Λύσεις της Εργασίας I — Θεωρία Πιθανοτήτων II

#2.

(α)

$X \downarrow \ Y \rightarrow$	0	1	περιθώρια της X, $f_X(x)$
0	4/25	6/25	10/25
1	6/25	9/25	15/25
περιθώρια της Y $f_Y(y)$	10/25	15/25	

Επειδή η δειγματοληψία γίνεται με επανατοποθέτηση, υπάρχει ανεξαρτησία ενδεχομένων μεταξύ πρώτης και δεύτερης επιλογής. Συνεπώς, πιθανότητες τομών υπολογίζονται ως γινόμενα πιθανοτήτων.

$f(0,0) = P(X=0, Y=0) \overset{\text{ανεξαρτησία}}{=} P(X=0)P(Y=0) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$

$f(0,1) = \quad \ldots \quad = \quad \ldots \quad = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$

$f(1,0) = \quad \ldots \quad = \quad \ldots \quad = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$

$f(1,1) = \quad \ldots \quad = \quad \ldots \quad = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$

(β) η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

x	$f_X(x) = P(X=x)$
0	10/25
1	15/25

Επομένως, $E(X) = \sum_x x f_X(x) = 0\cdot 10/25 + 1\cdot 15/25 = 15/25 = \frac{3}{5}$

(η τ.μ. X είναι Bernoulli). Λόγω συμμετρίας, η Y έχει την ίδια κατανομή με την X, οπότε $E(Y) = 15/25 = 3/5$.

(γ) Για $y=0$, $f_{X|Y}(x|0) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} = \begin{cases} \frac{4/25}{10/25} = \frac{4}{10}, & \text{αν } x=0 \\ \frac{6/25}{10/25} = \frac{6}{10}, & \text{αν } x=1 \end{cases}$

Επομένως, $E(X|Y=0) = \sum_x x\, f_{X|Y}(x|0) = 0\cdot\frac{4}{10} + 1\cdot\frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Για $y=1$, $f_{X|Y}(x|1) = \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} \frac{6/25}{15/25} = \frac{6}{15}, & \text{αν } x=0 \\ \frac{9/25}{15/25} = \frac{9}{15}, & \text{αν } x=1 \end{cases}$

Επομένως,

$$E(X|Y=1) = \sum_x x f_{X|Y}(x|1) = 0\cdot\frac{6}{15} + 1\cdot\frac{9}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

(Σημείωση: λόγω της επανατοποθέτησης, που συνεπάγεται ανεξαρτησία μεταξύ διαφορετικών επιλογών (της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$, εδώ), η δεσμευμένη κατανομή της X δοθέντος ότι $Y=y$ συμπίπτει με τη μη δεσμευμένη και για αυτό $E(X|Y=y) = E(X)$ $\forall\, y=0,1$.

(δ) $E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x,y) = 0 f(0,0) + 0 f(0,1) + 0 f(1,0) + 1\cdot f(1,1) = \frac{9}{25}$.

(Σημείωση: η τυχαία μεταβλητή XY είναι Bernoulli με παράμετρο $p = P(XY=1) = P(X=1, Y=1) = f(1,1) = 15/25$ και επειδή η μέση τιμή της Bernoulli είναι η παράμετρος της, έχουμε $E(XY) = p = 15/25$)

#3. X_1 = αριθμός αγοριών, X_2 = αριθμός κοριτσιών. Δίνεται η κατανομή του αθροίσματος $X_1 + X_2$:

10% των οικογενειών δεν έχουν παιδιά. Άρα, $P(X_1+X_2=0) = P(X_1=0, X_2=0) = 0.10$.

25% των οικογενειών έχουν ένα παιδί. Άρα, $P(X_1+X_2=1) = 0.25$.

40% των οικογενειών έχουν δύο παιδιά. Άρα, $P(X_1+X_2=2) = 0.40$.

25% των οικογενειών έχουν τρία παιδιά. Άρα, $P(X_1+X_2=3) = 0.25$.

• $P(X_1+X_2=1)=0.25 \Rightarrow P(X_1=1, X_2=0)+P(X_2=0, X_1=1)=0.25$. Όμως λόγω συμμετρίας $P(X_1=1, X_2=0) = P(X_2=0, X_1=1)$, οπότε έχουμε $P(X_1=1, X_2=0) =$ $= P(X_1=0, X_2=1) = 0.125$.

• $P(X_1+X_2=2)=0.40 \Rightarrow P(X_1=2, X_2=0)+P(X_1=1, X_2=1)+P(X_1=0, X_2=2)\overset{(*)}{=}0.40$. Ανάλογα, έχουμε $P(X_1=2, X_2=0) = P(X_1=0, X_2=2)$ ενώ $P(X_1=1, X_2=1) =$ $2\,P(X_1=2, X_2=0)$ (αγόρι-κορίτσι ή κορίτσι-αγόρι, συνεπώς διπλάσια πιθανότητα από αγόρι-αγόρι). Συνεπώς, από την (*) έχουμε $P(X_1=2, X_2=0) = P(X_1=0, X_2=2)$ $= 0.10$ και $P(X_1=1, X_2=1) = 0.20$.

