Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ – Ασκήσεις ΙΙ (Λύσεις)

$\boxed{\#1}$ (α) Για $x_1 \geq 0$ έχουμε $f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2=\int_{x_1}^{\infty}\lambda^2 e^{-\lambda x_2}\,dx_2=\lambda e^{-\lambda x_1}$.
Για $x_1<0$ έχουμε $f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx_2=0$.
Επομένως,

$$f_{X_1}(x_1)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_1}, & x_1\geq 0\\ 0, & x_1<0\end{cases} \Rightarrow X_1\sim \mathcal{E}(\lambda) \qquad \left\{ R_{X_1,X_2}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1\geq 0 \text{ και } x_2\geq x_1\} \right\}$$

Για $x_2\geq 0$ έχουμε $f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1=\int_{0}^{x_2}\lambda^2 e^{-\lambda x_2}\,dx_1=\lambda^2 x_2 e^{-\lambda x_2}$.
Για $x_2<0$ έχουμε $f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx_1=0$.
Επομένως,

$$f_{X_2}(x_2)=\begin{cases}\lambda^2 x_2 e^{-\lambda x_2}, & x_2\geq 0\\ 0, & x_2<0\end{cases} \Rightarrow X_2\sim \text{Gamma}(2, 1/\lambda) \quad \left[\overset{\text{Gamma}}{G}(\alpha,\beta) : \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, \ x\geq 0\right]$$

(β) $E(X_1 \mid X_2=x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1\mid x_2)\,dx_1=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}\,dx_1=\frac{1}{f_{X_2}(x_2)}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1,x_2)\,dx_1=\frac{1}{f_{X_2}(x_2)}\int_{0}^{x_2} x_1\lambda^2 e^{-\lambda x_2}\,dx_1$$

$$=\frac{1}{f_{X_2}(x_2)}\lambda^2 e^{-\lambda x_2}\cdot x_2^2/2=\frac{x_2}{2}.$$

$\left\{\text{Σημείωση: } f_{X_1\mid X_2}(x_1\mid x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=\frac{1}{x_2},\ 0\leq x_1\leq x_2\right.$
δηλαδή $X_1\mid X_2=x_2$ είναι ομοιόμορφη στο $(0,x_2)$,
οπότε $\left. E(X_1\mid X_2=x_2)=\frac{0+x_2}{2}=\frac{x_2}{2}.\right\}$

———— · ————

$\boxed{\#2}$ (α) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{\infty}\lambda x e^{-x(\lambda+y)}\,dy=\lambda x e^{-\lambda x}\int_0^{\infty} e^{-xy}\,dy=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$

$f_X(x)=0$, $x\leq 0$. Επομένως $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$.

Για $y>0$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^{\infty}\lambda x e^{-x(\lambda+y)}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+y}\underbrace{\int_0^{\infty} x(\lambda+y)e^{-x(\lambda+y)}\,dx}_{\text{μέση τιμή εκθετικής με παράμετρο }(\lambda+y)}=$

$=\frac{\lambda}{\lambda+y}\cdot\frac{1}{\lambda+y}=\frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}$, $y>0$. Για $y\leq 0$, $f_Y(y)=0$. Επομένως,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}.$$

(β) Για $y>0$, $f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=(\lambda+y)^2 x e^{-x(\lambda+y)}$, $x>0$
$f_{X\mid Y}(x\mid y)=0$, $x\leq 0$.

Συγκρίνοντας την $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ με την πυκνότητα της Gamma(α,β), έχουμε ότι $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ είναι η πυκνότητα της Gamma$\left(2,\frac{1}{\lambda+y}\right)$, δηλ. $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{\lambda+y}$.

Για $x>0$, $\left.\begin{array}{ll} f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=xe^{-xy}, & y>0\\ f_{Y\mid X}(y\mid x)=0, & y\leq 0\end{array}\right\} \Rightarrow f_{Y\mid X}(y\mid x)$ είναι η πυκνότητα της $\mathcal{E}(x)$.

$\boxed{\#3}$ (α) $F(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} f(x,y)\,dx\,dy = 0$, αν $t_1\le 0$ ή $t_2\le 0$

Για $0<t_1<2$ και $0<t_2<2$, $F(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{16}t_1t_2(t_1+t_2)$.

Για $t_1\ge 2$ και $0<t_2<2$,

$$F(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}\int_0^{2}\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{8}t_2(2+t_2).$$

Για $0<t_1<2$ και $t_2\ge 2$,

$$F(t_1,t_2)=\int_0^{2}\int_0^{t_1}\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{8}t_1(2+t_1).$$

Για $t_1\ge 2$ και $t_2\ge 2$, $F(t_1,t_2)=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy=1$.

