ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Πρόσθετη Εξέταση 2013-2014

Θέμα 1 (2 μονάδες). Έστω $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ το μοντέλο της σφαίρας του Riemann που δίνεται μέσω στερεογραφικής προβολής.
(α) Βρείτε μετασχηματισμό Möbius T του $\widehat{\mathbb{C}}$ τέτοιο ώστε

$$T(i) = 0, \qquad T(-1) = 1, \qquad T(1) = \infty.$$

(β) Να εξεταστεί αν υπάρχει ισομετρία S του $\widehat{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε

$$S(i) = 0, \qquad S(-1) = 1, \qquad S(1) = \infty.$$

Λύση.
(α) Από απλή εφαρμογή γνωστού θεωρήματος, ο μοναδικός τέτοιος μετασχηματισμός δίνεται από τον τύπο

$$T(z) = \frac{(1-i)z - (1+i)}{z-1},$$

για κάθε $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.
(β) Αν υπήρχε τέτοια ισομετρία S, τότε, από τον τύπο της χορδικής μετρικής $d(\cdot,\cdot)$, θα είχαμε

$$2 = d(-1,1) = d(S(-1), S(1)) = d(1,\infty) = \sqrt{2},$$

άτοπο.

Θέμα 2 (2 μονάδες).
(α) Έστω P εσωτερικό σημείο τριγώνου ABC στο Ευκλείδειο επίπεδο. Έστω ότι η ευθεία AP συναντά το ευθύγραμμο τμήμα BC στο σημείο A', η ευθεία BP συναντά το ευθύγραμμο τμήμα AC στο σημείο B' και η ευθεία CP συναντά το ευθύγραμμο τμήμα AB στο σημείο C'. Αποδείξτε τη σχέση van Aubel:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}.$$

(β) Έστω I το έκκεντρο τριγώνου ABC. Έστω A' το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{BAC}$ με την πλευρά BC. Δείξτε ότι

$$\frac{IA}{IA'} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

Λύση.
(α) Από το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο $AA'B$, έχουμε

$$\frac{C'A}{C'B}\frac{CB}{CA'}\frac{PA'}{PA} = 1.$$

Επομένως,

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{PA}{PA'}\frac{CA'}{CB}.$$

Όμοια, από το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο $AA'C$, παίρνουμε

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{PA}{PA'}\frac{BA'}{BC}.$$

Αθροίζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις κατά μέλη, έπεται ότι

$$\frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} = \frac{PA}{PA'}\frac{CA' + BA'}{BC} = \frac{PA}{PA'}.$$

(β) Η ευθεία CI είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ACB}$. Έστω C' το σημείο τομής της με την πλευρά AB. Όμοια, η ευθεία BI είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ABC}$. Έστω B' το σημείο τομής της ευθείας BI με την πλευρά AC. Από το μέρος (α), έχουμε

$$\frac{IA}{IA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}.$$

Το πηλίκο $\frac{C'A}{C'B}$ ισούται με το πηλίκο των εμβαδών των τριγώνων $AC'C$ και $BC'C$, διότι τα δύο τρίγωνα έχουν κοινό ύψος που ξεκινάει από την κορυφή C. Το τελευταίο πηλίκο με τη σειρά του ισούται με το πηλίκο $\frac{AC}{BC}$, διότι τα ύψη των τριγώνων $AC'C$ και $BC'C$ που ξεκινούν από την κορυφή C' είναι ίσα (αφού $\widehat{ACC'} = \widehat{BCC'}$). Επομε΄νως, $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{BC}$. Όμοια, $\frac{B'A}{B'C} = \frac{AB}{BC}$, και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θέμα 3 (3 μονάδες).
(α) Υπάρχουν παραλληλόγραμμα στη σφαιρική γεωμετρία;
(β) Υπάρχουν παραλληλόγραμμα στην προβολική γεωμετρία;
(γ) Υπάρχουν παραλληλόγραμμα στην ουδέτερη γεωμετρία;

