Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ – Λύσεις των Ασκήσεων IV++

Οι #1 (α, γ, δ), #3, #4 έχουν γίνει στην τάξη.

$\boxed{\#1, \beta}$ Βρίσκουμε πρώτα την πυκνότητα της $X_{(1n)}$. Για $0<x<\theta$, έχουμε $P(X_{(1n)} \le x) = 1 - P(X_{(1n)} > x) = 1 - P(X_1 > x, \dots, X_n > x) \underset{\text{ανεξ.}}{=}$ $1 - P(X_1>x)\dots P(X_n>x) \underset{\text{ισον.}}{=} 1 - [P(X_1 > x)]^n = 1 - \left(\frac{\theta - x}{\theta}\right)^n$. Άρα η συνάρτηση κατανομής της $X_{(1n)}$ είναι $F_{(1n)}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n$, $0<x<\theta$, και η πυκνότητα της $f_{(1n)}(x) = F'_{(1n)}(x) = n\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta} = n(\theta-x)^{n-1}/\theta^n$, $0<x<\theta$.

Χρησιμοποιούμε τώρα τις ικανές συνθήκες για κατά πιθανότητα σύγκλιση σε σταθερά.

(α) $EX_{(1n)} = \int_0^\theta x\, n(\theta-x)^{n-1}/\theta^n dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^1 \theta^{1+n} y(1-y)^{n-1}dy = n\theta\int_0^1 y(1-y)^{n-1}dy =$
$= n\theta B(2,n) = n\theta\frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = n\theta\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{n}{n(n+1)}\theta \to 0$, καθώς $n\to\infty$

(β) $EX^2_{(1n)} =$
$= \int_0^\theta x^2 n(\theta-x)^{n-1}/\theta^n dx = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \to 0$, καθώς $n\to\infty$, οπότε
$\mathrm{Var}X_{(1n)} = EX^2_{(1n)} - (EX_{(1n)})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Από (α) και (β), έχουμε ότι $X_{(1n)} \xrightarrow{\text{κ.π.}} 0$.

Άλλος τρόπος (μέσω του ορισμού σύγκλισης κατά πιθανότητα): Για $\varepsilon>0$, έχουμε
$P(|X_{(1n)} - 0| > \varepsilon) = P(X_{(1n)} > \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{για } \varepsilon \ge \theta \\ \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \text{για } \varepsilon < \theta. \end{cases}$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} P(|X_{(1n)}| > \varepsilon) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$, και εξ ορισμού $X_{(1n)} \xrightarrow{\text{κ.π.}} 0$.

$\boxed{\#2}$ Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό σύγκλισης κατά πιθανότητα.

Για $\varepsilon>0$, $P(|X_{(1n)}|>\varepsilon) = P(X_{(1n)} > \varepsilon) = [P(X_1>\varepsilon)]^n = e^{-n\lambda\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

λόγω ανεξαρτησίας και ισονομίας

Παρόμοια, για την ακολουθία $\sqrt{n}X_{(1n)}$ έχουμε, με $\varepsilon>0$, $P(|\sqrt{n}X_{(1n)}|>\varepsilon) = e^{-\sqrt{n}\lambda\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Άλλος τρόπος: Βρείτε την πυκνότητα της $X_{(1n)}$. (Ισχύει, μάλιστα, ότι $X_{(1n)} \sim \mathcal{E}(n\lambda)$)