(β) $P(X\ge 1 \text{ ή } Y\ge 1)=P(X\ge 1)+P(Y\ge 1)-P(X\ge 1, Y\ge 1)=$

$$=\int_0^2\int_1^2\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy-\int_1^2\int_1^2\frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy=\dots$$

Εναλλακτικά: $1-P(X<1,Y<1)=1-F(1,1)=\frac{7}{8}$ (πιο εύκολα)

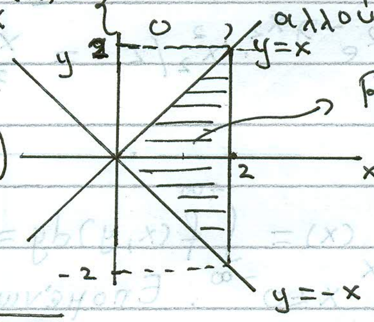
$\boxed{\#4}$ (α) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx=1 \Rightarrow \int_0^2\int_{-x}^{x} cx\,(x-y)\,dy\,dx=1 \Rightarrow$

$$\int_0^2 cx^2\cdot(2x)\,dx=1 \Rightarrow 2c\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=1 \Rightarrow 8c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{8}.$$

(β) Για $0<x<2$, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-x}^{x}\frac{1}{8}x(x-y)\,dy=\frac{x^3}{4}$.

Για $x\notin(0,2)$, $f_X(x)=0$. Άρα, $f_X(x)=\begin{cases}x^3/4, & 0<x<2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

Το σύνολο τιμών της τ.μ. Y είναι $R_Y=(-2,2)$.



$R_{X,Y}=\{(x,y): 0<x<2, -x<y<x\}$

Για $y\in(-2,2)$, $f_Y(y)=\int_{|y|}^{2} f(x,y)\,dx=$ (πρέπει $x>y$ και $x>-y$, άρα $x>|y|$)

$\int_{|y|}^{2}\frac{1}{8}x(x-y)\,dx=$

$$=\frac{x^3}{24}\Big|_{|y|}^{2}-y\cdot\frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\Big|_{|y|}^{2}=\frac{8}{24}-\frac{|y|^3}{24}-\frac{y}{4}+\frac{y^3}{16}.$$

Για $y\notin(-2,2)$, $f_Y(y)=0$.

$\boxed{\#5}$ (α) Σύνολο τιμών της τ.μ. Y, $R_Y=(0,\infty)$

Για $y\in(0,\infty)$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,dx=\int_{\max(1,y)}^{\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$ (πρέπει $x>y$ και $x\ge 1$, άρα $x>\max(1,y)$)

$$=\int_{\max(1,y)}^{\infty}x^{-3}\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_{\max(1,y)}^{\infty}=\frac{1}{2}[\max(1,y)]^{-2}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{αν } 0<y\le 1\\ \frac{1}{2y^2}, & \text{αν } y>1\end{cases}$$

(β) $P(Y\le 5)=\int_0^5 f_Y(y)\,dx=$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\,dy+\int_1^5\frac{1}{2y^2}\,dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y}\Big|_1^5\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}+1\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}.$$

(γ) $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{X|Y}(x|y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)}\,dx$

$$=\int_{\max(1,y)}^{\infty}x\cdot\frac{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}[\max(1,y)]^{-2}}\,dx=2[\max(1,y)]^2\int_{\max(1,y)}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=2[\max(1,y)]^2\cdot\frac{1}{\max(1,y)}=$$

$$=2\max(1,y).$$

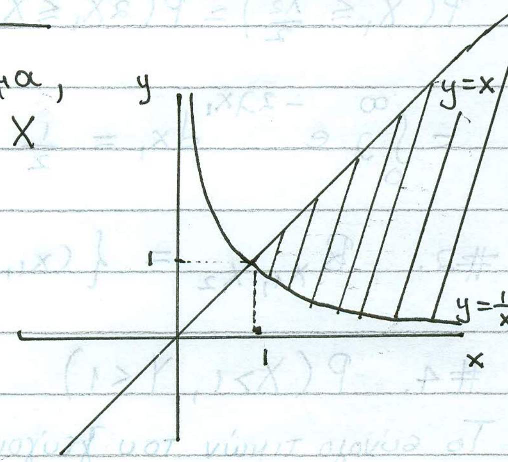
#6. $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ (ομοιόμορφη στο $(0,1)$), $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Η δεσμευμένη κατανομή $Y|X=x \sim \mathcal{U}(x,1)$, ομοιόμορφη στο $(x,1)$, $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x<y<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Άρα, για $0<y<1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,dx =$

$= \int_0^y \frac{1}{1-x}\cdot 1\,dx = -\ln(1-y)$. Επομένως, $f_Y(y) = \begin{cases} -\ln(1-y), & 0<y<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

#8. (α) Το σύνολο τιμών του $\underset{\sim}{X} = (X,Y)$ είναι, στο σχήμα, η γραμμοσκιασμένη περιοχή. Το σύνολο τιμών της τ.μ. X είναι το $(1,\infty)$ και της τ.μ. Y είναι το $(0,\infty)$.



