Πραγματική Ανάλυση IV - Λύσεις Θεμάτων (25/6/2014)

1) Υπολογίζω τον στροβιλισμό της $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xz^3+6y & 6x-2yz & 3x^2z^2-y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2y+2y,\ 6xz^2-6xz^2,\ 6-6) = \vec{0}.$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $V(x,y,z)$: $\nabla V = \vec{F} \Rightarrow$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xz^3+6y \ (1),\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 6x-2yz \ (2),\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 3x^2z^2-y^2 \ (3)$$

Ολοκληρώνω την (1) ως προς x: $V(x,y,z) = x^2z^3+6xy+c_1(y,z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 6x + \frac{\partial c_1}{\partial y} \overset{(2)}{=} 6x-2yz \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y} = -2yz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(y,z) = -y^2z + c_2(z) \Rightarrow V(x,y,z) = x^2z^3+6xy-y^2z+c_2(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2 + c_2'(z) \overset{(3)}{=} 3x^2z^2-y^2 \Rightarrow c_2(z) = c$$

(σταθερά)

Άρα $V(x,y,z) = x^2z^3+6xy-y^2z+c$.

Αφού $V(1,0,0) = 6 \Rightarrow 6+c=6 \Rightarrow c=0$

Άρα η συνάρτηση δυναμικού είναι: $V(x,y,z) = x^2z^3+6xy-y^2z$.

---

2) $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t,\ 0),\ 0<t<\pi \quad (a>0)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-3a\cos^2 t\sin t,\ 3a\sin^2 t\cos t,\ 0)$$

Μήκος Τόξου: $s = \int_C ds = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$

Άρα: $$s = \int_0^{\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

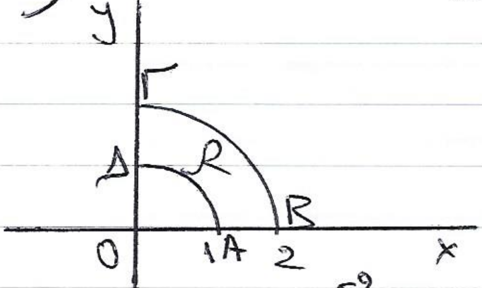
$$= 3a\int_0^{\pi} |\cos t\sin t|\, dt = 3a\left[\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos t)\cdot\sin t\, dt\right] = 3a\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\, dt - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2t\, dt\right]$$

$$= 3a$$

Πραγματική Ανάλυση IV - Λύσεις Θεμάτων (25/6/2014)

3) Θ. Green : $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{\partial R}\left(P(x,y),Q(x,y)\right)\cdot d\vec{r}$



$$\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2y\right)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2)\right]dx\,dy=$$

$$=\iint_R xy\,dx\,dy \;=\; \text{(πολικές συντετ.)}$$

$$=\int_1^2 d\rho\int_0^{\pi/2}\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho\,d\varphi=\int_1^2\rho^3 d\rho\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi$$

$$=\boxed{15/8}$$

$$\oint_{\partial R}\left(P(x,y),Q(x,y)\right)\cdot d\vec{r}=\int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\widehat{B\Gamma}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\widehat{\Gamma\Delta}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\widehat{\Delta A}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

<u>AB</u>: $\vec{r}(t)=(t,0),\quad 1<t<2,\quad \frac{d\vec{r}}{dt}=(1,0)$

$$\rightsquigarrow \int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2(t^2+2,0)\cdot(1,0)\,dt=\int_1^2(t^2+2)\,dt=\frac{13}{3}$$

<u>ΒΓ</u>: $\vec{r}(t)=(2\cos t,2\sin t),\quad 0<t<\frac{\pi}{2},\quad \vec{r}'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$

$$\int_{\widehat{B\Gamma}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{\pi/2}\left(4\cos^2t+2,\frac{1}{2}\cdot4\cos^2t\cdot2\sin t\right)\cdot(-2\sin t,2\cos t)\,dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(-8\cos^2t\cdot\sin t-4\sin t+8\cos^3t\cdot\sin t\right)dt=$$

$$=8\cdot\frac{\cos^3t}{3}\Big|_0^{\pi/2}+4\cos t\Big|_0^{\pi/2}-8\cdot\frac{\cos^4t}{4}\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{14}{3}$$

<u>ΓΔ</u>: $\vec{r}(t)=(0,t),\quad 0<t<1,\quad \vec{r}'(t)=(0,1)$

$$\int_{\widehat{\Gamma\Delta}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^0(2,0)\cdot(0,1)\,dt=0$$

<u>ΔΑ</u>: $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t),\quad 0<t<\frac{\pi}{2},\quad \vec{r}'(t)=(-\sin t,\cos t)$

$$\int_{\widehat{\Delta A}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\pi/2}^0\left(\cos^2t+2,\frac{1}{2}\cos^2t\cdot\sin t\right)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt=$$

