανονική, επί, απεικόνιση όπου:

$$q : X \rightarrow X/\sim \quad x \xrightarrow{q} [x]$$

Για κάθε  $S \subset X/\sim$  ισχύει ότι:

$$q^{-1}(S) = \{x \in X : [x] \in S\} = \bigcup_{s \in S} s$$

Ο  $Y$  μπορεί να εφοδιαστεί με την παρακάτω τοπολογία:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subset Y : \{x \in X : [x] \in U\} \in \mathcal{T}_X\}$$

Ο χώρος  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  λέγεται **χώρος πηλίκο** της  $\sim$ .

Δεν ασχοληθούμε με τις τεχνικές λεπτομέρειες του παραπάνω ορισμού όμως θα περιγράψουμε διαισθητικά τον χώρο πηλίκο. Η κεντρική ιδέα είναι ότι ταυτίζουμε ένα σύνολο σε ένα σημείο και οι ανοικτές περιοχές κοντά στα σημεία που ταυτίσαμε πρέπει να παραμένουν 'κοντά'. Αν για παράδειγμα στο  $I$  πάρουμε τη σχέση ισοδυναμίας  $0 \sim 1$  τότε είναι σαν να κολλάμε το 0 με το 1. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ομοιομορφικό με κύκλο. Αν στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο  $D_2[0, 1]$  πάρουμε τη σχέση  $a \sim b \iff a, b \in Bd(D_2[0, 1])$  τότε είναι σαν να καταρρέει το σύνορο σε ένα σημείο οπότε αν κάποιος φανταστεί ένα πουγκί (pouch) να κλίνει με ένα κορδόνι γύρω από το άνοιγμα του θα καταλάβει ότι ο  $D_2[0, 1]/Bd(D_2[0, 1])$  είναι ομομορφικός με τη  $S^2$ . Υπάρχουν αρκετές ενδιαφέρουσες κατασκευές και μία από τις πιο σημαντικές είναι το πραγματικό προβολικό επίπεδο  $P_2\mathbb{R}$  ο οποίος ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 6.0.10.** Στον  $I \times I$  θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας:

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \text{ για } 0 \leq y \leq 1 \text{ και } (x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ για } 0 \leq x \leq 1$$

Τότε ορίζουμε  $P_2\mathbb{R} = I \times I / \sim$ .

Επί της ουσίας ταυτίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία του συνόρου του  $I \times I$ . Να σημειωθεί ότι ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε το  $P_2\mathbb{R}$  ως  $D_2[0, 1]/\sim$  όπου η  $\sim$  σχετίζει (δηλαδή ταυτίζει) τα αντιδιαμετρικά σημεία του  $S^1$ .

**Ορισμός 6.0.11.** Έστω  $(X_a, x_a)_{a \in A}$  οικογένεια τοπολογικών χώρων με βασικά σημεία  $x_a$ . Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας  $x_a \sim x_b$  όπου για κάθε  $a, b \in A$ . Δηλαδή η  $\sim$  ταυτίζει τα σημεία βάσης. Τότε ορίζουμε ως **σημειακή ένωση** (wedge sum) τον χώρο:

$$\bigvee_{a \in A} X_a = \bigsqcup_{a \in A} X_a / \sim$$

Η σημειακή ένωση δύο χώρων τους κολλάει ακριβώς σε ένα σημείο. Για παράδειγμα, η σημειακή ένωση δύο κύκλων είναι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι. Θα θεωρήσουμε την παρακάτω πρόταση χωρίς να την αποδείξουμε (της οποίας οι υποθέσεις ικανοποιούνται για πολλούς τοπολογικούς χώρους).

**Πρόταση 6.0.4.** Έστω  $(X, x)$  και  $(Y, y)$  δρομοσυνεκτικοί τοπολογικοί χώροι με βασικά σημεία  $(x, y)$ . Αν τα  $x, y$  είναι παραμορφωτικά συρρικνώματα δύο απλά συνεκτικών ανοικτών  $U \subset X$  και  $V \subset Y$ , τα σύνολα  $X \vee V, Y \vee U$  είναι ανοικτά και  $\pi_1((X \vee V) \cap (Y \vee U)) = \{1\}$  τότε τα  $X, Y$  είναι παραμορφωτικά συρρικνώματα των  $X \vee V$  και  $Y \vee U$  αντίστοιχα.

