Λύσεις Θεμάτων στη Μαθηματική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

2 Σεπτεμβρίου 2019

Θέμα 1: (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = 1 - nx, \text{ αν } 0 \leq x < 1/n, \text{ και } f_n(x) = 0, \text{ αν } 1/n \leq x \leq 1.$$

Ομοίως για την ακολουθία συναρτήσεων $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

(β)Δίνεται η συνάρτηση που ορίζεται ως $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin\ kx}{k^3}$ σε ένα κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγός της $f'(x)$ είναι συνεχής.

Λύση: (α) Υπολογίζουμε το όριο της ακολουθίας πραγματικών αριθμών $f_n(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ (το κατα σημείο όριο). Οταν $x = 1$ η ακολουθία αυτή είναι εκείνη που οι όροι της είναι σταθερά ίσοι με 0. Αρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$. Οταν $x = 0$ η ακολουθία αυτή είναι εκείνη που οι όροι της είναι σταθερά ίσοι με 1. Αρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Για $0 < x_0 < 1$ η ακολουθία αυτή είναι εκείνη που οι όροι της γίνονται ίσοι με 0 μετά το πρώτο $n_0 \in \mathbb{N}$ για το οποίο $1/n_0 \leq x_0$. Επομένως για τέτοια x_0 έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$. Είναι φανερό λοιπόν ότι η οριακή συνάρτηση είναι ασυνεχής (στο 0) άρα δεν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση, αφού όλες οι f_n είναι συνεχεις συναρτήσεις.

Εύκολα παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0$. Ελέγχουμε αν η σύγκλιση προς τη μηδενική συνάρτηση είναι ομοιόμορφη υπολογίζοντας το $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{\frac{x}{1+nx^2} \mid x \in [0,1]\}$. Επειδή η κάθε συνάρτηση $g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα, γνωρίζουμε ότι θα παίρνει μέγιστη τιμή εκεί. Παραγωγίζοντας διαπιστώνουμε ότι σημείο μεγίστου είναι το $x = \sqrt{n}/n$ και ότι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει η g_n είναι $\sqrt{n}/2n$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\frac{x}{1+nx^2} \mid x \in [0,1]\} = 0,$$

που σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Σε αυτό το ερώτημα μπορεί επίσης κάποιος να εφαρμόσει το θεώρημα του Dini, παρατηρώντας ότι ισχύει, για κάθε $x \in [0,1]$, πως $g_(x) \geq g_{n+1}(x)$.

(β) Η συνάρτηση f ορίζεται ορθά με το συγκεκριμένο τύπο γιατί η δοθείσα σειρά συγκλίνει. Για την ακρίβεια συγκλίνει ομοιόμορφα, όπως μπορούμε να δούμε χρησιμοποιώντας το M-test του Weierstrass: $f_k(x) = |\frac{sin\ kx}{k^3}| \leq \frac{1}{k^3} = M_k$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού, και η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει. Η ακολουθία $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ των μερικών αθροισμάτων είναι προφανώς παραγωγίσιμη ως πεπερασμένο άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η ακολουθία των παραγώγων της είναι η $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{cos\ kx}{k^2}$ και συγκλίνει επίσης ομοιόμορφα, πάλι χρησιμοποιώντας το M-test, αφού $|\frac{cos\ kx}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού, και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Από το βασικό θεώρημα που παρουσιάσαμε στην τάξη περί εναλλαγής αθροισμάτων σειρών και παραγώγων, προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη κι ότι

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos\ kx}{k^2}$$

Η τελευταία είναι λοιπόν ομοιόμορφο όριο συναρτήσεων που είναι συνεχείς, άρα είναι και η ίδια συνεχής.

Θέμα 2: (α) Αποδείξτε ότι, αν $A \subseteq X$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου και $S \subseteq X$ είναι υποσύνολο τέτοιο ώστε $A \cap S = \emptyset$, τότε $A \cap \bar{S} = \emptyset$. ($\bar{S}$ είναι η κλειστή θήκη του S.)

