ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ$*$ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ $*$ ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 5-6-19

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Έστω $\alpha(s)$ μια καμπύλη με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s)$ και στρέψη $\tau_\alpha(s)$. Ορίζουμε την καμπύλη $\beta(s) = \int_0^s B_\alpha(u)du$, όπου $B_\alpha(s)$ το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της α.

(α) Αποδείξτε ότι η καμπύλη β έχει παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου. **[5]**

(β) Αποδείξτε ότι η β έχει καμπυλότητα $\kappa_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$, στρέψη $\tau_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$, εφαπτόμενο διάνυσμα $T_\beta(s) = B_\alpha(s)$, κάθετο διάνυσμα $N_\beta(s) = -N_\alpha(s)$ και δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B_\beta(s) = T_\alpha(s)$. **[25]**

2. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου. Υποθέτουμε ότι για το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ ισχύει $f(s)T(s) = a$, για κάποιο μη μηδενικό *σταθερό* διάνυσμα a και κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα της γ σε κάθε σημείο της είναι παράλληλη με το διάνυσμα a. Δείξτε ότι η γ είναι ευθεία. **[30]**

3. Βρείτε όλες τις επιφάνειες εκ περιστροφής του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα Gauss $K = 0$ παντού.
(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι η επιφάνεια προκύπτει με περιστροφή της καμπύλης $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$ με $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$, περί τον άξονα x. Τότε μια παραμέτρηση μιας τέτοιας επιφάνειας είναι η $X(u, v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v)$, $g(u) > 0$.) **[30]**

4. **(α)** Έστω M_1 και M_2 κανονικές επιφάνειες με τοπικές παραμετρήσεις $X(u, v)$ και $Y(u, v)$ αντίστοιχα, επί του ανοικτού $U \subset \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι αν για τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές ισχύει ότι $I_{X(u,v)} = I_{Y(u,v)}$ για κάθε $(u, v) \in U$, τότε οι M_1 και M_2 έχουν την ίδια καμπυλότητα Gauss στα σημεία $X(u, v)$ και $Y(u, v)$ αντίστοιχα. **[5]**

(β) Αποδείξτε ότι μια επίπεδη επιφάνεια ελάχιστης έκτασης είναι τμήμα ενός επιπέδου. **[5]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!