Τομέας Παιδαγωγικής
Ιστορίας, και Φιλοσοφίας
των Μαθηματικών
Ευτύχης Παπαδοπετράκης

Ευκλείδεια Γεωμετρία και η διδασκαλία της

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΛΥΣΗ

1) Εάν $0_1,0_2,0_3$ είναι τα συμμετρικά του περικέντρου Ο του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις πλευρές ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ αντίστοιχα δείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο $0_1,0_2,0_3$

β) Το Ο είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $0_1,0_2,0_3$.

γ) Οι ΑΟ, $B0_2$, $Γ0_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο τις διχοτομεί,

2) Εάν ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο βάρους Θ τριγώνου ΑΒΓ και αφήνει τα Β και Γ προς το αυτό μέρος, να δηχθεί ότι: ΑΑ'=ΒΒ'+ΓΓ', όπου ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' οι αποστάσεις των Α,Β,Γ από την (ε).

3) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι β>γ. Εάν ΑΔ διάμεσος αυτού, δείξτε ότι: α) $\angle ΑΔΓ > \angle^1 ΑΔΒ$.

β) $\mu_\beta < \mu_\gamma$

4) Τετράπλευρου ΑΒΓΔ οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές. Εάν οι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Ε και οι ΑΔ, ΒΓ στο Ζ , να δηχθεί ότι ή διαγώνιος ΑΓ είναι κάθετος επί την ΕΖ.

5) Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Εάν Ο ή τομή των διαγωνίων, να δηχθεί ότι τα ορθόκεντρο των τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΑΔ είναι κορυφές παραλληλογράμμων.

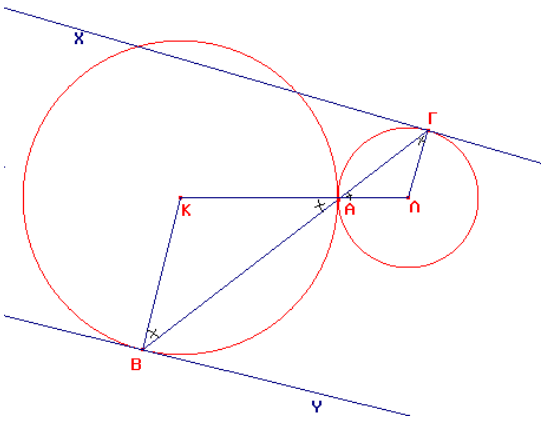
6) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, να δηχθεί ότι: $3τ/2 < \mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma<3τ$

7) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ των ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να δηχθεί ότι οι ΓΚ, ΓΛ τριχοτομούν την ΒΔ.

8) Θεωρούμε ημιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΚΒ και δύο σημεία Γ, Δ της διαμέτρου, συμμετρικά ως προς το κέντρο Κ. Από τα Γ, φέρνουμε δύο παράλληλες, πού τέμνουν την ημιπεριφέρεια στο Γ΄ και Δ΄. Δείξτε ότι $\angle ΓΓ΄Δ'=90^o$.

[1] Το σύμβολο $\angle$ σημαίνει γωνία. Δηλαδή $\angle$Α σημαίνει η γωνία Α, ενώ $\angle$ΑΒΓ σημαίνει η γωνία ΑΒΓ.

9) Δύο κύκλοι Κ,Λ εφάπτονται στο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία, πού τέμνει τούς κύκλους στα Β και Γ αντίστοιχα. Να δηχθεί ότι οι εφαπτόμενες των κύκλων στα Β και Γ είναι παράλληλες.



Κατασκευάζουμε το σχήμα σύμφωνα με την εκφώνηση. Πρέπει να δείξουμε ότι ΓΧ //ΒΥ. Επειδή οι ΓΧ και ΒΥ τέμνονται από την ΒΓ, αρκεί να αποδείξουμε ότι ∠ΑΒΥ=∠ΑΓΧ.

Απόδειξη: *Αφού ΓΧ και ΒΥ είναι εφαπτόμενες στου κύκλους Λ και Κ αντίστοιχα, άρα ΛΓ⊥ΓΧ και ΚΒ⊥ΒΥ, οπότε οι γωνίες ∠ΑΒΥ και ∠ΑΓΧ είναι συμπληρώματα των ∠ΚΒΑ και ∠ΑΓΛ αντίστοιχα. Αυτές όμως είναι ίσες μεταξύ τους, όπως φαίνεται από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΑ και ΑΛΓ, καθότι ∠ΚΒΑ=∠ΓΑΛ ως κατακορυφήν ενώ ∠ΚΒΑ=ΚΑΒ και ∠ΓΑΛ=ΑΓΛ ως παρά την βάση ισοσκελών τριγώνων.*

10) Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με ∠Α=∠Δ=90^o. Εάν ΒΓ=ΑΒ+ΓΔ, δείξτε ότι ό κύκλος διαμέτρου ΒΓ εφάπτεται της ΑΔ.

11) Δύο κύκλοι Κ,Λ, ακτίνων ρ και 3ρ αντίστοιχα , εφάπτονται εξωτερικά. Να υπολογισθεί ή γωνία των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων τους.

12) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (∠Α=90"). Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε περιφέρεια, πού τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Ζ. Να δηχθεί ότι ή εφαπτομένη της περιφέρειας στο Ζ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ. (Ιούνιος 2014)

13) Δύο κύκλοι Κ και Λ εφάπτονται άλλου κύκλου Ο στά Α,Β αντίστοιχα. Εάν ή ΑΒ τέμνει τον Λ στο Γ, δείξτε ότι ΚΑ∥ΛΓ.

14) Έστω κύκλος Ο και διάμετρος αυτού η ΒΓ . 'Από σημείο Α της προέκτασης της ΒΓ, φέρνουμε τέμνουσα ΑΔΕ, ώστε ΑΔ=R. Δείξτε ότι ΒΟΕ=3ΓΟΔ.

15) Έστω κύκλος Ο και τόξο αυτού ΒΓ=120^{o}. Εάν Μ τυχόν σημείο του τόξου, να δηχθεί ότι οι διάμεσοι του τετραπλεύρου ΟΒΜΓ τέμνονται κάθετα.

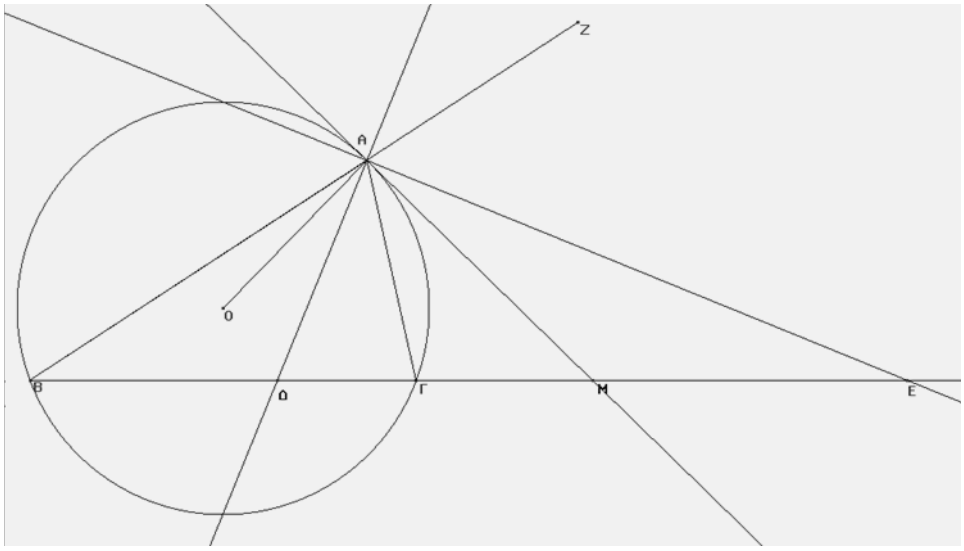
16) Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε αυτόν. Έστω Η το έκκεντρο του ΑΒΓ και Β΄, Γ' τα σημεία τομής του Ο με τις ΒΗ, ΓΗ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ή Β΄Γ΄ είναι μεσοκάθετος στο ΑΗ.

