Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

24 Ιουνίου 2019

Θέμα 1: (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο πεδίο ορισμού της η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{2n}{nx+3}$.

(β)Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Βρείτε το κατά σημείο όριο της ακολουθίας $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ των παραγώγων της και εξετάστε αν η σύγκλιση των f_n' είναι ομοιόμορφη.

Θέμα 2: (α) Δίνεται ο μετρικός χώρος (X,d) και η συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,x') = d(x,x') + |f(x) - f(x')|$ ορίζει μετρική επί του X. Επίσης αποδείξτε ότι η συνάρτηση $i\colon (X,\rho) \to (X,d)$ με $i(x) = x$ είναι συνεχής.

(β) Δώστε, κατά περίπτωση, αντιπαραδείγματα υποσυνόλων A, B κάποιου μετρικού χώρου για τα οποία δεν ισχύουν οι ισότητες $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ και $\operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$. Ποιός από τους δύο εγκλεισμούς υποσυνόλων $\subseteq$ ή $\supseteq$ ισχύει κατά περίπτωση και γιατί;

Θέμα 3: Αποδείξτε ότι

$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} dx = \frac{e}{e^2 - 1}$$

Θέμα 4: (α) Θεωρούμε εντός ενός μετρικού χώρου (X,d) μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο $x \in X$. Είναι το σύνολο $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ συμπαγές;

(β) Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (X,d)$. Είναι το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[(-n,n)]$ συνεκτικό;

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας και στα δύο ερωτήματα.

Θέμα 5: (α) Δίνεται ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

(β) Δίνεται ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ και ότι η $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g \circ f$. (Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ μεταξύ μετρικών χώρων λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\ x,\ x' \in X\ (d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$$

κι ότι μία συνεχής συνάρτηση με συμπαγές πεδίο ορισμού είναι ομοιόμορφα συνεχής)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