

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Ασκήσεις VI (Λύσεις)

Οι #6, #7, ~~#2~~ έχουν λυθεί στην τάξη.

#3. Η από κοινού πυκνότητα των X_1, X_2 είναι $f(x_1, x_2) = \frac{1}{c(2\pi)} e^{-\frac{1}{2 \cdot 4} x_1^2 - \frac{1}{2 \cdot 9} (x_2 - 1)^2}$, $x_i \in \mathbb{R}, i=1,2$. Συγκρίνοντας με τον γενικό τύπο της (από κοινού) πυκνότητας δι-
διάστατης κανονικής προκύπτει ότι η από κοινού κατανομή των X_1, X_2 είναι η
διδιάστατη κανονική $N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ με $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Επο-
μένως, και η από κοινού κατανομή των Y_1, Y_2 είναι $N_2(\underline{\nu}, \Sigma_0)$ με $\underline{\nu} =$
 $\begin{pmatrix} EY_1 \\ EY_2 \end{pmatrix}$ και $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \text{Var} Y_1 & \text{Cov}(Y_1, Y_2) \\ \text{Cov}(Y_1, Y_2) & \text{Var} Y_2 \end{pmatrix}$. $EY_1 = E(2X_1 + X_2 + 1) = 2$, $EY_2 = E(X_1 -$
 $- X_2) = -1$, $\text{Var} Y_1 = 25$, $\text{Var} Y_2 = 13$,

$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 2 \text{Var} X_1 - \text{Var} X_2 = -1$. Οι περιθώριες είναι κανονικές, $Y_1 \sim N(2, 25)$,
 $Y_2 \sim N(-1, 13)$. Η δεσμευμένη κατανομή $Y_2 | Y_1 = 0$ είναι κανονική
 $N(\nu_0, \sigma_0^2)$ όπου $\nu_0 = EY_2 + \rho \frac{\sqrt{\text{Var} Y_2}}{\sqrt{\text{Var} Y_1}} (y_1 - EY_1) = -1 + \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{\text{Var} Y_1} (0 - 2)$
 $= -1 + \frac{2}{25} = -\frac{23}{25}$, και $\sigma_0^2 = (1 - \rho^2) \text{Var} Y_2 = (1 - \frac{1}{25 \cdot 13}) 13 = 13 - \frac{13}{25}$.

#4. (α) Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της λύσης της #2, Ασκήσεις V,
 $E X_1 = 100 \cdot 0.40 = 40$, $\text{Var} X_1 = 100 \cdot 0.40 \cdot 0.60 = 24$, επειδή $X_1 \sim B(n, p)$,
 $n=100, p=0.40$. (β) $P(X_1 > 30) = 1 - P(X_1 \leq 30) = 1 - \sum_{x=0}^{30} \binom{100}{x} (0.40)^x \cdot (0.60)^{100-x}$.
Προερχόμαστε μέσω ΚΟΘ: Η X_1 ως διωνυμική είναι άθροισμα $n=100$ ανεξαρτήτων
και ισονόμων Bernoulli $B(1, p)$. Άρα $X_1 \approx N(n\bar{p}, n\bar{p}q)$, και επομένως
 $P(X_1 > 30) = 1 - P(X_1 \leq 30) = 1 - P\left(\frac{X_1 - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}q}} \leq \frac{30 - 40}{\sqrt{24}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{24}}\right)$
 $= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\right) = \Phi(2.041) = 0.979$.

#5. Θέτουμε X = ποσότητα ραδιενέργειας που δέχεται εργαζόμενος κατά τη
διάρκεια μιας ημέρας, ~~...~~ $\mu=0.1$ και $\sigma=0.01$. Επίσης θέτουμε
 X_i την ποσότητα ραδιενέργειας την i ημέρα, $i=1, \dots, 100$. Τότε $S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i$ είναι
η συνολική ποσότητα που δέχεται στις $n=100$ ημέρες.
(α) $P(S_n > 10.02) = 1 - P(S_n \leq 10.02) = 1 - P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{10.02 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$
 $\approx 1 - P(Z \leq \frac{10.02 - 10}{10 \cdot 0.01}) = 1 - P(Z \leq 0.2) = 1 - \Phi(0.2) \approx 1 - 0.5793 = 0.4207$.
(β) Δίνεται ότι $X \sim E(\lambda)$, όπου $\lambda = \frac{1}{EX} = \frac{1}{0.1} = 10$. Θεωρούμε ως "Επιτυχία"
το ενδεχόμενο ο εργαζόμενος να δεχτεί ραδιενέργεια περισσότερη από τη
μέση τιμή. Τότε $p = P(E) = P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda \cdot 0.1} = e^{-1}$
 ≈ 0.368 . Ορίζουμε $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν την } i \text{ ημέρα η ραδιενέργεια} > \text{μέση τιμή} = 0.1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$.
Τότε $Y = \sum_{i=1}^{600} Y_i$ είναι ο αριθμός των ημερών (μεταξύ των 600) $i=1, \dots, 600$
με ραδιενέργεια > 0.1 , δηλ. $Y \sim B(n=600, p=e^{-1})$. Η κατανομή της Y προε-
γίνεται μέσω ΚΟΘ από $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = n p$, $\sigma^2 = n p q$. Άρα $P(Y > 252)$
 $= 1 - P(Y \leq 252) = 1 - P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{252 - \mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{252 - 600 \cdot 0.368}{\sqrt{600 \cdot 0.368 \cdot 0.632}}\right) =$
 $= 1 - \Phi(2.56) \approx 1 - 0.9946 = 0.0054$.

#1. Εξ ορισμού η από κοινού κατανομή των X_1, X_2 είναι διδιδαστική κανονική. Οι παράμετροι είναι:

$$EX_1 = \mu_1, EX_2 = \mu_2, \text{Var} X_1 = \sigma_1^2, \text{Var} X_2 = \text{Var}(\mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2) \\ = \sigma_2^2 \rho^2 \text{Var} Z_1 + \sigma_2^2 (1-\rho^2) \text{Var} Z_2 = \sigma_2^2, \\ \text{ανέξ.}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(\sigma_1 Z_1 + \mu_1, \mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho \text{Var} Z_1 = \sigma_1 \sigma_2 \rho, \\ \text{ανέξ.}$$

$$\text{Επομένως, } \underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}, \Sigma), \text{ όπου}$$

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \text{ και } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \text{ με πυκνότητα}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{A\}}, \quad A = \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

#8. Για $t > 0$, και $\varepsilon > 0$ έχουμε $P(X \geq \varepsilon) = P(tX \geq t\varepsilon) =$

$$= P(e^{tX} \geq e^{t\varepsilon}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{t\varepsilon}} = \frac{M_X(t)}{e^{t\varepsilon}} = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{e^{t\varepsilon}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2 - t\varepsilon}$$

$$\text{Επομένως, } P(X \geq \varepsilon) \leq \inf \{ e^{\frac{1}{2}t^2 - t\varepsilon} : t > 0 \} = e^{-\varepsilon^2/2},$$

$$\text{επειδή η } e^x \text{ είναι γνησίως αύξουσα και } \inf \{ \frac{1}{2}t^2 - t\varepsilon : t > 0 \} = \\ = \min \{ \frac{1}{2}t^2 - t\varepsilon \} = -\varepsilon^2/2 \text{ (για } t = \varepsilon).$$