17) Έστω κύκλος Ο και δύο τόξα ΑΒ=ΑΓ=120^{o}. Αν Δ, Ε τα μέσα των τόξων αυτών, δείξτε ότι η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις ΑΒ, ΑΓ.

18) Έστω κύκλος Ο και χορδή ΑΒ αυτού με αντίστοιχο τόξο 120°. Οι εφαπτόμενες του Ο στα Α,Β τέμνονται στο Ρ. Αν Μ τυχόν σημείο του τόξου ΑΒ, και Α', Β οι τομές των ΑΜ, ΒΜ με τις ΒΡ, ΛΡ αντίστοιχα , να δηχθεί ότι ΑΑ'=ΒΒ'.

19) Θεωρούμε τρίγωνο, έστω το ΑΒΓ εγγεγραμμένο, σε κύκλο τον Ο, και έστω ΑΔ, ΑΕ οι διχοτόμοι της εσωτερικής και εξωτερικής γωνίας Α (τα Δ,Ε επί της ΒΓ). Να δηχθεί ότι ή εφαπτομένη του Ο στο Α διέρχεται από το μέσο της ΔΕ.

Η κατασκευή του σχήματος σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:



Έστω Μ *το σημείο της* ΔΕ *από το οποίο περνά η εφαπτόμενη του* Ο *στο* Α. *Πρέπει να αποδείξουμε ότι το* Μ *είναι το μέσον της* ΔΕ.

Ανάλυση: Για να είναι το Μ μέσον της ΔΕ αρκεί η ΑΜ να είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΕ. Όμως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο καθότι η ΑΔ και η ΑΕ είναι διχοτόμοι των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών ΒΑΓ και ΓΑΖ. Αν λοιπόν η ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΕ, πρέπει να ισούται

με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή πρέπει ΑΜ=ΜΔ, δηλαδή το τρίγωνο ΜΑΔ πρέπει να είναι ισοσκελές που σημαίνει ότι πρέπει ΜΔΑ=ΜΔΑ.

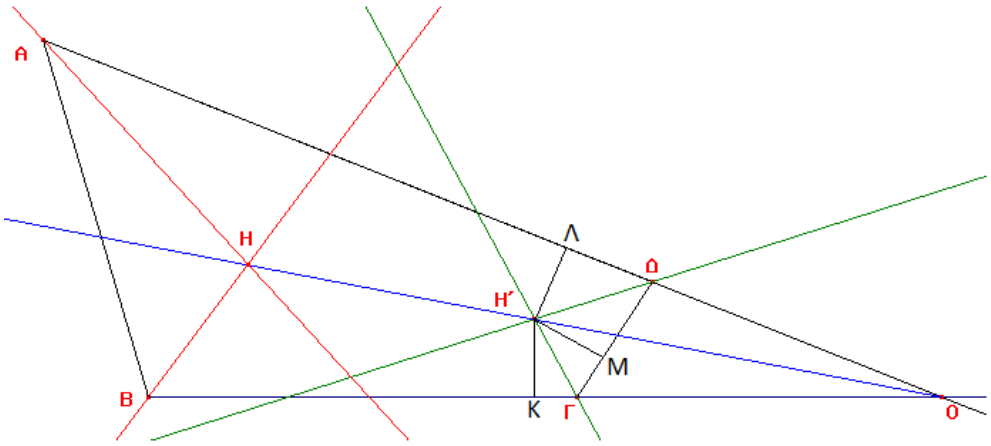
Όμως ΜΔΑ=Α/2+Β, ως εξωτερική του τριγώνου ΑΔΒ, και ΜΑΔ=Α/2+ΓΑΜ. Από τις δύο αυτές σχέσεις είναι φανερό ότι πρέπει να είναι ΓΑΜ=Β, το οποίο και συμβαίνει καθότι η ΓΑΜ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη στο Α, την ΑΜ, και τη χορδή ΑΓ, ενώ η Β είναι η εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο που ορίζει η χορδή ΑΓ.

Απόδειξη: (Μορφοποιείται ακολουθώντας το μονοπάτι της ανάλυσης αντίστροφα. Εντοπίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ και δείχνουμε ότι ΑΜ=ΑΔ…)

20) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Β-Γ=90°. Εάν Η το ορθόκεντρο αυτού, να δηχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΒΓ είναι ίσα.

21) Αν Ο είναι το σημείο τομής δύο απέναντι πλευρών ενός τετράπλευρου, τότε τα σημεία τομής των διχοτόμων των γωνιών που πρόσκεινται στις δύο άλλες πλευρές του τετράπλευρου και το Ο, βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Έστω τετράπλευρο το ΑΒΓΔ και έστω ότι οι απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Ο.



Έστω ακόμη ότι Η είναι η τομή των διχοτόμων των γωνιών Α και Β και Η΄ η τομή των διχοτόμων των γωνιών Γ και Δ. Πρέπει να δείξουμε ότι τα σημεία Ο, Η, Η' κείνται ευθείας.

Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΒΟ οι ΑΗ και ΒΗ είναι διχοτόμοι, και αφού οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου περνούν από το ίδιο σημείο, άρα και η διχοτόμος της γωνίας ΑΟΒ θα περάσει από το Η. Όμως και το Η΄ βρίσκεται πάνω στην ίδια ευθεία την ΗΟ που διχοτομεί την γωνία ΑΟΒ, διότι το Η΄ ως σημείο της διχοτόμου ΓΗ, απέχει εξίσου από τις πλευρές, δηλαδή ΚΗ΄=ΜΗ΄ όμοια ΜΗ΄=ΛΗ΄, οπότε ΚΗ΄=ΛΗ΄, άρα βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο ΟΗ΄.

22) Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ, ενός τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάζουμε έκτος αυτού τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, και ΑΓΖΗ. Δείξτε ότι οι ΒΖ και ΓΔ τέμνονται επί τού ύψους ΑΑ' του τριγώνου ΑΒΓ.

23) Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΓ παραμένει σταθερή σε θέση και μέγεθος. Εάν το μήκος της μ_α παραμένει σταθερό να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου βάρους του τριγώνου.