Για $x>1$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{1/x}^{x} \frac{1}{2x^2 y}\,dy =$

$= \frac{1}{2x^2} \ln y \Big|_{1/x}^{x} = \frac{1}{2x^2}\left(\ln x - \ln\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Επομένως, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2}, & x>1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Για $y>0$,

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{\max(1,y,1/y)}^{\infty} \frac{1}{2x^2 y}\,dx = \frac{1}{2y}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{\max(1,y,1/y)}\right) = \frac{1}{2y\max(1,y,1/y)}$

$x>1,\ x>y,\ x>\frac{1}{y} \Rightarrow x>\max(1,y,\tfrac{1}{y}) = \begin{cases} y, & \text{αν } y>1 \\ 1/y, & \text{αν } 0<y\le 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{1}{2y^2}, & \text{αν } y>1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } 0<y\le 1 \end{cases}$. Για $y\le 0$, $f_Y(y)=0$, επομένως

$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2y^2, & \text{αν } y>1 \\ 1/2, & \text{αν } 0<y\le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

(β) $E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_1^{\infty}\int_{1/x}^{x} \frac{1}{xy} f(x,y)\,dy\,dx$

$= \int_1^{\infty}\int_{1/x}^{x} \frac{1}{2x^3y^2}\,dy\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2x^3}\left(-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x}\right)dx =$

$= \int_1^{\infty} \frac{1}{2x^3}(-x^{-1}+x)\,dx =$

$= -\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^4}\,dx + \int_1^{\infty}\frac{1}{2x^2}\,dx = -\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

#7 (α) Για $y>0$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/y}\cdot e^{-y}}{y}\,dx = \frac{e^{-y}}{y}\int_0^{\infty} e^{-x/y}\,dx =$

$= e^{-y}$, δηλαδή $Y \sim \mathcal{E}(1)$, εκθετική με παράμετρο 1.

Για $x>0$, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}e^{-x/y}$, δηλαδή η δεσμευμένη πυκνότητα (κατανομή) της $X|Y=y$ είναι $\mathcal{E}(\lambda)$ με $\lambda = \frac{1}{y}$.

Επομένως, η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της $X|Y=y$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda=\frac{1}{y}$. Άρα $F_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 1-e^{x/y}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$.

(β) $P(X>1|Y=y) = 1-P(X\le 1|Y=y) =$

$= 1-F_{X|Y}(1|y) = 1-(1-e^{-1/y}) = e^{-1/y}$.

(γ) Επειδή η δεσμευμένη κατανομή $X|Y=y$ είναι $\mathcal{E}(\lambda)$ με $\lambda=\frac{1}{y}$, Επιπρόσθετα ερωτήματα

#1. Να βρεθούν $P(X_1 \le X_2)$, $P(X_1 \le \frac{X_2}{2})$, R_{X_1,X_2}

$R_{X_1,X_2} = \{(x_1,x_2)\in R^2:\ 0 \le x_1 < \infty,\ x_2 \ge x_1\}$

$P(X_1 \le X_2) = \iint_{R_{X_1,X_2}} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 = 1$

$P(X_1 \le \frac{X_2}{2}) = P(2X_1 \le X_2) = \int_0^{\infty}\int_{2x_1}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x_2}\,dx_2\,dx_1 =$

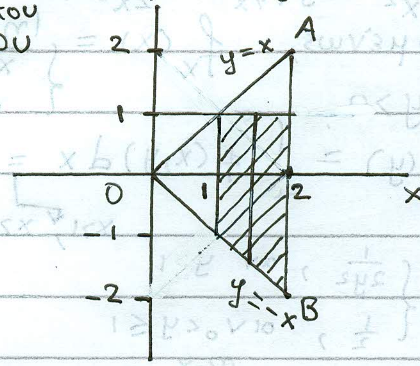
(πρέπει $x_2 \ge 2x_1$ και $x_2 \ge x_1 \Rightarrow x_2 \ge \max(2x_1, x_1) = 2x_1$, επειδή $x_1 \ge 0$)

$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-2\lambda x_1}\,dx_1 = \frac{1}{2}$.

#2. $R_{X_1,X_2} = \{(x_1,x_2):\ 0<x_1<\infty,\ 0<x_2<\infty\} = (0,\infty)\times(0,\infty)$.

#4. $P(X>1, Y<1)$, $f(x,y) = \frac{1}{8}x(x-y)$, $0<x<2$, $-x<y<x$

Το σύνολο τιμών του ζεύγους (X,Y) είναι το εσωτερικό του τριγώνου OAB.



$P(X>1, Y<1) = \int_1^2\int_{-x}^{1} \frac{1}{8}x(x-y)\,dy\,dx = (*)$

(πρέπει $1<x<2$ και $-x<y<x$, $y<1$, δηλαδή $1<x<2$ και $-x<y<\min(1,x)=1$, αφού $x>1$. Άρα, τελικά, $1<x<2$, $-x<y<1$)

$(*) = \int_1^2 \frac{1}{8}x^2(1+x)\,dx - \int_1^2 \frac{1}{8}x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \dots$