

Τίτλος της Διδακτορικής Διατριβής:

Μη Γραμμικά Κύματα στη Ροή Κοκκώδους Ύλης

Όνομα Υποψήφιου Διδάκτορα:

Δημήτριος Ραζής

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή:

- Ιάκωβος βαν ντερ Βέιλε (επιβλέπων), Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
- Αναστάσιος Μπούνης, Professor at the Department of Mathematics, Nazarbayev University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan και Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
- Ιωάννης Τσαμόπουλος, Καθηγητής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περίληψη

Η κοκκώδης ύλη όταν ρέει μέσα σε έναν ανοικτό κεκλιμένο αγωγό μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχές μέσο και κατά συνέπεια η κίνησή της επιδέχεται μια περιγραφή υδροδυναμικού τύπου. Η ιδιαίτερη φύση του κοκκώδους ρευστού λαμβάνεται υπ' όψιν μέσω κατάλληλων καταστατικών σχέσεων για την τριβή με τον πυθμένα του αγωγού και τις ιξώδεις δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στους κόκκους. Στα δύο πρώτα κεφάλαια της παρούσας διατριβής περιγράφεται αυτή η υδροδυναμική προσέγγιση του κοκκώδους στρώματος, στο πλαίσιο της οποίας η δυναμική του στρώματος διέπεται από δύο συζευγμένες μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ). Στις εν λόγω ΜΔΕ, που αποτελούν το κοκκώδες ανάλογο των εξισώσεων Saint-Venant για τη ροή του αβαθούς νερού, κατοπτρίζεται η διατήρηση της μάζας και της ορμής του κοκκώδους στρώματος αντιστοίχως.

Το κοκκώδες στρώμα μπορεί να φιλοξενήσει μια μεγάλη ποικιλία κυματομορφών ανάλογα με την τιμή του αριθμού Froude (Fr) της εισερχόμενης ροής. Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε την περίπτωση $Fr < 2/3$, όπου η ομοιόμορφη ροή είναι ευσταθής. Για αυτές τις τιμές του Fr , στο κοκκώδες στρώμα μπορεί να αναπτυχθεί ένα *μονοκλινές παλιρροϊκό κύμα* όταν η εισροή υλικού από την κορυφή του αγωγού αυξηθεί. Πρόκειται για την κρουστική οδεύουσα δομή που συνδέει δύο περιοχές ομοιόμορφης ροής (πλατώ) με διαφορετικό βάθος.

Στο Κεφάλαιο 4, ξεκινώντας από το μονοκλινές κύμα, παρακολουθούμε την αλληλουχία των κυματομορφών που εμφανίζονται στο κοκκώδες στρώμα όταν ο αριθμός Fr αυξάνεται σταδιακά. Προς τούτο εστιάζουμε στις λύσεις οδεύοντος κύματος των προαναφερθέντων ΜΔΕ και διατυπώνουμε το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα που αποτελείται από δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) πρώτης τάξης. Η ανάλυση ευστάθειας του εν λόγω δυναμικού συστήματος, επικουρούμενη από τα πορτραίτα του χώρου φάσεων για αυξανόμενο Fr , αποκαλύπτει όλες τις διαδοχικές κυματομορφές που δύνανται να αναπτυχθούν στο σύστημα.

Λίγο πριν την κρίσιμη τιμή $Fr = 2/3$ βρίσκουμε μια καινοφανή κυματομορφή, το *κοκκώδες undular bore*, που αποτελεί μια διαταραγμένη μορφή του μονοκλινούς κύματος, η οποία παρουσιάζει κυματισμούς στο υψηλό πλατώ. Όταν ο αριθμός Fr της εισερχόμενης ροής ξεπεράσει την τιμή $2/3$, το υψηλό πλατώ του undular bore αποσταθεροποιείται. Τότε οι κυματισμοί του λειτουργούν ως εστίες περαιτέρω ανάπτυξης των διακυμάνσεων, οδηγώντας στην οργάνωση μιας περιοδικής αλληλουχίας από *roll waves*.

