Εξέταση στην Αλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

27 Ιουνίου 2019

Θέμα 1: Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 5$, $g(x) = 2x^3 + x^2 + x$ στο $\mathbb{Z}_7[x]$. Βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους και πολυώνυμα $a(x)$, $b(x)$ τέτοια ώστε $\mu\kappa\delta(f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$.

Θέμα 2: (α) Αν A είναι μοναδιαίος, αντιμεταθετικός δακτύλιος και $a \in A$, ορίζουμε

$$N = \{f \in A[x] \mid f(a) = 0\}, \qquad M = \{f(a) \in A \mid f \in A[x]\}.$$

Αποδείξτε ότι το N είναι ιδεώδες του $A[x]$ και ότι $A[x]/N \cong M$.

(β) Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}[x]/ < 2x - 1 >$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Q}$.

Θέμα 3: Πόσα στοιχεία έχει η ομάδα S_3 των μεταθέσεων ενός συνόλου τριών στοιχείων. Πόσες και ποιές από αυτές τις μεταθέσεις είναι άρτιες και πόσες περιττές; Είναι κανονική η υποομάδα A_3 των αρτίων μεταθέσεων και γιατί; Είναι κυκλική;

Θέμα 4: Περιγράψτε τα στοιχεία της (πολλαπλασιαστικής) ομάδας $U(\mathbb{Z}_{10})$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{10}$ και αποδείξτε ότι είναι κυκλική. Αν γνωρίζουμε ότι G είναι μία πεπερασμένη ομάδα και ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων $\varphi\colon U(\mathbb{Z}_{10}) \to G$, τέτοιος ώστε $\{1_G\} \neq \mathrm{Im}\varphi \neq G$, βρείτε την τάξη του πυρήνα $|\mathrm{Ker}\varphi|$.

Θέμα 5: Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 3x - 3$.

(α) Εξετάστε αν είναι ανάγωγο ή αναλύστε το σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\mathbb{Q}[x]/ < f(x) > \cong \ (\mathbb{Q}[x]/ < x - 1 >) \ \times \ (\mathbb{Q}[x]/ < x^3 + 3x^2 + 6x + 3 >)$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