• $P(X_1+X_2=3) = 0.25 \Rightarrow P(X_1=3, X_2=0)+P(X_1=2, X_2=1)+P(X_1=1, X_2=2)+$ $+P(X_1=0, X_2=3)\overset{(**)}{=}0.25$. Όμως, $P(X_1=3, X_2=0) = P(X_1=0, X_2=3)$ ενώ $P(X_1=2, X_2=1) = P(X_1=1, X_2=2) = 3\,P(X_1=3, X_2=0)$ (αγόρι-αγόρι-κορίτσι ή αγόρι-κορίτσι-αγόρι ή κορίτσι-αγόρι-αγόρι, άρα τριπλάσια πιθανότητα από αγόρι-αγόρι-αγόρι). Επομένως, από την (**) προκύπτει $P(X_1=3, X_2=0) =$ $= P(X_1=0, X_2=3) = \frac{0.25}{8} = 0.03125$ και $P(X_1=2, X_2=1) = P(X_1=1, X_2=2) =$ $= 3 * 0.03125 = 0.09375$. Συνοπτικά, η από κοινού κατανομή και οι περιθώριες δίνονται στον πίνακα

$X_1 \downarrow$ \ $X_2 \rightarrow$	0	1	2	3	περιθώρια της X_1, $f_{X_1}(x_1)$
0	0.10	0.125	0.10	0.03125	0.35625
1	0.125	0.20	0.09375	0	0.41875
2	0.10	0.09375	0	0	0.19375
3	0.03125	0	0	0	0.03125
περιθώρια της X_2, $f_{X_2}(x_2)$	0.35625	0.41875	0.19375	0.03125	1

Άλλος τρόπος: Έστω, π.χ., ότι θέλουμε να υπολογίσουμε $f(2,1)$. Προφανώς το ενδεχόμενο $(X_2=2, X_1=1)$ είναι το ίδιο (ίσο ως σύνολο) με το $(X_2=2, X_1=1, X_1+X_2=3)$. Άρα, $f(2,1) = P(X_2=2, X_1=1) = P(X_2=2, X_1=1, X_1+X_3=3) = P(X_2=2, X_1=1 \mid X_1+X_2=3)\,P(X_1+X_2=3)$ $= P(X_2=2 \mid X_1+X_2=3)\cdot P(X_1+X_2=3)$

↑ αν σε οικογένεια 3 παιδιών, υπάρχουν 2 αγόρια τότε το άλλο είναι κορίτσι, δηλαδή το ενδεχόμενο $X_1=1$ είναι βέβαιο. Τώρα, $P(X_2=2 \mid X_1+X_2=3) = P($2 αγόρια σε οικογένεια 3 παιδιών$) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ (διωνυμικές πιθανότητες).

Τελικά, λοιπόν, $f(2,1) = P(X_2=2 \mid X_1+X_3=3)\,P(X_1+X_2=3) = \frac{3}{8}\cdot 0{,}25 = 0.09375$.

Παρόμοια υπολογίζονται και οι άλλες πιθανότητες.

#7.

$X \backslash Y$	1	2	3	περιθώρια της X $f_X(x)$
1	2/36	2/36	3/36	7/36
2	1/36	10/36	3/36	14/36
3	4/36	5/36	6/36	15/36
περιθώρια της Y $f_Y(y)$	7/36	17/36	12/36	1

(α) $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ δίνονται στον παραπάνω πίνακα

(β) Για $y=1$, $f_{X|Y}(x|1) = \dfrac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 2/7, & x=1 \\ 1/7, & x=2 \\ 4/7, & x=3 \end{cases}$

Για $y=2$, $f_{X|Y}(x|2) = \dfrac{f(x,2)}{f_Y(2)} = \begin{cases} 2/17, & x=1 \\ 10/17, & x=2 \\ 5/17, & x=3 \end{cases}$

Για $y=3$, $f_{X|Y}(x|3) = \dfrac{f(x,3)}{f_Y(3)} = \begin{cases} 3/12, & x=1 \\ 3/12, & x=2 \\ 6/12, & x=3 \end{cases}$

Για $x=1$, $f_{Y|X}(y|1) = \dfrac{f(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} 2/7, & y=1 \\ 2/7, & y=2 \\ 3/7, & y=3 \end{cases}$

Για $x=2$, $f_{Y|X}(y|2) = \dfrac{f(2,y)}{f_X(2)} = \begin{cases} 1/14, & y=1 \\ 10/14, & y=2 \\ 3/14, & y=3 \end{cases}$

Για $x=3$, $f_{Y|X}(y|3) = \dfrac{f(3,y)}{f_X(3)} = \begin{cases} 4/15, & y=1 \\ 5/15, & y=2 \\ 6/15, & y=3 \end{cases}$

(γ) $E(X|Y=1) = \sum_x x f_{X|Y}(x|1) = 1\cdot\frac{2}{7} + 2\cdot\frac{1}{7} + 3\cdot\frac{4}{7} = \frac{16}{7}$.

