ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ* ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ * ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 18-9-19

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Δίνεται η καμπύλη $\alpha(t) = (\sin(t^2), t^2+\sqrt{3}, \cos(t^2)+1)$, $t \in [0,\infty)$.

(α) Βρείτε μια παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου, έστω $\beta(t)$, της παραπάνω καμπύλης. **[5]**

(β) Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης $\beta(t)$. **[15]**

(γ) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$F(x,y,z) = ((x+z)/\sqrt{2}, y, (x-z)/\sqrt{2}).$$

Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης $\gamma(s) = F \circ \beta(s)$. **[10]**

(δ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, η οποία να απεικονίζει την καμπύλη $\beta(s)$ σε μια καμπύλη του επιπέδου xy.

[10]

2. Έστω $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2, z > 0\}$.

(α) Χρησιμοποιείστε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για να δείξτε ότι το M είναι μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. **[5]**

(β) Δείξτε ότι η $X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$ είναι μια κανονική παραμέτρηση της M για $u > 0, 0 \leq v \leq 2\pi$. **[5]**

(γ) Υπολογίστε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης και δείξτε ότι η M είναι επίπεδη. **[10]**

(δ) Βρείτε τον πίνακα του τελεστή σχήματος της M και επιβεβαιώστε ότι η M είναι επίπεδη. **[10]**

(ε) Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες και τις κύριες διευθύνσεις της M στο σημείο $(1,0,1)$. **[10]**

3. Έστω $X : U \to \mathbb{R}^3$ μια παραμέτρηση μιας κανονικής επιφάνειας M, έτσι ώστε το διάνυσμα X_u να είναι ανεξάρτητο των u και v. Αποδείξτε ότι η M είναι επίπεδη. **[10]**

4. Μια *ασυμπτωτική διεύθυνση* μιας επιφάνειας είναι μια διεύθυνση στην οποία η κάθετη καμπυλότητα είναι μηδέν. Αποδείξτε ότι στα σημεία μιας επιφάνειας όπου η καμπυλότητα Gauss είναι θετική, δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις. **[10]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

1) α) $\alpha'(t) = (2t\cos(t^2),\ 2t,\ -2t\sin(t^2))$

$$s = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du = \int_0^t 2\sqrt{2}\,u\,du = \sqrt{2}\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{s}{\sqrt{2}}}$$

Άρα $\beta(s) = \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{3},\ \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + 1\right)$ (5)

β) $\beta'(s) = T(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$\beta''(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2},\ 0,\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{\kappa(s) = \|\beta''(s)\| = \frac{1}{2}}$$

(5)

$$\beta''(s) = \kappa(s)N(s) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ 0,\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)}_{N(s)}$$

$$\therefore\ B(s) = T(s)\times N(s) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ & T & \\ & N & \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$B'(s) = \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ 0,\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = -\tau(s)N(s)$$

$$\therefore\ \boxed{\tau(s) = \frac{1}{2}}$$

(10)

γ) Ο πίνακας της F ως προς τις κανονικές βάσεις είναι

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O(3).$$

ορίζουσα $= -1$. (10)

Άρα $\kappa_\gamma(s) = \kappa_\beta(s) = \frac{1}{2}$, $\tau_\gamma(s) = \mathrm{sign}F \cdot \tau_\beta(s) = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

δ) Αν υπήρχε τέτοια ισομετρία, τότε η εικόνα της θα ήταν (10) μια επίπεδη καμπύλη, άρα έχει στρέψη 0. Αλλά η β(s) έχει μη μηδενική στρέψη η οποία διατηρείται μέσω ισομετριών ως προς πρόσημο. Άτοπο

2) α) Έστω $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$. Τότε $g^{-1}(1)=M$.

$\nabla g=(2x,2y,-2z)=(0,0,0) \iff x=y=z=0$. (5)

Αλλά $(0,0,0)\notin M$.

Άρα M κανονική επιφάνεια.

β) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u$ $\quad x^2+y^2=u^2=z^2$.

$X_u=(\cos v,\ \sin v,\ 1)$, $X_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos v & \sin v & 1\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=(-u\cos v)\,i+(u\sin v)\,j+\underbrace{(u\cos^2 v+u\sin^2 v)}_{=u}\,k$$

$\|X_u\times X_v\|=\sqrt{u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v+u^2}=\sqrt{2u^2}=\sqrt{2}|u|>0$ (5)

γ) $F=\langle X_u,X_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\sin v\cos v=0$

$E=\langle X_u,X_u\rangle=1+1=2$, $\quad G=\langle X_v,X_v\rangle=u^2$ (5)

Τότε $K=-\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\dfrac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)=\dots=0$ (5)

δ) $N=\dfrac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v,\ -\sin v,\ 1)$

$X_{uu}=(0,0,0)$, $\quad X_{uv}=(-\sin v,\ \cos v,\ 0)$, $\quad X_{vv}=(-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$

$e=f=0$, $\quad g=\dfrac{u}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore\quad [S_p]=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e & f\\ f & g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac{1}{u^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{u}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2 u}\end{pmatrix}$ (8)

$\therefore K=0$ (2)

ε) $X(u,v)=(1,0,1)\Rightarrow (u,v)=(1,0)$ ή $(1,2\pi)$ (5)

$[S_{(1,0,1)}]=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ Ιδιοτιμές: $0,\ \dfrac{1}{\sqrt2}$ = κύριες καμπυλότητες

Ιδιοδιανύσματα $k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Άρα κύριες διευθύνσεις: $X_u(1,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $X_v(1,0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (5)

3) X_u ανεξάρτητο των u, v άρα $X_{uu} = 0$

Άρα $e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0$.

Επίσης, $X_{uv} = 0$ $\therefore$ $f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$

$\therefore$ $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$. [10]

---

4) Έστω ότι υπάρχει μια ασυμπτωτική διεύθυνση Z σε ένα σημείο $p \in M$. Τότε $k_n(Z) = 0$.

Έστω k_1, k_2 οι κύριες καμπυλότητες στο p που υποθέτω ότι $k_2 \geq k_1$. Τότε από ορισμό των κύριων καμπυλοτήτων

$$k_1 \leq 0 \leq k_2$$

Αλλά $K(p) > 0$ δηλ. οι k_1, k_2 έχουν το ίδιο πρόσημο, αντίφαση ~~και~~ άτοπο. [10]