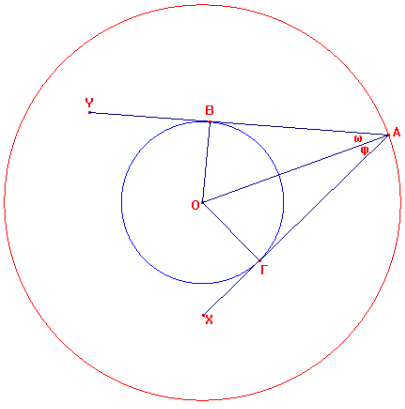
24) Να βρεθεί ό γ.τ. των κέντρων των κύκλων πού αποκόπτουν ίσες χορδές, από τις πλευρές δεδομένης γωνίας ΧΟΥ.

25) Δίνεται ορθή γωνία ΧΟΥ. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=λ (λ· γνωστό ευθ. τμήμα) κινείται ώστε τα άκρα του να βρίσκονται επί των ΟΧ και ΟΥ αντίστοιχα. Να βρεθεί ό γ.τ. του μέσου Μ του ΑΒ.

26) Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία Ο και Α. Να βρεθεί:
α) Ο γ.τ. των προβολών του Α στις ευθείες τις διερχόμενες από το Ο.
β) Ο γ.τ. των συμμετρικών του Α ως προς τις παραπάνω ευθείες.

27) Να βρεθεί ό γ.τ. του κέντρου βάρους ορθογωνίου τριγώνου με σταθερή υποτείνουσα ΒΓ.

28) Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και σταθερό σημείο Α. Να βρεθεί ό γ. τ. των μέσων των χορδών του κύκλου, πού διέρχονται από το σημείο Α.



29) **Μια γωνία σταθερού μέτρου στρέφεται με τρόπο ώστε οι πλευρές της να εφάπτονται σε δοσμένο σταθερό κύκλο. Να βρεθεί ο γ.τ. της κορυφής της γωνίας.**

Έστω ο δοσμένος κύκλος ο Ο και η (δοσμένη) γωνία σταθερού μέτρου η Α, της οποίας οι πλευρές ΑΥ και ΑΧ εφάπτονται του κύκλου Ο στα Β και Γ αντίστοιχα. Ζητείται ο γ.τ. της κορυφής Α όταν

αυτή περιστρέφεται στον Ο, ενώ οι πλευρές της παραμένουν εφαπτόμενες στον Ο.
Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ είναι ίσα διότι έχουν ΟΒ=ΟΓ, ΟΑ κοινή, και ΑΒ=ΑΓ καθότι από σημείο εκτος κύκλου άγονται δύο ίσες μεταξύ τους εφαπτόμενες (πόρισμα 2.4.1). Άρα ∠φ=∠ω=∠Α/2. Επομένως το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ένα κατασκευάσιμο ορθογώνιο τρίγωνο αφού ∠ω είναι το μισό της σταθερής ∠Α και ΟΒ σταθερό ως ακτίνα του δοσμένου κύκλου. Οπότε και η ΟΑ είναι σταθερή, που σημαίνει ότι το Α απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Ο. Κατά συνέπεια ο ζητούμενος γ.τ. είναι ένας κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ.

30) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. 'Από τυχόν σημείο Ρ της ΒΓ φέρνουμε τις ΡΔ, ΡΕ παράλληλες προς τις ΑΓ,ΑΒ. Να βρεθεί ό γ.Τ. του κέντρου Μ του παραλληλογράμμου ΑΔΡΕ.

31) Δίνεται κύκλος Ο και σημείο Α αυτού. φέρνουμε μια χορδή την ΑΒ μεταβλητή ως προς τη θέση, σταθερή ως προς το μήκος. Πάνω στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα ΒΜ=ΒΑ. Να βρεθεί ό γ.τ. του Μ.

32) Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R), (Λ,Ρ). Θεωρούμε τις παράλληλες ακτίνες ΚΑ,ΛΒ.
Να βρεθεί ό γ.Τ. του μέσου Μ της ΑΒ, όταν οι ΚΑ,ΛΒ είναι ομόρροπες και όταν είναι αντίρροπες;

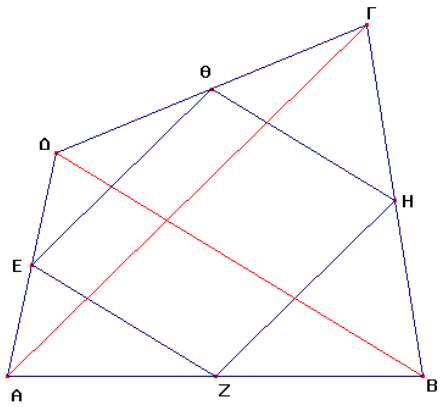
33) Δίνεται γωνία ΧΟΥ και δύο σημεία Σ,Ρ εντός αυτής. Να βρεθούν δύο σημεία Μ,Ν επί των ΟΧ,ΟΥ, ώστε ΣΜ+ΜΝ+ΝΡ=min

34) Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες Χ,Υ και σημείο Μ. Να βρεθούν τα σημεία Α,Β επί των Χ,Υ αντίστοιχα ώστε ΑΒ=λ και $\angle AMB=90^o$.

35) Δίνεται γωνία ΧΟΥ και επί της ΟΧ σταθερό σημείο Ρ. Να βρεθεί επί της ΟΧ σημείο Μ, που να απέχει ίσα από το Ρ και την ΟΥ.

36) Δίνεται κύκλος Ο και δύο σημεία Α,Β. Να βρεθεί επί του (Ο) σημείο Μ, ώστε, αν Γ,Δ οι τομές των ΜΑ, ΜΒ με τον (Ο), να είναι ΓΔ=λ.

37) Δίδεται ένα τυχαίο τετράπλευρο. Δείξτε ότι το τετράπλευρο που έχει ως κορυφές τα μέσα των πλευρών του αρχικού τετραπλεύρου είναι παραλληλόγραμμο και είναι ίσο σε εμβαδό με το μισό του αρχικού. (πόρισμα 2.7.1)



Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το ΕΖΗΘ με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τις διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ του αρχικού.

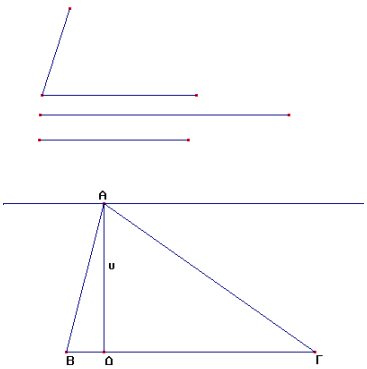
Στο τρίγωνο τότε ΑΓΔ η ΕΔ ενώνει τα μέσα των πλευρών του άρα είναι ΕΘ=//ΑΓ/2. Όμοια από το ΑΒΓ ΗΖ=//ΑΓ/2. Οπότε ΕΘ=//ΗΖ, άρα το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Για το τρίγωνο ΕΔΘ ισχύει ότι* $(ΕΘΔ)=\frac{1}{4}(ΑΓΔ)$, *όμοια* $(ΘΗΓ)=\frac{1}{4}(ΓΔΒ)$ *και* $(ΗΖΒ)=\frac{1}{4}(ΑΓΒ)$ *και* $(ΑΖΕ)=\frac{1}{4}(ΑΒΔ)$

Δηλαδή $(ΕΖΗΘ)=(ΑΒΓΔ)-[(ΕΔΘ)+(ΓΘΗ)+(ΖΒΗ)+ΑΖΕ)]$, *οπότε μα αντικατάσταση και πράξεις έχουμε το ζητούμενο:* $(ΕΖΗΘ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$

*Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.7.1.