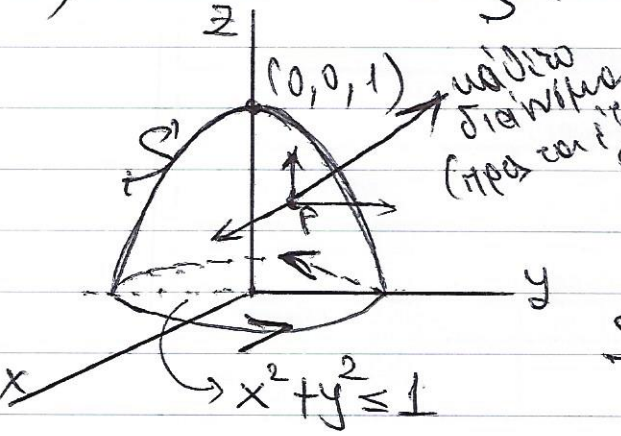
$$=\int_{\pi/2}^0\left(-\cos^2t\cdot\sin t-2\sin t+\frac{1}{2}\cos^3t\sin t\right)dt$$

$$=53/24$$

$$\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{13}{3}-\frac{14}{3}+0+\frac{53}{24}=15/8$$

Πραγματική Ανάλυση IV – Λύσεις Θεμάτων (25/6/2014)

4) Θ. Stokes: $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$



$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

$S: \vec{r}(x,y) = (x,\, y,\, 1-x^2-y^2),\ x^2+y^2\le 1$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = (1,\,0,\,-2x)$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = (0,\,1,\,-2y)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = (2x,\,2y,\,1)\ \text{(το κάθετο διάνυσμα)}$$

$$\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} (-1,-1,-1)\cdot(2x,2y,1)\,dx\,dy =$$
$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1} (2x+2y+1)\,dx\,dy = \text{(πολικές)}$$
$$= -\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi + 1)\rho\, d\theta = -\int_0^1 \rho\, d\rho\, 2\pi = \boxed{-\pi}$$

Για την φορά του κάθετου διανύσματος: έστω ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια του παραβολοειδούς $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right)$*. Παρατηρώ ότι είναι: $(2x, 2y, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, αυτό το διάνυσμα έχει φορά προς την εξωτερική όψη της επιφάνειας του παραβολοειδούς. Αν σταθούμε σ' αυτή την όψη, διαγράφουμε το σύνορο ∂S κατά την θετική φορά αν έχουμε την επιφάνεια στα αριστερά μας (δηλαδή όπως δείχνουν τα βέλη στο σχήμα).

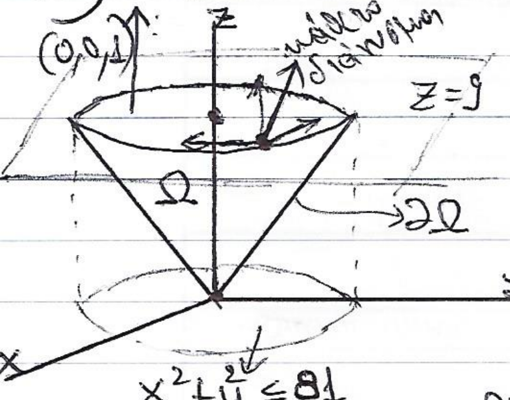
[* Εξήγηση: για $x = 1/3$, $y = 1/3$ η σχέση $z = 1-x^2-y^2 \Rightarrow z = \frac{7}{9}$]

Για το περιφερειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο της S, ∂S, είναι:

$$\vec{r}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, 0),\quad 0<t<2\pi$$
$$\vec{r}'(t) = (-\sin t,\, \cos t,\, 0)$$
$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t,\, 0,\, \cos t)\cdot(-\sin t,\, \cos t,\, 0)\,dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,dt = \boxed{-\pi}$$

Πραγματική Ανάλυση IV - Λύσεις Θεμάτων (25/6/2014)

5) Θ. Gauss: $\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S}$



$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1$$

Άρα:

$$\iiint_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 9} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9} dz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 81} \left(9-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy = (\text{πολικές συντ.})$$

$$= \int_0^9 d\rho \int_0^{2\pi} (9-\rho)\rho\,d\varphi = \int_0^9 \rho(9-\rho)\,d\rho\cdot 2\pi = \boxed{243\pi}$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Κώνα}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Άνω Βάση}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Κώνος: $\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right),\ x^2+y^2\le 9$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Θεωρώ ένα σημείο στην κωνική επιφάνεια με $x=1$, $y=1$, οπότε $z=\sqrt{2}$. Το κάθετο διάνυσμα σ' αυτό το σημείο θα είναι $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, δηλαδή έχει φορά προς το εσωτερικό του κώνου (βλ. Σχήμα). Για την εφαρμογή του Θ. Gauss απαιτείται να πάρω το αντίθετό του: $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$. Οπότε: $\iint_{\text{κώνα}} \vec{F}\cdot d\vec{S} =$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 81} \left(y, 2x, \sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)dx\,dy = (\text{πολικές συντ.})$$

$$= \int_0^9 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\,\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi}{\rho} - \rho\right)\rho\,d\varphi = -\pi\cdot 81\cdot 6 = \boxed{-\pi 486}$$

