

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Λύσεις των Ασκήσεων V - 10

#1. Βάσει του ορισμού σύγκλισης κατά κατανομή, αρκεί να δείξει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$, όπου $F_n(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $n(1 - X_{(n)})$ και $F(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$ ή $F(x) = 0, x < 0$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $E(1)$ (η οποία μοιράζεται είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$).
 Για $x < 0$, έχουμε $F_n(x) = P(n(1 - X_{(n)}) \leq x) = 0, \forall n = 1, 2, \dots$ επειδή η τ.μ. $n(1 - X_{(n)})$ παίρνει θετικές τιμές (με πιθανότητα 1). Άρα, τεταημένα, για $x < 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0 = F(x)$.
 Για $x \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = P(n(1 - X_{(n)}) \leq x) = P(X_{(n)} \geq 1 - \frac{x}{n}) = 1, \text{ αν } n \leq x,$
 ενώ αν $n > x$ έχουμε $F_n(x) = P(X_{(n)} \geq 1 - \frac{x}{n}) = 1 - P(X_{(n)} < 1 - \frac{x}{n}) = 1 - [P(X_1 < 1 - \frac{x}{n})]^n = 1 - (1 - \frac{x}{n})^n$.
 Επομένως για $x \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (1 - \frac{x}{n})^n] = 1 - e^{-x} = F(x)$.

#2. Η τ.μ. $X_\lambda \sim P(\lambda)$ έχει ροπογεννήτρια $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, t \in \mathbb{R}$.
 Συνεπώς η τ.μ. $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, ως γραμμικός μετασχηματισμός της X_λ έχει ροπογεννήτρια $M_\lambda(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t} M(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}) = e^{-\sqrt{\lambda}t} \cdot e^{\lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1)} = e^{-\sqrt{\lambda}t + \lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1)}$.

Βάσει του θεωρήματος συνέχειας, αρκεί να δείξει ότι $M_\lambda(t) \rightarrow M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$, καθώς $\lambda \rightarrow \infty$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξει ότι $-\sqrt{\lambda}t + \lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1) \rightarrow \frac{1}{2}t^2$, καθώς $\lambda \rightarrow \infty$.

Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0, έχουμε $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^y$, όπου $|y| < |x|$. Συνεπώς για $x = t/\sqrt{\lambda}$, παίρνουμε $e^{t/\sqrt{\lambda}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} + \frac{t^3}{6\lambda^{3/2}}e^{y_\lambda}$, όπου $|y_\lambda| < \frac{|t|}{\sqrt{\lambda}}$, οπότε

$$-\sqrt{\lambda}t + \lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}}e^{y_\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2}t^2, \text{ επειδή } y_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \text{ (αφού } |y_\lambda| < \frac{|t|}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow 0)$$

#3. Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $X_{(n)} - \log n$ είναι $F_n(x) = P(X_{(n)} - \log n \leq x) = P(X_{(n)} \leq x + \log n) = [P(X_1 \leq x + \log n)]^n = [1 - e^{-(x + \log n)}]^n = (1 - \frac{e^{-x}}{n})^n, x \in \mathbb{R}$.
 Επομένως, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{e^{-x}}{n})^n = e^{-e^{-x}} = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

#4. Το (α) έχει γίνει στην τάξη. - Π νωτίτονονδ? Π νωτίτονονδ?

(β) Θέτουμε $S_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$ και έχουμε $\mu = E X_1^2 = \text{Var} X_1 + (E X_1)^2 = 1 + 1 = 2$
 $\sigma^2 = \text{Var}(X_1^2) = E(X_1^4) - (E(X_1^2))^2 = \int_0^\infty x^4 e^{-x} dx - 4 = 1$
 $= \Gamma(5) - 4 = 4! - 4 = 20$

(Επομένως χρησιμοποιώντας το ΚΟΘ) $P(S_n \leq 2n + \sqrt{5n}) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{2n + \sqrt{5n} - 2n}{\sqrt{n}\sqrt{20}}\right) =$

$= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{20n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$

#5. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{X}_n > \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(\bar{X}_n \leq \mu)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 0))$
 $= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

#6. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itx} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + itx} dx$

#7. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \mu)$