38) Να κατασκευαστεί τρίγωνο από τη βάση του α, τη προσκείμενη σ' αυτήν γωνία Β, και το ύψος $υ_α$.

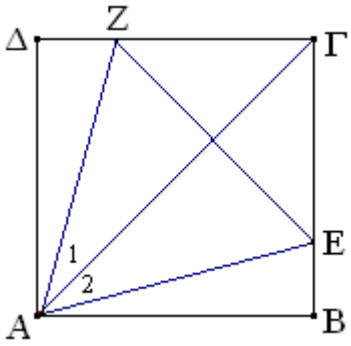


Ανάλυση: Αφού η βάση α είναι δεδομένη αρκεί να προσδιοριστεί η κορυφή Α. Αφού το ύψος είναι δεδομένο η Α βρίσκεται σε μια ευθεία παράληλη προς τη βάση και απέχουσα κατά το δεδομένο ύψος από αυτήν. Επίσης βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία η οποία σχηματίζει δεδομένη γωνία Β με τη βάση α.

Κατασκευή: (προφανής από την ανάλυση)

Παράδειγμα και ασκήσεις στην αναλυτικοσυνθετική μέθοδο

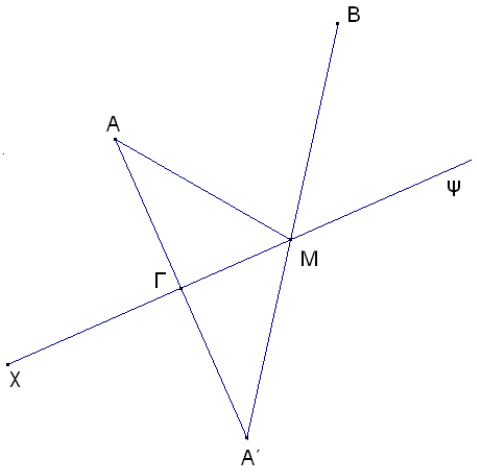
Πρόταση πρόβλημα: *Σε δοθέν τετράγωνο να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου μία κορυφή να συμπίπτει με μία κορυφή του τετραγώνου.*



Ανάλυση: Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισόπλευρο τρίγωνο έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με την εκφώνηση και είναι το ΑΕΖ, εγγεγραμμένο στο δοθέν τετράγωνο το ΑΒΓΔ.
Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι ίσα καθότι είναι ορθογώνια και έχουν ίσες τις υποτείνουσες, ως πλευρές ισοπλεύρου τριγώνου, και ίσες τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΔ, ως πλευρές του τετραγώνου.
Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ, η οποία διχοτομεί τη γωνία Α του τετραγώνου. Αν λοιπόν από τις ίσες γωνίες στις οποίες μοιράζεται η Α αφαιρέσουμε αντίστοιχα τις ΔΑΖ και ΕΑΒ που είναι ίσες, τα υπόλοιπα θα είναι ίσα, δηλαδή $\angle A_1=\angle A_2$. Αυτό σημαίνει ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία Α του τριγώνου η οποία είναι 60 μοίρες. Άρα $\angle A_1=\angle A_2=30^o$. Οπότε οι πλευρές ΑΒ και ΑΖ είναι κατασκευάσιμες σε σχέση με την ΑΓ.
Σύνθεση: Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου και με κορυφή το σημείο Α, και πλευρά ΑΓ, κατασκευάζουμε γωνία $A_2=30^o$, η πλευρά της οποίας τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΕ γράφουμε περιφέρεια η οποία τέμνει τη ΔΓ στο Ζ. Φέρουμε και τις ΕΖ και ΑΖ. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι το ζητούμενο.
Απόδειξη: Αφού ΑΕ=ΑΖ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα καθότι είναι ορθογώνια και έχουν ίσες τις υποτείνουσες. Άρα οι γωνίες ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσες. Αν τις αφαιρέσουμε αντίστοιχα από τις ΓΑΒ και ΓΑΔ που είναι ίσες, τα υπόλοιπα θα είναι ίσα. Άρα $\angle A_1=\angle A_2$ δηλαδή η ΖΑΕ είναι 60^o. Οπότε και οι γωνίες της βάσης ΕΖ είναι60^o μοίρες η κάθε μία αφού το ΑΕΖ είναι, ισοσκελές άρα είναι και ισόπλευρο.
Διερεύνηση: Αφού η κατασκευή της A_2 $(=30^o)$ είναι πάντα εφικτή άρα το πρόβλημα έχει πάντα λύση, η οποία είναι και μοναδική διότι η πλευρά της A_2 θα τμήσει σε ένα και μοναδικό σημείο την απέναντι στην γωνία Α πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

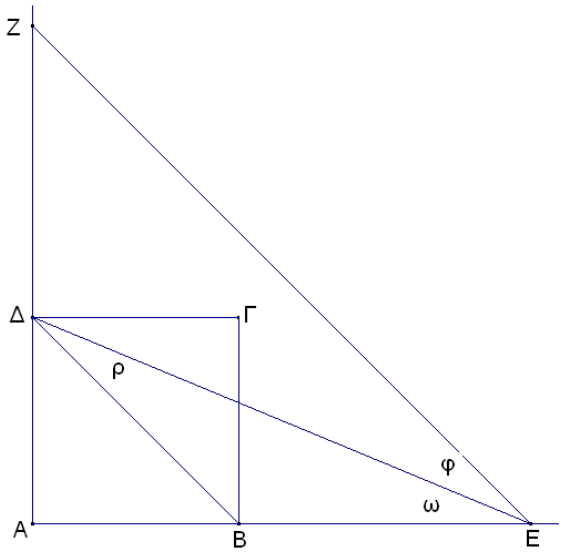
Ασκήσεις για εφαρμογή:

1) **Πρόταση πρόβλημα:** *Δίδεται μια ευθεία* Χ,Ψ *και δύο σημεία τα* Α *και* Β *στο ίδιο ημιεπίπεδο. Να βρεθεί πάνω στην* ΧΨ *ένα σημείο* Μ *τέτοιο ώστε* γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΧ)



Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο σημείο είναι το Μ. Φέρνουμε από το Α κάθετη στην ΧΨ και προεκτείνουμε την ΒΜ προς το Μ. Οι δύο ευθείες τέμνονται σ' ένα σημείο έστω το Α΄.
Τα δύο τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΜΑ καθότι:
γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΨ)=γων(ΓΜΑ΄),
έχουν κοινή την ΓΜ και είναι ορθογώνια. Οπότε ΑΓ= ΓΑ' που σημαίνει ότι το Α΄ είναι συμμετρικό του Α. και άρα κατασκευάσιμο, άρα κατασκευάσιμη είναι και η ΒΑ΄.
Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το συμμε-τρικό Α΄ του Α και φέρνουμε την Α΄Β η οποία θα τμήσει την στο Μ. Το Μ είναι το ζητούμενο.
Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΧ). Πράγματι: Τα δύο τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΜΑ, είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια, από την κατασκευή του συμμετρικού του Α, έχουν μια κοινή πλευρά και γων(ΑΜΧ)=γων(ΧΜΑ΄), αλλά και γων(ΓΜΑ΄)=γων(ΧΜΑ΄), οπότε και γων(ΑΜΧ)=γων(ΒΜΨ)=γων(ΓΜΑ).
Διερεύνηση: Αφού, από τα δεδομένα, τα Α και Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο, το Β και το συμμετρικό τα Α σε σχέση με την ΧΨ θα είναι εκατέρωθεν της ΧΨ. Έτσι η ΒΑ΄ θα έχει ένα κοινό σημείο με την ΧΨ. Αν το Α και το Β βρίσκονται πάνω στην ίδια κάθετο προς τη ΧΨ τότε η περίπτωση είναι τετριμμένη.

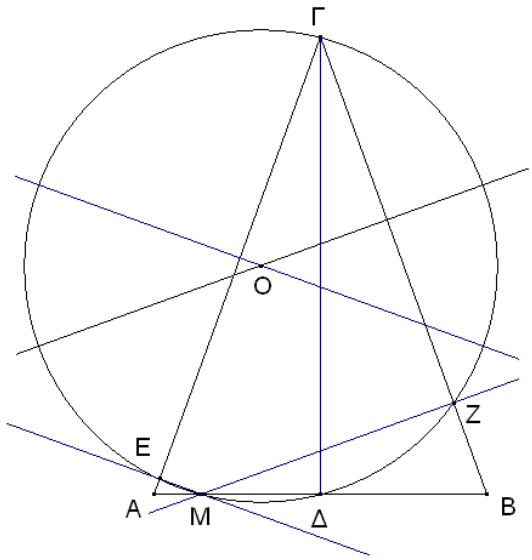
2) **Πρόταση πρόβλημα:** *Να κατασκευαστεί τετράγωνο με δεδομένο το άθροισμα της πλευράς και της διαγωνίου του.*



Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο τετράγωνο είναι το ΑΒΓΔ με ΑΒ+ΒΔ=λ δεδομένο. Προεκτεί-νουμε την ΑΒ προς το Β και παίρνουμε ΒΕ=ΒΔ και την ΑΔ προς το Δ και παίρνουμε ΑΖ=ΔΒ. Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΔ και ΑΕΖ είναι ισοσκελή ορθογώνια, άρα γων(ΑΒΔ)=γων(ΑΕΖ) άρα ΒΔ//ΕΖ. Φέρνουμε την ΔΕ. Οπότε από το ισοσκελές από

τη κατασκευή τρίγωνο ΔΕΒ έχουμε ω=ρ, ενώ από την παραλληλία των ΒΔ και ΕΖ, φ=ρ, άρα ω=φ, δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος τη ΑΕΖ, δηλαδή κατασκευάσιμη.
Σύνθεση: Κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ με κάθετες πλευρές ίσες με λ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της ΑΕΖ, η οποία τέμνει την απέναντι πλευρά στο Δ. Ορίζουμε πάνω στην ΑΕ σημείο Β τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΒ και φέρνουμε κάθετες στα Β και Δ που τέμνονται στο Γ. Τα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.
Απόδειξη: Το τετράπλευρο είναι από την κατασκευή τετράγωνο. Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι ΒΔ+ΑΒ=λ. ή ότι ΒΔ=ΒΕ. Από την κατασκευή ΑΒ=ΑΔ άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές ορθογώνιο όπως και το ΑΕΖ οπότε από την ισότητα των γωνιών των βάσεών του έχουμε ότι ΒΔ//ΕΖ, άρα φ=ρ αλλά και φ=ω καθότι η ΕΔ είναι διχοτόμος, άρα ω=ρ δηλαδή το ΔΒΕ είναι ισοσκελές άρα ΒΔ=ΒΕ.

3) **Πρόταση θεώρημα:** *Αν από τυχόν σημείο της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου αχθούν κάθετες προς τις ίσες πλευρές του τριγώνου, τότε τα ίχνη των καθέτων, η κορυφή και το μέσον της βάσης, βρίσκονται πάνω στην ίδια περιφέρεια.*



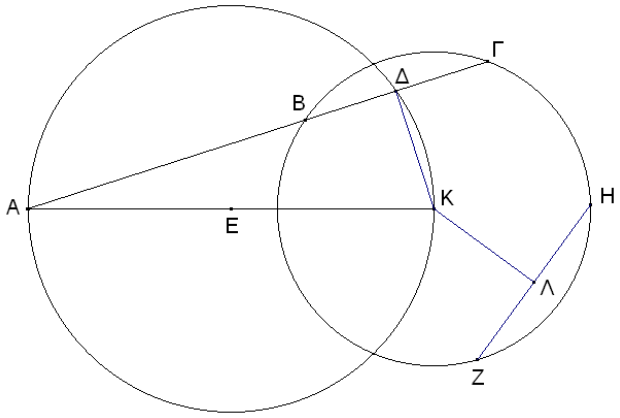
Έστω τρίγωνο ισόπλευρο το ΑΒΓ και Μ τυχόν σημείο της βάσης του και Δ το μέσον της. Από το Μ φέρνουμε τις ΜΕ και ΜΖ κάθετες στις ίσες πλευρές Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μια περιφέρεια που περνά από τα Ε, Μ, Δ, Ζ, και Γ.
(Ανάλυση: Ξέρουμε πως για να είναι τέσσερα διαφορετικά σημεία πάνω στην ίδια περιφέρεια θα πρέπει να είναι κορυφές ενός εγγράψιμου τετραπλεύρου.)
Το τετράπλευρο ΕΜΔΓ έχει δύο απέναντι γωνίες την Ε και τη Δ παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο. Όμοια και το ΕΜΖΓ. Οι κύκλοι δε που τα περιγράφουν έχουν τρία κοινά σημεία τα Ε, Μ και Γ άρα ταυτίζονται. Υπάρχει λοιπόν μια περιφέρεια που περνά τα Ε, Μ, Δ, Ζ, και Γ.

4) **Πρόταση πρόβλημα:** *Από δοθέν σημείο* Α *να αχθεί ευθεία τέμνουσα δοθέντα κύκλο, ώστε επί της ευθείας αυτής να ορίζεται χορδή δεδομένου μήκους.*

Ανάλυση: Έστω ότι έχει αχθεί η τέμνουσα από το σημείο Α, η ΑΓ η οποία τέμνει τον κύκλο με κέντρο το Κ αποκόπτοντας τη χορδή ΒΓ ίση με τη δοσμένη. Ενώνουμε το μέσον Δ της χορδής με το Κ. Τρίγωνο ΑΚΔ που σχηματίζεται, είναι ορθογώνιο με τη ΑΚ δεδομένη και την ΚΔ

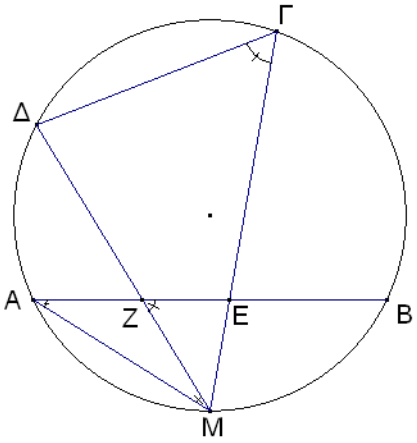
κατασκευάσιμη αφού η ΒΓ είναι δεδομένη (ίσες χορδές απέχουν εξ' ίσου από το κέντρο του κύκλου) άρα το ΑΚΔ είναι κατασκευάσιμο.

