Θεωρία Πιθανοτήτων II - Λύσεις των Ασκήσεων V -

#1. Βάσει του ορισμού σύγκλισης κατά κατανομή, αρκεί να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, όπου $F_n(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $n(1-X_{(n)})$ και $F(x) = 1-e^{-x}$, $x \geq 0$, ή $F(x) = 0$, $x<0$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{E}(1)$ (η οποία μάλιστα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$).

Για $x<0$, έχουμε $F_n(x) = P(n(1-X_{(n)}) \leq x) = 0$, $\forall n=1,2,\ldots$ επειδή η τ.μ. $n(1-X_{(n)})$ παίρνει θετικές τιμές (με πιθανότητα 1). Άρα, τετριμμένα, για $x<0$, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0 = F(x)$.

Για $x \geq 0$, $F_n(x) = P(n(1-X_{(n)}) \leq x) = P(X_{(n)} \geq 1-\frac{x}{n}) = 1$, αν $n \leq x$, ενώ αν $n>x$ έχουμε $F_n(x) = P(X_{(n)} \geq 1-\frac{x}{n}) = 1 - P(X_{(n)} < 1-\frac{x}{n}) \underset{a.i.}{=} 1-[P(X_1 < 1-\frac{x}{n})]^n = 1-(1-\frac{x}{n})^n$.

Επομένως για $x \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\{1-(1-\frac{x}{n})^n\} = 1-e^{-x} = F(x)$.

#2. Η τ.μ. $X_\lambda \sim P(\lambda)$ έχει ροπογεννήτρια $M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η τ.μ. $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, ως γραμμικός μετασχηματισμός της X_λ έχει ροπογεννήτρια $M_\lambda(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t} M(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}) = e^{-\sqrt{\lambda}t} \cdot e^{\lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}}-1)} =$
$= e^{-\sqrt{\lambda}t+\lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}}-1)}$

Βάσει του Θεωρήματος συνέχειας, αρκεί να δειχθεί ότι $M_\lambda(t) \to M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$, καθώς $\lambda \to \infty$. Ισοδύναμα, αρκεί να δειχθεί ότι
$-\sqrt{\lambda}t + \lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}}-1) \to \frac{1}{2}t^2$, καθώς $\lambda\to\infty$.

Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0, έχουμε $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\cdot e^y$, όπου $|y|<|x|$. Συνεπώς για $x = t/\sqrt{\lambda}$, παίρνουμε

$$e^{t/\sqrt{\lambda}} = 1+\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} + \frac{t^3}{6\lambda^{3/2}}\cdot e^{y_\lambda}, \text{ όπου } |y_\lambda| < \frac{|t|}{\sqrt{\lambda}}, \text{ οπότε}$$

$$-\sqrt{\lambda}t+\lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}}-1) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}}e^{y_\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{1}{2}t^2,$$
επειδή $y_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$ (αφού $|y_\lambda| < \frac{|t|}{\sqrt{\lambda}} \to 0$)

#3. Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $X_{(n)} - \log n$ είναι $F_n(x) = P(X_{(n)} - \log n \leq x) = P(X_{(n)} \leq x+\log n) \underset{a.i.}{=} [P(X_1 \leq x+\log n)]^n =$
$= [1-e^{-x-\log n}]^n = (1-\frac{e^{-x}}{n})^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{e^{-x}}{n})^n = e^{-e^{-x}} = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.