Λύσεις Θεμάτων στην Πραγματική Ανάλυση ΙΙΙ

Τμήμα Μαθηματικών

10 Μαρτίου 2015

Θέμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6+2y^2}, & \text{αν} \quad x^6+2y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x^6+2y^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(α) Δείξτε ότι όλες οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση στο $(0,0)$ υπάρχουν.
(β) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.
(γ) Είναι συνεχείς οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$;

Λύση: (α) Η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{v} = (v_1, v_2)$ είναι (όταν $v_2 \neq 0$)

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 v_1^2 h v_2}{h(h^6 v_1^6 + 2h^2 v_2^2)}$$

και το όριο αυτό είναι τελικά ίσο με

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_1^2 v_2}{h^3(h^4 v_1^6 + 2v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{h^4 v_1^6 + 2v_2^2} = \frac{v_1^2}{2v_2}$$

Οταν $v_2 = 0$ παίρνουμε τη μερική παράγωγο ως προς y, οποία είναι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)}{h} = 0$$

(β) Επιλέγοντας ειδικές διαδρομές προσέγγισης στο $(0,0)$ διαπιστώνουμε ότι η το όριο δεν υπάρχει, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Π.χ, για $y = kx^3$ βρίσκουμε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^6+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^5}{x^6+2k^2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{x(1+2k^2)}$$

δεν υπάρχει.

(γ) Οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ δε μπορούν να είναι συνεχείς, γιατί σε μια τέτοια περίπτωση η συνάρτηση θα ήταν διαφορίσιμη σε αυτό το σημείο, άρα και συνεχής, κάτι που δεν ισχύει, όπως είδαμε παραπάνω.

Θέμα 2: Εστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου $x = u+v$, $y = u-v$. Αν $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με $h(u,v) = f(u+v, u-v)$, αποδείξτε ότι

$$h_{uu} + h_{vv} = 2(f_{xx} + f_{yy})$$

Λύση: Είναι $h_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u$, δηλαδή $h_u = f_x + f_y$, οπότε

$$\begin{aligned} h_{uu} &= f_{xx} \cdot x_u + f_{xy} \cdot y_u + f_{yx} \cdot x_u + f_{yy} \cdot y_u \\ &= f_{xx} + f_{xy} + f_{yx} + f_{yy} \end{aligned}$$

Επίσης $h_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v$, δηλαδή $h_v = f_x - f_y$, οπότε

$$\begin{aligned} h_{vv} &= f_{xx} \cdot x_v + f_{xy} \cdot y_v - f_{yx} \cdot x_v - f_{yy} \cdot y_v \\ &= f_{xx} + f_{xy} \cdot (-1) - f_{yx} - f_{yy} \cdot (-1) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 3: Βρείτε τα σημεία της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(3, 1, -1)$.

Λύση: Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση της απόστασης από το δοσμένο σημείο, δηλαδή την

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

ή, ισοδύναμα, την $f = d^2$, υπό τη συνθήκη $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Από τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange ψάχνουμε λοιπόν σημεία στα οποία είναι $\nabla f = \lambda \nabla g$, δηλαδή $2(x-3) = \lambda 2x$, $2(y-1) = \lambda 2y$, $2(z+1) = \lambda 2z$. Λύνοντας ως προς λ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση της σφαίρας βρίσκουμε

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} = 4,$$

απ΄ όπου προκύπτει $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$ και τελικά ότι το ζητούμενο σημείο είναι το $(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$.

Θέμα 4: Δίνεται μια συνάρτηση $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ορίζουμε τη συνάρτηση $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$F(x, y) = (f(x, y),\ f(xf(x, y), y)\ )$$

Να αποδείξετε ότι, αν (x_0, y_0) είναι τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ και $f(x_0, y_0) \neq 1$, τότε η F είναι αντιστρέψιμη σε κάποια γειτονιά του (x_0, y_0).

Λύση: Σύμφωνα με το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης η δοθείσα συνάτηση αντιστρέφεται τοπικά στα σημεία εκείνα όπου δεν μηδενίζεται η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f(x \cdot f(x, y), y) & \frac{\partial}{\partial y}(f(x \cdot f(x, y), y)) \end{vmatrix}$$

Οι μερικές παράγωγοι που εμφανίζονται στη δεύτερη γραμμή της ορίζουσας είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\ f(x\cdot f(x,y),y)\ ) &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot f(x,y))+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+f(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial x})+0 \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+f(x,y))
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\ f(x\cdot f(x,y),y)\ ) &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x\cdot f(x,y))+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x+1),
\end{aligned}
$$

οπότε η ορίζουσα γίνεται ίση με

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+f(x,y)) & \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x+1)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\ x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+1-x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-f(x,y)\ )=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(1-f(x,y))
$$

επομένως η δοθείσα συνάρτηση αντιστρέφεται τοπικά σε όλα εκείνα τα σημεία του πεδίου ορισμού της όπου είτε δε μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είτε δεν παίρνει η συνάρτηση την τιμή 1.

Θέμα 5: Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με

$$
\vec{F}(x,y,z)=y\cos x\vec{i}+x\sin y\vec{j}+z^2\vec{k}
$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\vec{F}=\mathrm{grad}f$.

Λύση: Επειδή οι συναρτήσεις που συμμετέχουν στον ορισμό της F έχουν προφανώς συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, αν υπήρχε μια τέτοια f, θα είχαμε $\mathrm{rot}(\ \mathrm{grad}f\ )=\vec{0}$. Ομως

$$
\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}
\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\
y\cos x & x\sin y & z^2
\end{vmatrix}
$$

$$
=(\cos x-\sin y)\vec{k}
$$

που σημαίνει ότι ο στροβιλισμός της F δεν είναι ταυτοτικά ίσος με $\vec{0}$, άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.