Λύση.
(α) Όχι, αφού δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες στη σφαιρική γεωμετρία.
(β) Όχι, αφού δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες στην προβολική γεωμετρία.
(γ) Ναι. Μπορούμε να κάνουμε την εξής κατασκευή: Έστω A σημείο μιας ευθείας L_1. Όπως έχουμε δείξει στην τάξη, μπορούμε να φέρουμε κάθετη ευθεία L_2 στην L_1 που να περνάει από το A. Έστω B σημείο της L_2 διαφορετικό από το A. Μπορούμε να φέρουμε κάθετη ευθεία L_3 στην L_2 που να περνάει από το B. Θεωρούμε σημείο C στην ευθεία L_3 διαφορετικό από το B. Μπορούμε να φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα CD στην L_1. Από κατασκευής, το τετράπλευρο $ABCD$ έχει τρείς ορθές γωνίες (τέτοια τετράπλευρα ονομάζονται τετράπλευρα Lambert). Οι ευθείες L_1 και L_3 είναι παράλληλες, διότι αν τεμνόντουσαν σε σημείο E τότε το τρίγωνο ABE θα είχε δύο ορθές γωνίες, άτοπο, αφού το άθροισμα δύο οποιοωνδήποτε γωνιών τριγώνου της ουδέτερης γεωμετρίας είναι μικρότερο του π. Όμοια, οι ευθείες L_2 και CD είναι παράλληλες. Επομένως, το τετράπλευρο $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 4 (2 μονάδες). Έστω $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ το μοντέλο Poincaré του υπερβολικού επιπέδου. Έστω $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ η απεικόνιση με τύπο $f(z) = z - 2z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2$, για κάθε $z \in \mathcal{H}$.
(α) Δείξτε ότι $f(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ και ότι η f διατηρεί το υπερβολικό εμβαδό.
(β) Διατηρεί η f το υπερβολικό μήκος;

Λύση.
(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η f δίνεται από τον τύπο $(x, y) \mapsto (x - 4y^2, y)$, άρα ισχύει ότι $\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(z)$, για κάθε $z \in \mathcal{H}$. Επομένως, $f(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$. Επίσης, ο Jacobian πίνακας του μετασχηματισμού $(x, y) \mapsto (x - 4y^2, y)$ έχει παντού ορίζουσα 1. Αφού το απειροστό υπερβολικό εμβαδό δίνεται από $\frac{dx\ dy}{y^2}$, ο τύπος αλλαγής μεταβλητών σε διπλό ολοκλήρωμα δείχνει ότι η f διατηρεί το υπερβολικό εμβαδό.
(β) Όχι. Αρκεί να δείξουμε ότι η f δεν είναι ισομετρία του $\mathcal{H}$. Παρατηρούμε ότι η υπερβολική ευθεία $\mathrm{Re}(z) = 0$ του $\mathcal{H}$ απεικονίζεται μέσω της f στην καρτεσιανή παραβολή $\{(-4y^2, y) : y > 0\}$ η οποία δεν είναι υπερβολική ευθεία του $\mathcal{H}$. Άρα η f δεν μπορεί να είναι ισομετρία του $\mathcal{H}$.

Θέμα 5 (1 μονάδα). Έστω C_1, C_2, C_3, C_4 κύκλοι στο Ευκλείδειο επίπεδο τέτοιοι ώστε ο C_1 εφάπτεται στον C_2 στο σημείο A, ο C_2 εφάπτεται στον C_3 στο σημείο B, ο C_3 εφάπτεται στον C_4 στο σημείο C και ο C_4 εφάπτεται στον C_1 στο σημείο D. Δείξτε ότι τα σημεία A, B, C και D είναι είτε συνευθειακά είτε ομοκυκλικά.

Λύση. Αν κάποια από τα σημεία A, B, C, D ταυτίζονται, το συμπέρασμα είναι προφανές. Έστω λοιπόν ότι τα σημεία A, B, C, D είναι ανά δύο διαφορετικά. Έστω K τυχαίος κύκλος με κέντρο A που δεν περνάει από κανένα από τα B, C, D. Έστω K_i η εικόνα του κύκλου C_i μέσω του μετασχηματισμού της αντιστροφής στον K, για $i = 1, 2, 3, 4$. Αφού οι εφαπτόμενοι κύκλοι C_1 και C_2 περνάνε από το A, έπεται ότι οι K_1 και K_2 είναι παράλληλες ευθείες. Όμοια, ο K_3 είναι κύκλος που εφάπτεται στην K_2 και στον κύκλο K_4, ο οποίος εφάπτεται επίσης και στην K_1. Έστω P το σημείο επαφής των K_1 και K_4, Q το σημείο επαφής των K_4 και K_3, R το σημείο επαφής των K_3 και K_2. Αν S είναι το κέντρο του K_4 και T είναι το κέντρο του K_3, τότε τα σημεία S, Q, T είναι συνευθειακά και οι ευθείες SP και TR είναι παράλληλες (ως κάθετες στις παράλληλες ευθείες K_1 και K_2, αντίστοιχα). Επομένως, $\widehat{QSP} = \widehat{QTR}$ και συνεπώς τα ισοσκελή τρίγωνα QSP και QTR είναι όμοια. Επομένως, $\widehat{SQP} = \widehat{RQT}$, δηλαδή τα τα σημεία P, Q, R είναι συνευθειακά. Επομένως, οι αντίστροφες εικόνες τους D, C, B (αντίστοιχα) μέσω της συγκεκριμένης αντιστροφής θα βρίσκονται σε κύκλο ή σε ευθεία που περνάει από το A.