(β) Δώστε μία σύντομη εξήγηση ως προς το γιατί είναι πυκνά τα παρακάτω σύνολα: Το $\mathbb{Q} \times \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ το σύνολο των αρρήτων) εντός του $\mathbb{R}^2$ και το σύνολο των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων από το $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$ εντός του συνόλου των συνεχών συναρτήσεων με αυτό το πεδίο ορισμού.

Λύση: (α) Αφού $A \cap S = \emptyset$, τότε $S \subseteq A^c$ και δεδομένου ότι ο τελεστής της κλειστής θήκης διατηρεί τη σχέση υποσυνόλου, παίρνουμε $\bar{S} \subseteq \bar{A^c} = A^c$. Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί το A^c είναι κλειστό (ως συμπλήρωμα ανοικτού) και από αυτο παίρνουμε ότι $\bar{S} \cap A = \emptyset$.

(β) Θέλουμε πρώτα να δείξουμε ότι η κλειστή θήκη του $\mathbb{Q} \times \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ είναι το $\mathbb{R}^2$, δηλαδή ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $(p, u) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{I}$ ώστε $\sqrt{(x-q)^2 + (y-u)^2} < \varepsilon$. Αυτό ισχύει γιατί τόσο οι ρητοί, όσο και οι άρρητοι είναι πυκνοί μέσα στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή μπορούμε να βρούμε ρητό q και άρρητο u ώστε $|x - q| < \varepsilon/2$ και $|y - u| < \varepsilon/2$.

Αναφορικά με τις απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις, γνωρίζουμε ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι τέτοιες. Δηλαδή το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού κάποιο $[a, b]$ είναι υποσύνολο των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων με το ίδιο πεδίο ορισμού. Επειδή το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα συμπαγές σύνολο (όπως είναι το $[a, b]$ εν προκειμένω) είναι πυκνό μέσα στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων επί του ιδίου συνόλου (θεώρημα Stone - Weierstrass), και το ευρύτερο σύνολο των απείρως παραγωγίσιμων θα είναι πυκνό.

Θέμα 3: (α) Δίνεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι R. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n x^n$.

(β) Υπολογίστε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Λύση: (α) Η ακτίνα σύγκλισης R μίας δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ προκύπτει από τη σχέση $1/R = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ επομένως για την ακτίνα σύγκλισης R'της $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n x^n$ έχουμε

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n a_n} = \limsup_{n\to\infty} 2 \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{R}$$

δηλαδή $R' = R/2$.

(β) Εύκολα βλέπουμε ότι $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ ενώ έχουμε ότι $a_n = 0$ γιατί η ταυτοτική είναι περιττή συνάρτηση.

Επίσης

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x sin(nx)\, dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}[x cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Θέμα 4: Δοθέντος ενός μετρικού χώρου (X, ρ), ορίζουμε την απόσταση ενός σημείου $x \in X$ από ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ του χώρου ως $\rho(x, A) = \inf \{\rho(x, a) \mid a \in A\}$.

(α) Δοθέντος ενός μετρικού χώρου (X, ρ) και ενός υποσυνόλου $A \subseteq X$ του χώρου, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_A \colon X \to \mathbb{R}$ με $f_A(x) = \rho(x, A)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.

(β) Αν $K \subseteq X$ είναι ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου, θέτουμε $\rho(K, A) = \inf\{\rho(x, A) \mid x \in K\}$. Αποδείξτε ότι, αν το K είναι συμπαγές, τότε υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $\rho(K, A) = \rho(x_0, A)$.

