

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Ασκήσεις VI

#1. Αν Z_1, Z_2 είναι ανεξάρτητες και ισογόμες τ.μ. με τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ και $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |r| < 1, \mu_1, \mu_2$ είναι (πραγματικές) σταθερές, να βρεθεί η από κοινού κατανομή των $X_1 = \sigma_1 Z_1 + \mu_1, X_2 = \mu_2 + \sigma_2 r Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-r^2} \cdot Z_2$ και να δοθεί η από κοινού πυκνότητά τους.

#2. Αν η από κοινού κατανομή των X_1 και X_2 είναι διδαιόγιστη κοινονική $N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$, όπου $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, να βρεθεί η από κοινού κατανομή των $Y_1 = X_1 + X_2$ και $Y_2 = X_1 - X_2$. Είναι οι τ.μ. Y_1 και Y_2 ανεξάρτητες; Ποιες είναι οι περιθώριες κατανομές των Y_1 και Y_2 ;

#3. Αν X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κανονικές κατανομές $N(0,4)$ και $N(1,9)$ αντίστοιχα, να βρεθεί η από κοινού κατανομή των τ.μ. $Y_1 = 2X_1 + X_2 + 1$ και $Y_2 = X_1 - X_2$ και να δοθούν από κοινού πυκνότητα των Y_1 και Y_2 , οι περιθώριες πυκνότητες των Y_1 και Y_2 , καθώς και η δεσμευμένη πυκνότητα της Y_2 δοθέντος ότι $Y_1 = 0$.

#4 (Συνέχεια της Άσκησης #2 του Φυλλαδίου **IV**) Για τα επόμενα 100 αυτοκίνητα που θα φθάσουν στη διασταύρωση: (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και διασπορά του αριθμού εξ' αυτών που θα στρίψουν αριστερά. (β) Να δοθεί η ακριβής τιμή και να βρεθεί μια προβέχιση, μέσω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, της πιθανότητας να στρίψουν αριστερά περισσότερα από 30 αυτοκίνητα.

#5 (Κούτρας) Το ποσό της ραδιενέργειας που δέχεται εργαζόμενος σε ένα εργοστάσιο είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0.1 και τυπική απόκλιση 0.01 (σε αντίστοιχες μονάδες μέτρησης, κατ' εκτίμηση). (α) Ποια είναι η πιθανότητα το συνολικό ποσό ραδιενέργειας που θα δέχεται ο εργαζόμενος σε 100 ημέρες να ξεπεράσει την τιμή 10.02;

(β) Ας υποθέσουμε ότι η ^{κατανόηση του} ημερήσιου ποσού ραδιενέργειας που δέχεται ο εργαζόμενος είναι εκθετική με μέση τιμή 0.1. Ποια είναι η πιθανότητα σε 20 μήνες (600 ημέρες) να υπάρξουν τουλάχιστον 252 ημέρες σε κάθε μια από τις οποίες ο εργαζόμενος να δέχεται ποσό ραδιενέργειας που υπερβαίνει τη μέση ημερήσια τιμή (δηλαδή την τιμή 0.1);

#6 (Κούτρας) Σε κάθε ρίψη ζαριού, παίκτης κερδίζει 3, 2, 1 € αν η ένδειξη είναι 2, 4, 6 αντίστοιχα και χάνει 1, 2, 3 € αν η ένδειξη είναι 1, 3, 5 αντίστοιχα. Σε 60 ρίψεις να υπολογιστούν κατά προσέγγιση οι πιθανότητες:

(α) Ο παίκτης να κερδίσει τουλάχιστον 17 €.

(β) Ο παίκτης να κερδίσει το πολύ 19 €.

#7 (Κούτρας) Το ποσό της νικωτικής που περιέχεται σε ένα τσιγάρο μιας μάρκας είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0.8 mg και τυπική απόκλιση 0.1 mg. Αν ένα άτομο καπνίζει 5 πακέτα (των 20 τσιγάρων) την εβδομάδα, να βρεθεί, ^{να} κατά προσέγγιση, η πιθανότητα το συνολικό ποσό νικωτικής στο οποίο θα εκτεθεί ^{να} είναι τουλάχιστον 82 mg.

#8 Αν $X \sim N(0,1)$, να δείχθει ότι $P(X \geq \varepsilon) \leq e^{-\varepsilon^2/2}$, $\forall \varepsilon > 0$.

(Υπόδειξη: Για $t > 0$, $X \geq \varepsilon \Leftrightarrow tX \geq t\varepsilon$. Χρήση της #4 του Φυλ. IV++ με $g(x) = e^x$)