Σύνθεση: Με κέντρο τυχόν σημείο του δεδομένου κύκλου και ακτίνα ίση με το μήκος της δεδομένης χορδής ορίζω μια χορδή την ΖΗ και ενώνω το μέσον της Λ με το Κ. Με υποτείνουσα την ΑΚ κατασκευάζω ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά ίση με τη ΚΛ, το ΑΚΔ. Το Δ θα πέσει προφανώς στο εσωτερικό του κύκλου. Προεκτείνω την ΑΔ η οποία τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Η ΑΓ είναι η ζητούμενη τέμνουσα.



Απόδειξη: Επειδή το ΚΔ είναι ορθογώνια εκ κατασκευής η κδ είναι κάθετη στην ΒΓ, η ΚΔ είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τη χορδή. Όμως ΚΔ=ΚΛ, Άρα ΒΓ=ΖΗ αφού απέχουν το ίδιο από το κέντρο.

5] **Πρόταση θεώρημα:** *Δίδεται κύκλος* Ο *και μια χορδή του η* ΑΒ. *Από το μέσον* Μ *της του τόξου* ΑΒ *φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες την* ΜΔ *και* ΜΓ*, οι οποίες τέμνουν τη χορδή* ΑΒ *στα σημεία* Ζ *και* Ε *αντίστοιχα. Τότε το σχηματιζόμενο τετράπλευρο* ΖΕΓΔ *είναι εγγράψιμο σε κύκλο.*

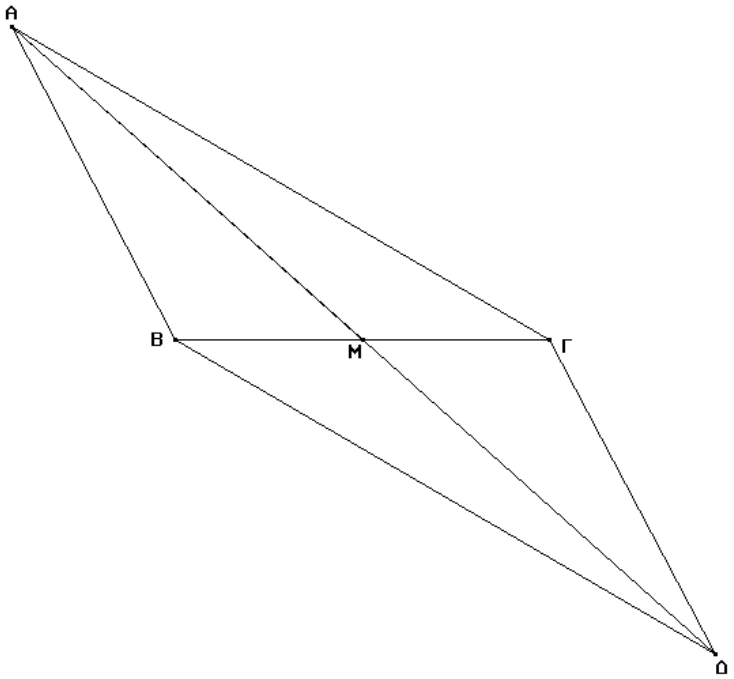


(Ανάλυση: Αρκεί να αποδείξουμε ότι μια γωνία, η Γ ισούται με την απέναντι εξωτερική της την Ζ. Η Ζ όμως ως εξωτερική του τριγώνου ΑΖΜ είναι γων(Ζ)= γων(Α) +γων(Μ).

Όμως η Α βαίνει στο τόξο ΜΒ και ως εγγεγραμμένη είναι το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης, δηλαδή ίση με το μισό του τόξου ΜΑ, και το ίδιο συμβαίνει με την Μ και το τόξο ΑΔ. Δηλαδή: γων(Ζ)=τοξ(ΜΒ)/2+τοξ(ΑΔ)/2, αλλά τοξ(ΜΒ)=τοξ(ΜΑ). Άρα: γων(Ζ)=τοξ(ΑΜ)/2=γων(Γ)

6] **Πρόταση πρόβλημα:** *Να κατασκευασθεί τρίγωνο από τα εξής στοιχεία:*

a) β, γ, μ_α

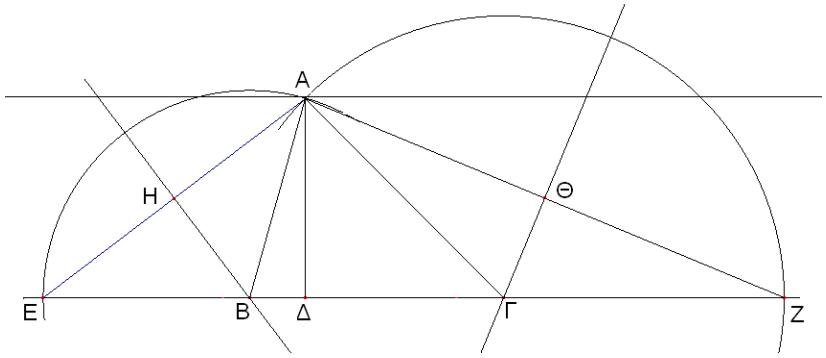


a)

Υπόδειξη:

Προεκτείνουμε τη διάμετρο μ_α κατά ίσο τμήμα το ΜΔ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι κατασκευάσιμο.

b) 2τ, Α, υ_α



Υπόδειξη: Προεκτείνουμε τη βάση προς Β και Γ και παίρνουμε αντίστοιχα ΒΕ=ΒΑ και ΓΖ=ΓΑ. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι κατασκευάσιμο καθότι ΕΖ είναι δεδομένο, το ύψος ΑΔ επίσης, και η γωνία ΕΑΖ, είναι κατασκευάσιμη αφού είναι (π-Α/2), ενώ τα σημεία Β και Γ προσδιορίζονται από τις μεσοκάθετες στις ΑΕ και ΑΖ.

a. Α, υ_α, μ_α
b. Α, α, μ_α
c. Α, α, υ_α
d. Α, α, ρ (ρ= ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου)

7] *Να αχθεί ευθεία η οποία να απέχει από δύο δοθέντα σημεία δοθείσες αποστάσεις.*

8] *Δίδεται ένας κύκλος και ένα σημείο εκτός αυτού. Να αχθεί ευθεία που να διέρχεται από το σημείο και να είναι εφαπτόμενη στον κύκλο.*