Λύση: (α) Για δεδομένο $x \in X$ θέλουμε, για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\rho(x, y) < \delta$, να είναι $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| < \varepsilon$. Μπορούμε να θεωρήσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $\rho(y, A) \geq \rho(x, A)$ (διαφορετικά εναλλάσουμε τους ρόλους των x και y στα παρακάτω):

Αφού $\rho(x, A) = \inf \{\rho(x, a) \mid a \in A\}$, γνωρίζουμε ότι, για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(x, a) < \rho(x, A) + \eta$. Αυτό μας δίνει (χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για τη μετρική), για το συγκεκριμένο a ότι

$$\rho(y, A) \leq \rho(y, a) \leq \rho(x, y) + \rho(x, a) < \rho(x, y) + \rho(x, A) + \eta,$$

επομένως $\rho(y, A) - \rho(x, A) = |\rho(y, A) - \rho(x, A)| < \rho(x, y) + \eta$. Αυτό ισχύει για κάθε $\eta > 0$ επομένως έχουμε ότι $|\rho(y, A) - \rho(x, A)| \leq \rho(x, y)$.

Το τελευταίο μας επιτρέπει να πούμε ότι όποιο $\varepsilon > 0$ κι αν μας δοθεί, παίρνοντας $\delta = \varepsilon$, αν $\rho(x, y) < \delta$, τότε $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| < \varepsilon$.

Η παραπάνω απόδειξη δόθηκε από έναν από τους εξεταζόμενους. (Μπράβο Χ.Σ!) Μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε και με αμεσότερο τρόπο, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του infimum και όχι τις ιδιότητές του που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

(β) Το $\rho(K, A)$ είναι το infimum των τιμών της συνεχούς συνάρτησης f_A καθώς το x διατρέχει το συμπαγές σύνολο K, δηλαδή είναι η εικόνα $f_A[K]$. Γνωρίζουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση το infimum είναι ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $\rho(K, A) = \min f_A[K] = f_A(x_0) = \rho(x_0, A)$.

Θέμα 5: (α) Δώστε ένα παράδειγμα μετρικού χώρου που **δεν** είναι πλήρης και ένα παράδειγμα ρητού αριθμού που **δεν** ανήκει στο σύνολο Cantor. Υπάρχουν άρρητοι αριθμοί στο σύνολο Cantor και γιατί;

(β) Εστω $f\colon [a, b] \to [a, b]$ μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Εστω $k \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε, γιά κάθε $x \in [a, b]$, $|f'(x)| < k$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$, ώστε $f(x_0) = kx_0$.

Λύση: (α) Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν το πιο κλασικό παράδειγμα υποσυνόλου των πραγματικών αριθμών που δεν αποτελεί πλήρη υπόχωρο, αφού η ακολουθία $(1,4\ 1,41\ 1,414\ 1,4142...)$ των ψηφίων του αριθμού $\sqrt{2}$ συγκλίνει στον αριθμό $\sqrt{2}$ που δεν είναι ρητός.

Το σύνολο του Cantor δεν περιέχει αριθμούς που βρίσκονται στο διάστημα $(1/3, 2/3)$, επομένως για παράδειγμα ο ρητός $1/2$ δεν ανήκει στο σύνολο αυτό.

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο του Cantor είναι υπεραριθμήσιμο, επομένως δε μπορεί να περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς, το σύνολο των οποίων είναι αριθμήσιμο.

(β) Πρόκειται να εφαρμόσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach για τον πλήρη μετρικό χώρο $[a, b]$. Δε θα το εφαρμόσουμε όμως απ΄ ευθείας στη συνάρτηση f αλλά στην g με $g(x) = f(x)/k$, για $x \in [a, b]$. Η παράγωγός της είναι $g'(x) = f'(x)/k$. Επειδή ορίζεται στο συμπαγές $[a, b]$ παίρνει μέγιστη τιμή, ας την πούμε M. Εχουμε ότι $M/k < 1$. Ελέγχουμε αν η g είναι συστολή: Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε x, $y \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει z μεταξύ των x και y ώστε $g(x) - g(y) = g'(z)(x - y) = (f'(z)/k)(x - y)$. Επομένως $|g(x) - g(y) \leq (M/k)|x - y|$, που σημαίνει ότι η g είναι συστολή. Επομένως υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $g(x_0) = x_0$, που σημαίνει ότι $f(x_0) = kx_0$.