Στο Κεφάλαιο 5 θεωρούμε την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε roll waves διαφορετικού πλάτους. Ένα μεγάλο roll wave οδεύει ταχύτερα από ένα μικρό και τα δύο τους συνενώνονται όταν συναντηθούν. Αυτό συνιστά τη βάση της διαδικασίας εκτράχυνσης που παρατηρείται στις κοκκώδεις ροές για $Fr > 2/3$. Ταυτοχρόνως, τα roll waves τείνουν να εξισώσουν το πλάτος τους (και επομένως την ταχύτητά τους) με μια συγκεκριμένη τιμή που αντιστοιχεί στην ισοκατανομή του κοκκώδους υλικού μεταξύ τους. Προφανώς, η τιμή αυτή αυξάνεται κάθε φορά που συμβαίνει μια συνένωση κυμάτων. Όταν πλέον οι διαδοχικές συνενώσεις έχουν μειώσει το πλήθος των roll waves σε τέτοιο βαθμό ώστε τα κύματα να προλαβαίνουν να φτάσουν στο προαναφερθέν επιθυμητό πλάτος πριν συμβεί μια νέα συνένωση, τότε το σύστημα παραμένει ες αεί στην τρέχουσα κατάσταση, στην οποία όλα τα εναπομείναντα roll waves έχουν ίδιο πλάτος και ταχύτητα. Το φαινόμενο αυτό καλείται "πάγωμα" της διαδικασίας εκτράχυνσης της κοκκώδους ροής.

Εν κατακλείδι, στο Κεφάλαιο 6 συνοψίζουμε τα πιο σημαντικά μας ευρήματα και παρουσιάζουμε προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Abstract

Granular matter flowing down a chute can be successfully modeled as a continuous medium admitting a hydrodynamic-like description. The special nature of the granular fluid is taken into account via appropriate constitutive relations for the friction with the chute and the internal viscous-like forces. In this approach, as elaborated in the first two chapters of this PhD thesis, the dynamics of the granular sheet is fully determined by two coupled nonlinear partial differential equations (PDEs) representing the mass and momentum balances, respectively, which are the granular analogue of the Saint-Venant equations for shallow water flow.

We show that the sheet can host a variety of waveforms, depending on the Froude number Fr of the incoming flow. In Chapter 3 we discuss the regime $Fr < 2/3$, where the uniform flow is stable. Here the sheet is able –when the inflow of material at the top of the chute is increased– to support a *monoclinal flood wave*, i.e., a traveling shock structure connecting two uniformly flowing plateaus of different depths.

In Chapter 4, starting from a monoclinal wave, we follow the sequence of waveforms appearing on the sheet as Fr is gradually increased. In order to do so, we focus on traveling wave solutions of the governing PDEs and formulate the associated dynamical system consisting of two 1st-order ordinary differential equations (ODEs). By performing the stability analysis of this dynamical system, along with a study of its phase space portraits for growing Fr , all successive waveforms are systematically revealed.

Just below the critical value $Fr = 2/3$ we find a novel stable waveform, the granular *undular bore*, which is a perturbed monoclinal wave exhibiting undulations on its upper plateau. When Fr of the incoming flow exceeds $2/3$, the upper plateau of the undular bore is no longer stable and the aforementioned undulations now serve as nucleation points for further wave formation. The plateau ultimately organizes itself in the form of a periodic train of *roll waves*.

Chapter 5 is dedicated to the interaction between non-identical roll waves. A large roll wave travels faster than a small one and the two merge when they meet. This forms the basis for the *coarsening process* observed in granular flows with $Fr > 2/3$. On the other hand, every roll wave tends to adjust its height (and thereby its

velocity) to a specific value that corresponds to an equal distribution of the available granular material among the roll waves on the chute. This value increases step-wise with every merging event. When the repeated mergers have diminished the number of waves on the chute to such a degree that the roll waves manage to reach the targeted equilibrium height before a new merger occurs, then the system stays forever in that same state, with all the surviving waves being equal in height and velocity. We call this phenomenon "arrested coarsening" of granular roll waves.

Finally, in Chapter 6 we summarize our main findings and give an outlook for future research.

Link ανάρτησης της Διδακτορικής Διατριβής (ενδέχεται να χρειαστεί να κάνετε refresh στη σελίδα για να ανοίξει το αρχείο): <https://drive.google.com/open?id=1qI9zFzGvvuynV5mEKuwKuIHtMBEqhMdX>