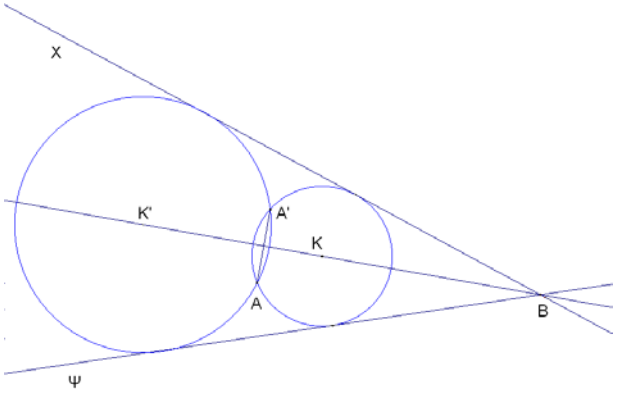
9] *Δίδεται ευθεία και σημείο εκτός αυτής. Να κατασκευαστεί κύκλος με κέντρο το δοθέν σημείο εφαπτόμενος στην ευθεία.*

10] Δέκα προβλήματα που αποδίδονται στον Απολλώνιο

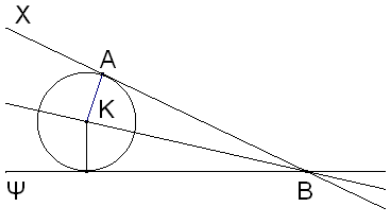
i. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη από τρία δοθέντα σημεία*
(πρόκειται για την περιγεγραμμένη σε τρίγωνο περιφέρεια)

ii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη από δύο δοθέντα σημεία και εφαπτόμενη δοθείσης ευθείας*

iii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη διά δοθέντος σημείου και εφαπτόμενη δύο δοθέντων ευθειών*



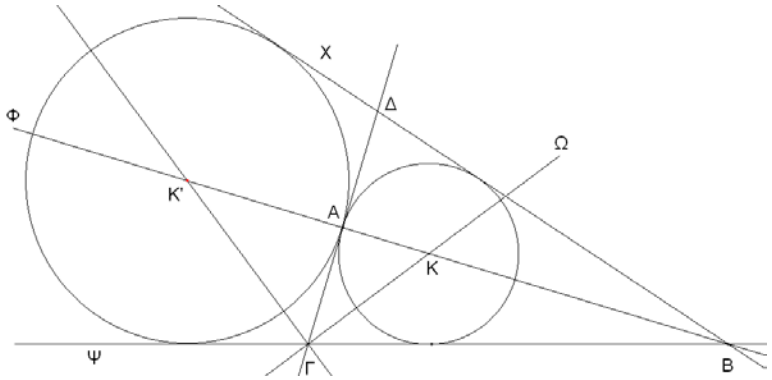
1η Περίπτωση: Έστω οι δοθείσες ευθείες οι Χ και Ψ ότι τέμνονται στο Β και ότι το δοθέν σημείο Α δεν βρίσκεται πάνω σε καμιά από τις δοθείσες ευθείες, ούτε πάνω στην διχοτόμο της γωνίας των Χ και Ψ. Έστω ακόμη ότι η ζητούμενη περιφέρεια έχει κατασκευαστεί και είναι αυτή με κέντρο το Κ. Το Κ προφανώς βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας ΧΒΨ, ενώ το συμμετρικό του Α, το Α' που είναι κατασκευάσιμο, θα βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην κατασκευή περιφέρεια που διέρχεται από δυο δεδομένα σημεία το Α και το Α' και εφάπτεται δοθείσας της Χ (ή της Ψ).



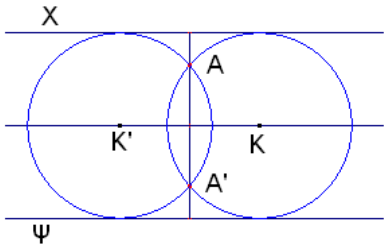
2η Περίπτωση: Έστω οι δοθείσες ευθείες οι Χ και Ψ ότι τέμνονται στο Β και ότι το δοθέν σημείο Α βρίσκεται πάνω σε μία από τις δοθείσες ευθείες, έστω την Χ. Τότε η ζητούμενη περιφέρεια που πρέπει να διέρχεται από το Α θα είναι εφαπτόμενη στην Χ, άρα το κέντρο

της θα βρίσκεται πάνω στην κάθετο της Χ στο σημείο Α και επίσης πάνω στη διχοτόμο. Το πρόβλημα τότε έχει μία λύση.

3η Περίπτωση: Έστω ότι οι δοθείσες ευθείες, οι Χ και Ψ, τέμνονται στο Β και ότι το δοθέν σημείο Α βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας των Χ και Ψ. Αν φέρουμε τη διερχόμενη από το Α κάθετη στη διχοτόμο ΒΦ, τότε ο ζητούμενος κύκλος ό εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΓΒΔ, ενώ μια δεύτερη λύση είναι ο προεγγεγραμμένος στη γωνία ΧΒΨ:



4η Περίπτωση: Αν οι χ και ψ είναι παράλληλες και το Α βρίσκεται εντός της ζώνης των παραλλήλων τότε έχουμε δύο λύσεις:



iv. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτομένη τριών δοθεισών ευθειών*

v. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχομένη από δύο δοθέντα σημεία και εφαπτόμενη δοθείσας περιφέρειας.*

vi. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη δια δοθέντος σημείου και εφαπτόμενη δοθείσας ευθείας και δοθείσας περιφέρειας.*

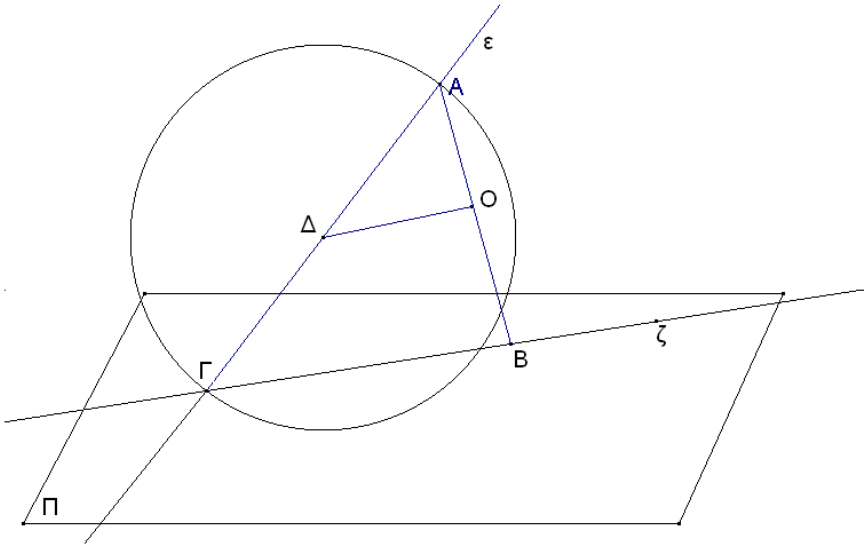
vii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτόμενη δοθείσας ευθείας και εφαπτόμενη δύο δοθεισών περιφερειών*

viii. *Να κατασκευαστεί περιφέρεια διερχόμενη διά δοθέντος σημείου και εφαπτόμενη δύο δοθεισών περιφερειών.*

ix. Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτόμενη δύο δοθεισών ευθειών και δοθείσας περιφέρειας.

x. Να κατασκευαστεί περιφέρεια εφαπτόμενη τριών δοθεισών περιφερειών.