Βάση: $\vec{r}(x,y) = (x, y, 9),\ x^2+y^2\le 81$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= (1,0,0)\\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= (0,1,0)\end{aligned}\right\}\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0,0,1)$$

(έχει φορά προς το εξωτερικό του στερεού)

Πραγματική Ανάλυση IV – Λύσεις Θεμάτων (25/6/2014)

(συνέχεια 5ου θέματος)

Άρα $\iint_{\text{Ανωβάσης}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{x^2+y^2 \le 81} (y, 2x, 9) \cdot (0,0,1) \, dx\, dy =$

$= 9 \iint_{x^2+y^2 \le 81} dx\, dy = \boxed{\pi \cdot 81 \cdot 9}$

Τελικά: $\oiint_{\partial \Omega} = \pi \cdot 81 \cdot 9 - \pi \cdot 81 \cdot 6 = \boxed{243\pi}$

Υπολογισμός εμβαδού ολικής επιφάνειας $\partial \Omega$:

$E = E_{\text{κώνου}} + E_{\text{Ανωβάσης}}$

$E_{\text{κώνου}} = \iint_{\text{Κώνο}} dS = \iint_{x^2+y^2 \le 81} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} \, dx\,dy$

$= \iint_{x^2+y^2 \le 81} \sqrt{2} \, dx\, dy =$ (πολικές συν.) $= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 81$

$E_{\text{Ανωβάσης}} = \pi \cdot 81$

Άρα $E = 81\pi(\sqrt{2}+1)$

Πανεπιστήμιο Πατρών
Πάτρα, 25 Ιουνίου 2014

Μάθημα: Πραγματική Ανάλυση IV
Εξεταστής: Φιλαρέτη Καρατζόγλου-Ζαφειροπούλου

ΘΕΜΑΤΑ

1) (1,5 μ) Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz^3 + 6y,\ 6x - 2yz,\ 3x^2z^2 - y^2).$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $V(x,y,z)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla V$. Αν ναι, να υπολογιστεί η $V(x,y,z)$ που ικανοποιεί την σχέση $V(1,1,0) = 6$.

2) (1,5 μ) Να υπολογιστεί το μήκος τόξου της καμπύλης που δίνεται από την διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\mathbf{r}(t) = (\alpha\cdot\cos^3 t,\ \alpha\cdot\sin^3 t,\ 0)$, $0<t<\pi$ $(\alpha>0)$.

3) (2,0 μ) Να επαληθευτεί το θεώρημα του Green για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + 2,\ \tfrac{1}{2} x^2 y)$ και το χωρίο $\Re$ του xy-επιπέδου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων $(x>0,\ y>0)$ και περικλείεται από τις καμπύλες: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ και τις ευθείες: $x = 0$, $y = 0$.

4) (2,0 μ) Να επαληθευτεί το Θεώρημα του Stokes για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,\ z,\ x)$ και την επιφάνεια S η οποία είναι το κομμάτι του παραβολοειδούς $z = 1 - x^2 - y^2$ για το οποίο είναι $z>0$. Δώστε τη φορά του καθέτου στην επιφάνεια S διανύσματος και εξηγήστε την επιλογή του προσανατολισμού στο περιφερειακό ολοκλήρωμα.

5) (3,0 μ) Να επαληθευτεί το Θεώρημα του Gauss για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,\ 2x,\ z)$ και το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ που περικλείεται από τις επιφάνειες: $z = 9$ και $z = \{x^2 + y^2\}^{1/2}$. Σε κάθε περίπτωση δώστε την φορά του καθέτου διανύσματος. Τέλος, να υπολογίσετε το εμβαδό της κλειστής επιφάνειας που αποτελεί το σύνορο του χωρίου Ω.

Δίνονται:

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial \mathcal{R}} \big(P(x,y),\ Q(x,y)\big)\cdot d\vec{r}$$

$$\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

- Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες.
- Έξοδος από την αίθουσα σημαίνει παράδοση του γραπτού.
- Όλες οι ηλεκτρονικές συσκευές πρέπει να είναι απενεργοποιημένες.
- Απαραίτητα: φοιτητική ή αστυνομική ταυτότητα ή πάσο.

Καλή επιτυχία