**Θεώρημα 6.0.2.** Έστω  $(X, x)$  και  $(Y, y)$  δρομοσυνεκτικοί τοπολογικοί χώροι με βασικά σημεία  $(x, y)$ . Αν τα  $x, y$  είναι παραμορφωτικά συρρικνώματα δύο απλά συνεκτικών ανοικτών  $U \subset X$  και  $V \subset Y$  (και ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 6.0.4) τότε:

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$$

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι  $X \vee Y = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 = X \vee V$  και  $A_2 = Y \vee U$ . Από την Πρόταση 6.0.4 έχουμε ότι:

1.  $\pi_1(A_1) \cong \pi_1(X)$  διότι το  $X$  είναι παραμορφωτικό συρρίκνωμα του  $A_1$
2.  $\pi_1(A_2) \cong \pi_1(Y)$  διότι το  $Y$  είναι παραμορφωτικό συρρίκνωμα του  $A_2$
3.  $\pi_1(A_1 \cap A_2) \cong \{1\}$

Από το 3.) με εφαρμογή του Πορίσματος 6.0.2 έχουμε ότι:

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$$

□

Με άμεση εφαρμογή του παραπάνω η θεμελιώδης ομάδα του  $S^1 \vee S^1$  είναι ισόμορφη με το ελεύθερο γινόμενο  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ . Οπότε βρήκαμε έναν σχετικά απλό τοπολογικό χώρο που έχει **μη αβελιανή θεμελιώδη ομάδα**.

**Παρατήρηση 6.0.7.** Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν  $X = \mathbb{R}^3 - A$  όπου  $A$  είναι η γεωμετρική εικόνα ενός κύκλου έχει ως παραμορφωτικό συρρίκνωμα το  $S^2 \vee S^1$  συνεπώς από το Θεώρημα 6.0.2 έχουμε ότι  $\pi_1(X) \cong \{1\} \star \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ . Για να έβρισκε κάποιος την παραπάνω παραμορφωτική συρρίκνωση θα έπρεπε να θεωρήσει έναν μικρό συμπαγή τόρο γύρω από τον κύκλο που βγάλαμε, και να συμπαγοποιήσει το  $X$  με ένα σημείο (one point compactification).

Τέλος, θα παραθέσουμε τον υπολογισμό της θεμελιώδης ομάδας του  $P_2\mathbb{R}$ . Θα θεωρήσουμε αρκετά πράγματα δεδομένα και δε θα είμαστε πολύ αυστηροί. Ο κύριος λόγος που την παραθέτουμε είναι πως κατά την εφαρμογή του Θεωρήματος Seifert-Van Kampen δε θα έχουμε τετριμμένο πυρήνα.

**Πρόταση 6.0.5.** Ισχύει ότι  $\pi_1(P_2\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$

**Απόδειξη.** Όπως είδαμε στον ορισμό του προβολικού επιπέδου μπορούμε να το δούμε σαν το πηλίκο  $D_2[0, 1]/\sim$  όπου  $\sim$  ταυτίζει αντιδιαμετρικά σημεία του σύνορου  $BdD_2[0, 1] = S^1$ . Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα του  $P_2\mathbb{R}$ ,  $X_1 = P_2\mathbb{R} - \{0, 0\}$  και  $X_2 = \{a\} \cong D^2(0, 1)$  όπου  $a$  το σύνορο. Παρατηρούμε ότι  $\pi_1(X_2) = \{1\}$ ,  $\pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z}$ . Το πρόβλημα τώρα είναι ότι το σύνολο  $X_1 \cap X_2$  δεν είναι απλά συνεκτικό. Άρα πρέπει να βρούμε τον πυρήνα της  $\Phi$ . Αν έχουμε ένα μη ομοτοπικό με το 0 κλειστό δρόμο  $f$  στο  $X_1 \cap X_2$ , (δηλ.  $[f] \neq [e]$ ) τότε θεωρούμε  $d$  κάποιον κλειστό δρόμο που συνδέει το  $f$  με το σύνορο  $a$  και παρατηρούμε ότι (καθώς ταυτίζουμε αντιδιαμετρικά σημεία):

$$f \sim daa\bar{d} = da\bar{d}da\bar{d} = (da\bar{d})^2 = x^2$$

Όπου  $x$  είναι γεννήτορας της  $\pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z}$ . Από την άλλη ο κλειστός δρόμος  $f$  είναι ομοτοπικός με το  $[1]$  στο  $X_2$  καθώς είναι απλά συνεκτικό. Συνεπώς, ο πυρήνας αναπαριστάτε ως  $N = \langle x^2 \rangle$  άρα

$$\pi_1(P_2\mathbb{R}) \cong 1 \star \langle x \rangle / \langle x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

□

## Κεφάλαιο 7

## Βιβλιογραφία

# Βιβλιογραφία

- [1] A.Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2000
- [2] W.Massey: *Algebraic topology: an introduction* , Springer 1967
- [3] M.D.Crossley: *Essential Topology*, Springer London 2005
- [4] J.J.Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer New York 1988
- [5] Website <https://www.math3ma.com/blog/the-fundamental-group-of-the-circle-part-1>
- [6] Δ.Ν.Γεωργίου: *Γενική Τοπολογία*, Τζιόλα 2017
- [7] Π.Παπάζογλου *Σημειώσεις Αλγεβρικής Τοπολογίας*, ΕΚΠΑ 2008
- [8] Μ.Βελιβασάκης *Το θεώρημα των Seifert και Van Kampen*, Πανεπιστήμιο Κρήτης 2017
- [9] A.Bigazzi *The Seifert-Van Kampen Theorem*, Warwick Mathematics Institute
- [10] J.M.Lee *Introduction to Topological Manifolds*, Springer 2011