11] **Πρόταση πρόβλημα:** *Δίδεται επίπεδο* Π, *ευθεία ε και τυχόν σημείο* Ο, *εκτός του* Π *και εκτός της* ε. *Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα* ΑΒ, *διερχόμενο από το* Ο *και τέτοιο ώστε το* Α *να κείται επί της* ε, *το* Β *επί του επιπέδου* Π *ενώ το* Ο *να είναι το μέσον του.*



Ανάλυση: Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο Γ και ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, στο παραπάνω σχήμα είναι το ζητούμενο. Ενώνουμε το Β με το Γ και πάνω στο επίπεδο που ορίζουν τα Α, Β και Γ, πάνω στο οποίο προφανώς βρίσκεται το Ο, φέρνουμε από το Ο παράλληλο στην ΒΓ. Αυτή θα τμήσει την ΑΓ στο σημείο Δ, το οποίο είναι το μέσον του ΑΓ. Το σημείο Δ λοιπόν είναι κατασκευάσιμο, όπως κατασκευάσιμη είναι και η ευθεία Γζ ως τομή του Π με το επίπεδο που ορίζει η δεδομένη ευθεία ε με το δεδομένο σημείο Ο.

Σύνθεση: Έστω Γζ η τομή του Π με το επίπεδο που ορίζει η ε με το Ο. Πάνω στο επίπεδο αυτό φέρνω παράλληλο από το Ο προς την Γζ και έστω Δ η τομή της με την ε. Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΓ γράφω περιφέρεια πάνω στο επίπεδο που ορίζει η ε με το Ο. Αυτή θα τμήσει την ε στο Α. Φέρνω την ΑΟ η οποία προεκτεινόμενη θα τμήσει την Γζ (ως ομοεπίπεδες) στο Β. Το ΑΒ είναι το ζητούμενο.

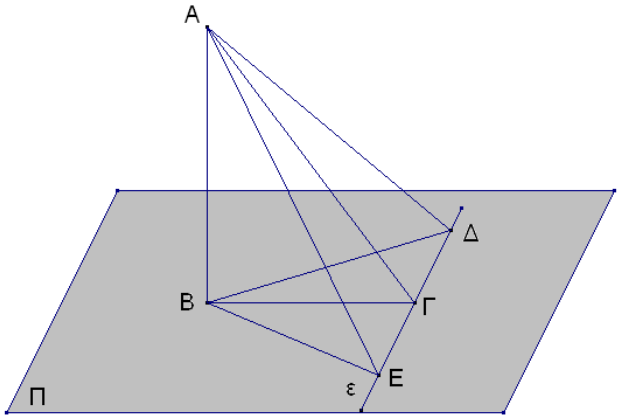
Απόδειξη: Το Δ είναι, από την κατασκευή, το μέσον της ΓΑ. Στο τρίγωνο ΑΓΒ η ΑΔ διέρχεται από το μέσον Δ της ΑΓ κα είναι παράλληλη προς την ΓΒ, άρα περνά από το μέσον Ο της ΑΒ.

Διερεύνηση: Στην περίπτωση που η ε τέμνει το επίπεδο Π, η παραπάνω λύση είναι μονοσήμαντη, αφού το Δ ορίζεται μονοσήμαντα.
Αν η ε είναι παράλληλη προς το Π το πρόβλημα δεν έχει λύση.

12] Θεώρημα των τριών Καθέτων:

Εάν μια ευθεία, έστω η ΑΒ, *είναι κάθετος πάνω σ' ένα επίπεδο* Π *και η* ΒΓ *κάθετη πάνω σε μια ευθεία, έστω την* ε, *του επιπέδου* Π, *τότε η* ΑΓ *είναι κάθετος στην* ε.

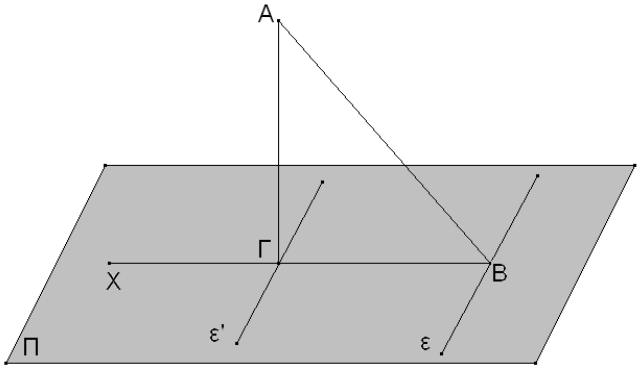
(ΑΝΑΛΥΣΗ: Διερευνούμε τις περιπτώσεις που μια ευθεία είναι κάθετη σε μια άλλη για να δούμε ποια μπορεί εδώ να αξιοποιηθεί π.χ. ακτίνα και εφαπτόμενη, διαδοχικές πλευρές ορθογωνίου, ύψος τριγώνου, διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου άρα και ύψος, κλπ. Εξετάζουμε το τελευταίο.)



Παίρνουμε δύο σημεία πάνω στην ε εκατέρωθεν του Γ και ισαπέχοντα απ' αυτό, τα Δ και Ε. Αν αποδείξουμε ότι ΑΔ = ΑΕ, έχουμε τελειώσει καθότι τότε η ΑΓ θα είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΑΔ, από την κατασκευή, άρα και ύψος.
Πράγματι στα τρίγωνα ΒΓΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες μία προς μία τις κάθετες πλευρές, (η ΒΑ είναι κοινή, ενώ από την κατασκευή ΒΓ είναι μεσοκάθετος στην ΕΔ) οπότε για τον ίδιο λόγο είναι ίσα και τα ΑΒΕ και ΑΒΔ, άρα και ΑΕ = ΑΔ. Το οποίο ήταν προς απόδειξη.

13] Θεώρημα των τριών Καθέτων (αντίστροφο):

Από ένα τυχαίο σημείο το Α *έξω από ένα επίπεδο, το* Π, *φέρνουμε την* ΑΒ *κάθετη πάνω σε τυχαία ευθεία του επιπέδου* Π, *έστω την ε, και πάνω στο επίπεδο* Π *την* ΒΧ *κάθετη στην* ε. *Αν από το* Α *φέρουμε μία κάθετη στην* ΒΧ, *τότε αυτή θα είναι κάθετη στο επίπεδο* Π.



Επειδή η ε είναι κάθετη στην ΑΒ αλλά και στην ΒΧ, άρα είναι κάθετη στο επίπεδο ΧΒΑ. Φέρνουμε από το Γ μία παράλληλη στην ε, η οποία θα είναι κάθετη και στο επίπεδο ΧΒΑ, οπότε θα είναι κάθετη στην ΓΑ που είναι ευθεία του επιπέδου ΧΒΑ. Η ΑΓ λοιπόν είναι κάθετη στην ε΄ και στην ΒΧ άρα είναι κάθετη στο επίπεδο Π.