Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ – Ασκήσεις V (Λύσεις)

$\boxed{\#1.}$ Θέτουμε $X_i =$ αριθμός εμφανίσεων του αριθμού i, $i=1,\dots,6$. Τότε $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_6) \sim \Pi_6(n=24;\, p_1,\dots,p_6)$ με $p_i = \frac{1}{6}$ $\forall i$.

(α). $P(X_6=5,\ X_4=3,\ X_2=6,\ X_1+X_3+X_5=10) = \frac{24!}{5!\,3!\,6!\,10!}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{3}{6}\right)^{10}$

(β) $P(X_i=4,\ \forall i=1,\dots,6) = \frac{24!}{(4!)^6}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^4\right]^6$

(γ) $P(X_6\le 1,\ X_4\le 1) = P(X_6=0,\ X_4=0,\ \overbrace{X_1+X_2+X_3+X_5}^{Y}=24) + P(X_6=1,\ X_4=0,\ Y=23) + P(X_6=0,\ X_4=1,\ Y=23) + P(X_6=1,\ X_4=1,\ Y=22) = \frac{24!}{0!\,0!\,24!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^{24} + \frac{24!}{1!\,0!\,23!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^{23} + \frac{24!}{0!\,1!\,23!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^{23} + \frac{24!}{1!\,1!\,22!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^{22}.$

(δ) $P(X_2+X_4+X_6=12) = \binom{24}{12}\left(\frac{3}{6}\right)^{12}\left(\frac{3}{6}\right)^{12}$, $X_2+X_4+X_6 \sim B(n=24,\ p=1/2)$.

$\boxed{\#2.}$ $X_1 =$ αριθμός αυτοκινήτων που στρίβουν αριστερά, και ανάλογα X_2 για δεξιά, X_3 για ευθεία πορεία. $\underset{\sim}{X} = (X_1,X_2,X_3) \sim \Pi_3(n=5;\, p_1,p_2,p_3)$ με $p_1=0.40$, $p_2=0.25$, $p_3=0.35$.

(α) $P(X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=3) = \frac{5!}{1!\,1!\,3!}(0.40)^1(0.25)^1(0.35)^3.$

(β) $P(X_1\le 1,\ X_2=3) = P(X_1=0,\ X_2=3,\ X_3=2) + P(X_1=1,\ X_2=3,\ X_3=1) = \frac{5!}{0!\,3!\,2!}(0.40)^0(0.25)^3(0.35)^2 + \frac{5!}{1!\,3!\,1!}(0.40)^1(0.25)^3(0.35)^1.$

$\boxed{\#3.}$ X_i, $i=1,2,3,4$, αριθμός ατόμων που ανήκουν στην A, B, AB, O αντίστοιχα. $\underset{\sim}{X} = (X_1,X_2,X_3,X_4) \sim \Pi_4(n=12;\, p_1,p_2,p_3,p_4)$, $p_1=0.38$, $p_2=0.10$, $p_3=0.03$, $p_4=0.49$.

(α) $P(X_1=5,\ X_4=6,\ X_2=1,\ X_3=0) = \frac{12!}{5!\,6!\,1!\,0!}(0.38)^5(0.49)^6(0.10)^1(0.03)^0$

(β) $P(X_1+X_3\le 1,\ X_4=5) = P(X_1+X_3=0,\ X_4=5,\ X_2=7) + P(X_1+X_3=1,\ X_4=5,\ X_2=6) = \frac{12!}{0!\,5!\,7!}(0.41)^0(0.49)^5(0.10)^7 + \frac{12!}{1!\,5!\,6!}(0.41)^1(0.49)^5(0.10)^6.$

(γ) $X_3 \sim B(n=12,\ p=0.03)$, $P(X_3=0) = (0.97)^{12}$

$\boxed{\#4.}$ (α) $3p_2+3p_1=1 \Rightarrow 3p_2+6p_2=1 \Rightarrow p_2=\frac{1}{9}$ και $p_1=\frac{2}{9}$.

(β1) $X_i =$ αριθμός εμφανίσεων του αριθμού (έδρας) i, $i=1,\dots,6$.

$\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_6) \sim \Pi_6(n=12;\, p_1,p_2,p_1,p_2,p_1,p_2)$

$P(X_i=2,\ \forall i=1,\dots,6) = \frac{12!}{(2!)^6}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^3\left[\left(\frac{2}{9}\right)^2\right]^3$

(β2) $P(X_2+X_6=2,\ X_1\le 2) = P(X_2+X_6=2,\ X_1=0,\ \overbrace{X_3+X_4+X_5}^{Y}=10) + P(X_2+X_6=2,\ X_1=1,\ Y=9) + P(X_2+X_6=2,\ X_1=2,\ Y=8) = \frac{12!}{2!\,0!\,10!}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^0\left(\frac{5}{9}\right)^{10} + \frac{12!}{2!\,1!\,9!}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^1\left(\frac{5}{9}\right)^9 + \frac{12!}{2!\,2!\,8!}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^8.$

$\boxed{\#5 \text{ και } \#6.}$ Έχουν λυθεί στην τάξη.