#9. Ισχύει $P(A-B) = P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$ ①

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ ②

$P(A\cap B) = P(A)$ αν $A\subset B$ ③

(i). Θέτουμε $B_1 = (X_1 \le \beta_1)$, $A_1 = (X_1 \le \alpha_1)$, $B_2 = (X_2 \le \beta_2)$, $A_2 = (X \le \alpha_2)$ και έχουμε $P(\alpha_1 < X_1 \le \beta_1, \alpha_2 < X_2 \le \beta_2) = P(B_1 \cap A_1^c \cap B_2 \cap A_2^c) =$

$= P(B_1\cap B_2 - (A_1\cup A_2)) \overset{①}{=} P(B_1\cap B_2) - P(B_1\cap B_2 \cap (A_1\cup A_2))$

$= P(B_1\cap B_2) - P((B_1\cap B_2 \cap A_1)\cup(B_1\cap B_2\cap A_2)) \overset{③}{=} P(B_1\cap B_2) - P((A_1\cap B_2)\cup$

$(B_1\cap A_2)) \overset{②}{=} P(B_1\cap B_2) - \{P(A_1\cap B_2) + P(B_1\cap A_2) - P(A_1\cap B_2\cap B_1\cap A_2)\}$

$= P(B_1\cap B_2) - P(A_1\cap B_2) - P(B_1\cap A_2) + P(A_1\cap A_2) =$

$\overset{③}{=} F(\beta_1,\beta_2) - F(\alpha_1,\beta_2) - F(\beta_1,\alpha_2) + F(\alpha_1,\alpha_2)$.

(ii). Η απόδειξη της (i) ισχύει και αν $\beta_1 = \infty$, $\beta_2 = \infty$, οπότε έχουμε $P(X_1 > t_1, X_2 > t_2) = P(t_1 < X_1 \le \infty, t_2 < X_2 \le \infty) \overset{(i)}{=} F(\infty,\infty) - F(t_1,\infty) -$

$- F(\infty, t_2) + F(t_1,t_2) = 1 - F(t_1,\infty) - F(\infty,t_2) + F(t_1,t_2)$.

#8 (α) 1ο βήμα $\boxed{4Λ\ 6Μ} \to$ 4 σφαίρες X = αριθμός λευκών σφαιρών

2ο βήμα $\boxed{\begin{matrix}6\\ \text{σφαίρες}\end{matrix}} \to$ 1 σφαίρα $Y = \begin{cases} 1, & \text{αν λευκή} \\ 0, & \text{αν μαύρη} \end{cases}$

Το σύνολο τιμών της X είναι $R_X = \{0,1,2,3,4\}$ και η X έχει υπεργεωμετρική κατανομή με $f_X(x) = P(X=x) = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{6}{4-x}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{6}{4-x}}{210}$, $x \in R_X$.

Το σύνολο τιμών της Y είναι $R_Y = \{0,1\}$ και η Y έχει Bernoulli κατανομή. Το σύνολο τιμών του ζεύγους (X,Y) είναι $R_{X,Y} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(4,0)\}$ και για κάθε $(x,y) \in R_{X,Y}$ έχουμε $f(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y \mid X=x) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{\binom{4}{x}\binom{6}{4-x}}{210} \cdot \dfrac{4-x}{6}, & y=1 \\[2ex] \dfrac{\binom{4}{x}\binom{6}{4-x}}{210} \cdot \dfrac{2+x}{6}, & y=0 \end{cases}$$

. Αναλυτικά η κατανομή του (X,Y) δίνεται στον πίνακα:

$X \downarrow$ \ $Y \to$	0	1	περιθώρια της X (υπεργεωμετρική)
0	$\frac{15}{210} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{42}$	$\frac{15}{210} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{42}$	$\frac{15}{210}$
1	$\frac{80}{210} \cdot \frac{3}{6} = \frac{8}{42}$	$\frac{80}{210} \cdot \frac{3}{6} = \frac{8}{42}$	$\frac{80}{210}$
2	$\frac{90}{210} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$	$\frac{90}{210} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$	$\frac{90}{210}$
3	$\frac{24}{210} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4}{42}$	$\frac{24}{210} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{210}$	$\frac{24}{210}$
4	$\frac{1}{210} \cdot 1 = \frac{1}{210}$	$\frac{1}{210} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{210}$
περιθώρια της Y	$\frac{25}{42} + \frac{1}{210}$	$\frac{16}{42} + \frac{4}{210}$	1

(β) $E(Y|X=2) = \sum_{y=0}^{1} y\, f_{Y|X}(y|2) = 0 \cdot f_{Y|X}(0|2) + 1\, f_{Y|X}(1|2) = 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$E(X|Y=1) = \sum_x x\, f_{X|Y}(x|1) = \sum_{x=0}^{3} x \cdot \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{1}{f_Y(1)} \left\{ 1 \cdot f(1,1) + 2\, f(2,1) + 3 \cdot f(3,1) \right\}$$

$$= \frac{1}{\frac{16}{42} + \frac{4}{210}} \cdot \left\{ \frac{8}{42} + 2 \cdot \frac{6}{42} + 3 \cdot \frac{4}{210} \right\} = \frac{4}{3}.$$